Grado en Ingeniería de los Recursos Energéticos / Grado en Ingeniería de los Recursos Mineros

Álgebra Lineal y Geometría

Práctica 1: Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Dpto. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Contenidos

Grado en Ingeniería de los Recursos Energéticos / Grado en Ingeniería de los Recursos Mineros...............1
Álgebra Lineal y Geometría....................1
Objetivos 1
Comandos útiles....................1
Crear vectores y matrices....................1
Cálculo del rango de una matriz....................3
Calcular la inversa de una matriz....................3
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales....................4
Factorización de matrices....................5
Cambiar el formato de las salidas mostradas....................6
Ejercicios resueltos....................6
Ejercicio 1: Manipulación de matrices....................6
Ejercicio 2: Forma reducida y rango....................8
Ejercicio 3: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales....................9
Ejercicio 4: Resolución de sistemas homogéneos....................13
Ejercicio 5: Resolución de sistemas mediante la factorización de Cholesky....................14
Ejercicios propuestos....................15

Objetivos

- Aprender a definir y manipular matrices y vectores.
- Calcular rangos y determinantes de matrices.
- Hallar la forma escalonada reducida de una matriz.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Comandos útiles

Crear vectores y matrices

- Crear un vector fila:

```
a=1:2:10
```

```
a = 1×5
     1     3     5     7     9
```

```
a=[1 4 9]
```

```
a = 1×3
     1     4     9
```

```
a=[1, 4, 9]
```

```
a = 1×3
     1     4     9
```

- Crear un vector columna:

```
b=[-1;2;3] % vector columna o matriz de 3 filas y 1 columna
```

```
b = 3×1
    -1
     2
     3
```

```
b=[-1 2 3]'% mismo vector columna, haciendo la traspuesta de un vector fila
```

```
b = 3×1
    -1
     2
     3
```

- Para definir una matriz combinamos la definición de vectores fila y columna

```
M=[1 2 3; 4 5 6] % matriz de 2 filas y 3 columnas
```

```
M = 2×3
     1     2     3
     4     5     6
```

```
A=[1 2 1; 2 4 3; 3 5 2]  % matriz de 3 filas y 3 columnas
```

```
A = 3×3
     1     2     1
     2     4     3
     3     5     2
```

- Se pueden seleccionar elementos de una matriz, indicando la posición de la fila y la columna, o filas o columnas enteras:

```
A(1,3) % muestra el elemento de la primera fila y tercera columna de la matrtiz A
```

```
ans = 1
```

```
A(2,:) % extrae la fila 2 entera de la matriz A
```

```
ans = 1×3
     2     4     3
```

```
A(:,1) % extrae la columna 1 entera de la matriz A
```

```
ans = 3×1
     1
     2
     3
```

- Obtener la matriz traspuesta de una matriz A:

```
At = A'
```

```
At = 3×3
     1     2     3
     2     4     5
     1     3     2
```

Cálculo del rango de una matriz

- `rank(A)`: Calcula el rango de una matriz A. Ejemplo:

```
rangoA = rank(A)
```

```
rangoA = 3
```

- `det(A)`: Calcula el determinante de una matriz A. Ejemplo:

```
determinanteA = det(A) % Al ser distinto de cero, el rango es 3
```

```
determinanteA = 1.0000
```

- `rref(A)`: Halla la forma escalonada reducida (y los pivotes) de una matriz A. También puede proporcionar las posiciones de las columnas pivotales. Ejemplos:

```
red_A = rref(A)  % El resultado es la forma escalonada de A
```

```
red_A = 3×3
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

```
[red_M, pivM] = rref(M)% hay dos resultados: la forma escalonada y las posiciones
```

```
red_M = 2×3
     1     0    -1
     0     1     2
pivM = 1×2
     1     2
```

```
% de las columnas pivotales
```

Calcular la inversa de una matriz

- `inv(A)`: Halla la inversa de una matriz A. Ejemplo:

```
inversaA =  inv(A)
```

```
inversaA = 3×3
   -7.0000    1.0000    2.0000
    5.0000   -1.0000   -1.0000
   -2.0000    1.0000         0
```

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

- `linsolve(A,b)`: Resuelve un sistema de ecuaciones dada la matriz de coeficientes `A` y el vector de términos independientes b (solo para **sistemas compatibles determinados**). Es equivalente al operador de división a la izquierda (`A\b`). Ejemplo:

```
sol = linsolve(A,b)
```

```
sol = 3×1
   15.0000
  -10.0000
    4.0000
```

```
sol = A\b
```

```
sol = 3×1
   15.0000
  -10.0000
    4.0000
```

- `solve`: Resuelve ecuaciones algebraicas y sistemas de ecuaciones. Para ello hay que trabajar con las incógnitas `x, y, z`, etc. en lenguaje simbólico definiéndolas antes de usarlas con la función `syms`, que pertene al paquete `symbolic`. Ejemplos:

```
syms x
valorX = solve(x^2-4==0, x) % Resuelve una ecuación algebraica con incógnita x
```

valorX =

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
syms x y z % definir variables simbólicas
X=[x y z].'; % Vector columna de incógnitas. En simbólico poner .' para la traspuesta
[solX solY solZ]=solve(A*X==b, x, y, z); % el primer argumento es la ecuación a
% resolver, y a continuación las variables
[solX solY solZ]
```

ans = $\begin{pmatrix} 15 & -10 & 4 \end{pmatrix}$

- `subs(exp, var, valor)`: Sustituye el valor de una variable en una expresión simbólica por otra expresión o valor numérico. Ejemplo:

```
syms x
subs(x^2 + x + 3, x, 2) % sustituye x=2 en esa ecuación de 2º grado
```

```
ans = 9
```

- `null(A, 'r')`: Devuelve la solución al sistema de ecuaciones homogéneo de matriz de coeficientes A. El argumento `'r'` es opcional. Lo usaremos habitualmente, pues da lugar a soluciones compuestas por números racionales (que se pueden expresar como una fracción), que resultan más manejables. Lógicamente, las soluciones devueltas con y sin `'r'` son igual de válidas. Ver el ejercicio resuelto 4 para la interpretación del resultado de `null`.

Factorización de matrices

- `lu(A)`: Proporciona la factorización de la matriz A. Ejemplo:

```
[L U P] = lu(A)
```

```
L = 3×3
    1.0000         0         0
    0.6667    1.0000         0
    0.3333    0.5000    1.0000
U = 3×3
    3.0000    5.0000    2.0000
         0    0.6667    1.6667
         0         0   -0.5000
P = 3×3
     0     0     1
     0     1     0
     1     0     0
```

```
% Comprobación
P*A-L*U
```

```
ans = 3×3
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

- `chol(A, 'lower')`: Proporciona la factorización de Cholesky de la matriz A en base a una matriz triangular inferior.

```
A=[4 2 1; 2 2 0; 1 0 3];
L =  chol(A, 'lower')
```

```
L = 3×3
    2.0000         0         0
    1.0000    1.0000         0
    0.5000   -0.5000    1.5811
```

```
% Comprobación
L*L'-A
```

ans = 3×3
10^{-15} ×

```
         0         0         0
         0         0         0
         0         0    0.4441
```

- `issymmetric(A)`: Sirve para comprobar si A es una matriz simétrica. Devuelve 1 (TRUE) ó 0 (FALSE). Ejemplo:

```
issymmetric(A)
```

```
ans = logical
   1
```

Cambiar el formato de las salidas mostradas

- `format`: Cambia el formato de los resultados.

```
format rat % Para tener el resultado en formato de cociente (ratio)
format long % Para recuperar el formato decimal con 15 decimales
format short % Para recuperar el formato decimal con 4 decimales
```

Ejercicios resueltos

Nota: las lineas de código que terminan en `;` no muestran resultado por pantalla, mientras que la mayoría sí lo muestran, para facilitar vuestra comprobación.

Ejercicio 1: Manipulación de matrices

Considerar la matriz A y hacer las siguientes transformaciones:

a) sustituir el término (2,3) por -3 y sustituir el término (1,2) por 7.

b) extraer en un vector la primera fila de A y en otro vector la segunda columna de A.

c) extraer en una matriz las filas de 1 a 3 de A, y en otra matriz las columnas 3 y 4.

d) añadir una matriz identidad de orden 4 a la derecha de A, y lo mismo debajo de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) sustituir el término (2,3) por -3 y sustituir el término (1,2) por 7.

```
A=[1 3 2 -1;0 0 2 5;-2 0 0 3;1 1 1 -1]; % Definir la matriz original
A(2,3)=-3
```

```
A = 4×4
     1     3     2    -1
     0     0    -3     5
    -2     0     0     3
     1     1     1    -1
```

```
A(1,2)=7
```

```
A = 4×4
```

```
     1     7     2    -1
     0     0    -3     5
    -2     0     0     3
     1     1     1    -1
```

b) extraer en un vector la primera fila de *A* y en otro vector la segunda columna de *A*.

```
v1=A(1,:)
```

```
v1 = 1×4
     1     7     2    -1
```

```
v2=A(:,2)
```

```
v2 = 4×1
     7
     0
     0
     1
```

c) extraer en una matriz las filas de 1 a 3 de *A*, y en otra matriz las columnas 3 y 4.

```
B=A(1:3,:)
```

```
B = 3×4
     1     7     2    -1
     0     0    -3     5
    -2     0     0     3
```

```
C=A(:,3:4)
```

```
C = 4×2
     2    -1
    -3     5
     0     3
     1    -1
```

d) añadir una matriz identidad de orden 4 a la derecha de *A*, y lo mismo debajo de *A*.

```
I4=eye(4)
```

```
I4 = 4×4
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

```
A2=[A,I4] % a la derecha
```

```
A2 = 4×8
     1     7     2    -1     1     0     0     0
     0     0    -3     5     0     1     0     0
    -2     0     0     3     0     0     1     0
     1     1     1    -1     0     0     0     1
```

```
A3= [A;I4] % debajo
```

```
A3 = 8×4
     1     7     2    -1
     0     0    -3     5
    -2     0     0     3
     1     1     1    -1
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

Ejercicio 2: Forma reducida y rango

Dada la siguiente matriz *A*, calcular:

a) su forma escalonada reducida y rango.

b) una submatriz *M* que le proporciona el rango. Calcular el determinante e inversa de *M*.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix}$$

a) su forma escalonada reducida y rango.

```
A=[3 1 -8 2 1; -2 2 4 -7 2; 1 11 -12 34 -5; 1 -5 2 -16 3]; % Definir la matriz
[red, piv] = rref(A) % tiene 3 pivotes y las columnas pivotales son 1º,2º,3º
```

```
red = 4×5
    1.0000         0         0  -33.6250   10.0000
         0    1.0000         0   -9.1250    3.0000
         0         0    1.0000  -14.0000    4.0000
         0         0         0         0         0
piv = 1×3
     1     2     3
```

```
rango = rank(A) % el rango es 3, que coincide con el número de columnas pivotales
```

```
rango = 3
```

b) una submatriz *M* que le proporciona el rango. Calcular el determinante e inversa de *M*.

```
M=A(1:3,piv) % la submatriz que proporciona el rango es aquella formada por las 3
```

```
M = 3×3
     3     1    -8
    -2     2     4
     1    11   -12
```

```
% primeras filas y las columnas pivotales
det(M) % calcular el determinante
```

```
ans = -32.0000
```

```
inv(M) % calcular la inversa
```

```
ans = 3×3
    2.1250    2.3750   -0.6250
    0.6250    0.8750   -0.1250
    0.7500    1.0000   -0.2500
```

Ejercicio 3: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Clasificar y, si se puede, resolver los sistemas dados por las siguientes parejas de matrices de coeficientes *A* y vectores de términos independientes *b*:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & 9 & -3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Dar la solución general para (x,y,z,t) y la solución particular para $z = 1$ y $t = 2$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

```
A = [1 -3 2; 5 6 -1; 4 9 5]; % matriz de coeficientes
b = [1 3 1]'; % términos independientes
Ampli=[A, b] % matriz ampliada
```

```
Ampli = 3×4
     1    -3     2     1
     5     6    -1     3
     4     9     5     1
```

```
[rank(A) rank(Ampli)]
```

```
ans = 1×2
     3     3
```

Por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado. Por lo tanto se puede resolver de varias formas.

- Forma 1: Utilizando la forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada del sistema (método de Gauss-Jordan).

```
format rat
```

```
red = rref(Ampli)
```

```
red =
       1              0              0             43/56
       0              1              0             -9/56
       0              0              1             -1/8
```

```
sol1 = red(:, 4) % leemos la solución de la última columna en forma reducida
```

```
sol1 =
      43/56
      -9/56
      -1/8
```

- Forma 2: Con la función linsolve (usa distintos tipos de factorización de matrices para resolver el sistema).

```
sol2 = linsolve(A,b)
```

```
sol2 =
      43/56
      -9/56
      -1/8
```

- Forma 3: Con la inversa de la matriz de coeficientes

```
sol3 = inv(A)*b
```

```
sol3 =
      43/56
      -9/56
      -1/8
```

- Forma 4: Con el operador \ (matrix left division). Ver ayuda con `help ldivide`.

```
sol4 = A\b
```

```
sol4 =
      43/56
      -9/56
      -1/8
```

- Forma 5: Con la función solve trabajando en simbólico.

```
syms x y z
X=[x y z].';
[sol5X sol5Y sol5Z]=solve(A*X==b, x, y, z);
sol5 = [sol5X sol5Y sol5Z]
```

```
sol5 =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{43}{56} & -\frac{9}{56} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

- <u>Forma 6:</u> Como la matriz de coeficientes es invertible, se puede resolver el sistema usando factorización LU.

```
[L U P] = lu(A);
% Comprobación:
P*A-L*U
```

```
ans =
       0              0              0
       0              0              0
       0              0              0
```

Se resuelven dos sistemas asociados a las matrices triangulares L y U:

Como $PA = LU \Rightarrow A = P^{-1}LU$, y $A\vec{x} = \vec{b}$, entonces los dos nuevos sistemas son:

$$P^{-1}L\vec{y} = \vec{b} \qquad U\vec{x} = \vec{y}$$

Para ello se puede usar cualquier técnicas de las estudiadas para resolución de sistemas compatibles determinados, por ejemplo:

```
y = inv(P)*L\b
```

```
y =
       3
       2/5
      -1
```

```
x = U\y
```

```
x =
      43/56
      -9/56
      -1/8
```

O utilizando la inversa de la matriz de coeficientes:

```
y = inv(inv(P)*L)*b
```

```
y =
       3
       2/5
      -1
```

```
x = inv(U)*y
```

```
x =
      43/56
      -9/56
      -1/8
```

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & 9 & -3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

```
A = [1 -3 2; 5 6 -1; 4 9 -3]; % matriz de coeficientes
b = [1 3 1]'; % términos independientes
Ampli=[A, b] % Obtener la matriz ampliada
```

```
Ampli =
       1            -3             2             1
       5             6            -1             3
       4             9            -3             1
```

```
[rank(A) rank(Ampli)]
```

```
ans =
       2             3
```

Por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es incompatible porque el rango de A y la ampliada no coinciden.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dar la solución general para (x,y,z,t) y la solución particular para $z = 1$ y $t = 2$.

```
A = [2 3 1 -5; 3 3 0 3; 3 4 1 -4]; % matriz de coeficientes
b = [1 3 2]'; % términos independientes
Ampli=[A, b] % Obtener la matriz ampliada
```

```
Ampli =
       2             3             1            -5             1
       3             3             0             3             3
       3             4             1            -4             2
```

```
[rank(A) rank(Ampli)]
```

```
ans =
       2             2
```

Por el Teorema de Rouché Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado porque el rango es 2 y hay 4 incógnitas. Habrá 2 parámetros libres. Podemos resolver un sistema compatible indeterminado de varias maneras. `linsolve` no sirve porque daría solo *una* solución particular del sistema no homogéneo.

- Forma 1: Mediante la forma reducida por filas de la matriz ampliada:

```
RF=rref(Ampli)
```

```
RF =
       1             0            -1             8             2
       0             1             1            -7            -1
       0             0             0             0             0
```

Hay 2 parámetros libres, las que corresponden a columnas no pivotales en el sistema equivalente que define `RF`. Despejamos las variables de las columnas pivotales `(x, y)` en función de los parámetros libres `(z,t)`.

```
syms z t; x=2+z-8*t; y=-1-z+7*t;
SG=[x,y,z,t] % Solución general en forma vectorial
```

SG = $\begin{pmatrix} z-8\,t+2 & 7\,t-z-1 & z & t \end{pmatrix}$

Obtenemos la solución particular sustituyendo `z, t` por sus valores (ver enunciado):

```
SP=subs(SG,[z,t], [1,-2])
```

SP = $\begin{pmatrix} 19 & -16 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

- Forma 2: Mediante la instrucción solve:

```
syms x y z t
X=[x y z t ].'; % Definir variables simbólicas y crear vector de incógnitas
[solX solY]=solve(A*X==b, x, y); % solo resolvemos en función de las variables de
% las columnas pivotales (x,y)
SG=[solX solY z t] % Sol. general
```

SG = $\begin{pmatrix} z-8\,t+2 & 7\,t-z-1 & z & t \end{pmatrix}$

Obtenemos la solución particular sustituyendo `z, t` por sus valores (ver enunciado):

```
SP=subs(SG,[z,t], [1,-2])
```

SP = $\begin{pmatrix} 19 & -16 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4: Resolución de sistemas homogéneos

Hallar la solución de los sistemas de ecuaciones homogéneos dados por las siguientes matrices de coeficientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Los sistemas de ecuaciones homogéneos son siempre compatibles, pues al menos tendrán la solución trivial. Se pueden resolver por cualquiera de los métodos vistos anteriormente para sistemas compatibles determinados o mediante el comando `null`.

```
A = [1 -3 4; 1 -2 5; 2 -1 -3]; % matriz de coeficientes
solh = null(A, 'r')
```

```
solh =

  3×0 empty double matrix
```

Este resultado indica que la única solución es la trivial, $(x = 0, y = 0, z = 0)$, así que es un sistema compatible determinado.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

```
format rat
A = [2 1 1; 3 0 -1; 10 5 5];
solh = null(A, 'r')
```

```
solh =
       1/3
      -5/3
       1
```

En este caso es un sistema compatible indeterminado, con infinitas soluciones, puesto que el resultado de `null` no es la solución trivial. La solución del sistema vendrá dada por la combinación lineal de los vectores en las columnas de la matriz que devuelve `null`. En este caso, devuelve una única columna, por lo que la solución del sistema será: $\alpha\left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}, 1\right) \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Ejercicio 5: Resolución de sistemas mediante la factorización de Cholesky

Resolver, utilizando la factorización de Cholesly, el sistema de ecuaciones dado por la siguiente matrices de coeficientes *A* y el vector de términos independientes *b:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, creamos la matriz A y el vector b y comprobamos que A es simétrica y definido positiva:

```
A=[4 2 1; 2 2 0; 1 0 3];
b=[2 -3 5]';
issymmetric(A) % es simétrica puesto que devuelve 1 (1=TRUE)
```

```
ans = logical
   1
```

Los menores principales de primer orden (4, 2, 3) son positivos. Calculamos los menores principales de orden 2 y 3:

```
[det(A(1:2, 1:2)), det(A(2:3, 2:3)), det(A([1 3],[1 3])), det(A)]
```

```
ans =
       4              6              11              10
```

Como todos los menores principales son positivos, A es una matriz definida positiva. Se puede aplicar la factorización de Cholesky:

```
format short
L = chol(A, 'lower')
```

```
L = 3×3
    2.0000         0         0
    1.0000    1.0000         0
    0.5000   -0.5000    1.5811
```

```
A - L*L' % comprobación
```

```
ans = 3×3
10^-15 ×
         0         0         0
         0         0         0
         0         0   -0.4441
```

Como $A = LL^t$ y $A\vec{x} = \vec{b}$, entonces los dos nuevos sistemas, en los que interviene la matriz triangular L, son:

$$L\vec{y} = \vec{b} \qquad L^t\vec{x} = \vec{y}$$

```
y = L\b
```

```
y = 3×1
    1.0000
   -4.0000
    1.5811
```

```
x = L'\y
```

```
x = 3×1
    2.0000
   -3.5000
    1.0000
```

O utilizando la inversa de la matriz de coeficientes:

```
y = inv(L)*b;
x = inv(L')*y
```

```
x = 3×1
    2.0000
   -3.5000
    1.0000
```

Ejercicios propuestos

Se propone resolver con Matlab los ejercicios de las hojas de problemas de los temas 1 y 2, en especial: **1.6, 1.7, 1.9, 1.15, 1.16** del tema 1 y **2.3, 2.4, 2.11, 2.12, 2.13** del tema 2.