Ana Casanueva Vicente. Este material se publica bajo licencia: Creative Commons BY-NC-SA 4.0

Álgebra Lineal y Geometría

Práctica 2: Espacios Vectoriales

Dpto. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Contenidos

Objetivos

- Encontrar las relaciones de dependencia lineal en un conjunto de vectores.
- Hallar la base de un subespacio.
- Calcular la suma e intersección de subespacios, dados por sus ecuaciones implícitas o en forma paramétrica.

Comandos útiles

- Para definir una matriz combinamos la definición de vectores fila y columna

```
M=[1 2 3; 4 5 6] % matriz de 2 filas y 3 columnas
```

```
M = 2×3
     1     2     3
     4     5     6
```

- `rref(A)`: Halla la forma escalonada reducida (y los pivotes) de una matriz A. También puede proporcionar las posiciones de las columnas pivotales. Ejemplos:

```
[redM, pivM] = rref(M)
```

```
redM = 2×3
```

```
      1     0    -1
      0     1     2
pivM = 1×2
      1     2
```

Hay dos resultados: la forma escalonada reducida y las posiciones de las columnas pivotales.

- `null(A, 'r')`: Devuelve la solución al sistema de ecuaciones homogéneo de matriz de coeficientes A. El argumento `'r'` es opcional. Lo usaremos habitualmente, pues da lugar a soluciones compuestas por números racionales (que se pueden expresar como una fracción), que resultan más manejables. Lógicamente, las soluciones devueltas con y sin `'r'` son igual de válidas. Ver la práctica 1 para la interpretación del resultado de `null`.

```
H=null(M, 'r')
```

```
H = 3×1
      1
     -2
      1
```

- `format`: Cambia el formato de los resultados.

```
format rat % Para tener el resultado en formato de cociente (ratio)
format long % Para recuperar el formato decimal con 15 decimales
format short % Para recuperar el formato decimal con 4 decimales
```

Ejercicios resueltos

Nota: las lineas de código que terminan en `;` no muestran resultado por pantalla, mientras que la mayoría sí lo muestran, para facilitar vuestra comprobación.

Ejercicio 1: Relaciones de dependencia lineal

Comprobar si el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{R}^5$ forma un sistema libre o ligado, y en el ese caso hallar una relación de dependencia.

$$A = \{(-2,4,0,-1,2),(2,1,2,-1,1),(1,0,2,1,0),(0,1,-2,-3,1)\}$$

Introducir los vectores y formar una matriz con ellos, colocados por columnas

```
a=[-2, 4, 0, -1, 2]';
b=[2, 1, 2, -1, 1]';
c=[1,0,2,1,0]';
d=[0,1,-2,-3,1]';
A=[a,b,c,d]
```

```
A = 5×4
     -2     2     1     0
      4     1     0     1
      0     2     2    -2
     -1    -1     1    -3
```

```
     2     1     0     1
```

Usamos la forma reducida de la matriz que forman los vectores para encontrar la dependencia:

```
[red, cp]=rref(A)
```

```
red = 5×4
     1     0     0     0
     0     1     0     1
     0     0     1    -2
     0     0     0     0
     0     0     0     0
cp = 1×3
     1     2     3
```

```
vectoresLI= A(:, cp)
```

```
vectoresLI = 5×3
    -2     2     1
     4     1     0
     0     2     2
    -1    -1     1
     2     1     0
```

Al haber solo 3 columnas pivotales de las 4 posibles, el sistema es ligado. La columna no pivotal (la 4ª) proporciona la dependencia $d = 0a + 1b - 2c$, como se comprueba:

```
d-b+2*c % La comprobación ha de dar el vector nulo.
```

```
ans = 5×1
     0
     0
     0
     0
     0
```

Ejercicio 2: Base de un subespacio

Hallar las ecuaciones paramétricas y una base del subespacio S de $\mathbb{R}^4$ definido por las ecuaciones implícitas:

$$S \equiv \{x - y + 2z + 3t = 0; 3x - 2y + z - t = 0\}$$

En primer lugar, se escriben los coeficientes de cada ecuación en filas, ya que $A\vec{x} = \vec{0}$, donde $\vec{x}$ es el vector columna de incógnitas:

```
A = [1 -1 2 3; 3 -2 1 -1] % A es la matriz de coeficientes
```

```
A = 2×4
     1    -1     2     3
     3    -2     1    -1
```

- Forma 1: usando la forma reducida de la matriz de coeficientes

```
[red, cp]=rref(A)
```

```
red = 2×4
     1     0    -3    -7
     0     1    -5   -10
cp = 1×2
     1     2
```

De donde se obtiene que la forma paramétrica de parámetros a y b sería: x=3*a+7*b, y=5*a+10*b, z=a, t=b. De la forma paramétrica, deducimos que una base está formada por los vectores $(3, 5, 1, 0), (7, 10, 0, 1)$.

- Forma 2: resolviendo directamente el sistema homogéneo:

```
H=null(A, 'r')
```

```
H = 4×2
     3     7
     5    10
     1     0
     0     1
```

Cada columna de H es un vector de la base de S. Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas, trabajando en simbólico, serían:

```
syms a b; a*H(:,1)+b*H(:,2) % son todas las C.L. de los vectores de la base
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 3\,a+7\,b \\ 5\,a+10\,b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3: Suma e intersección de subespacios

Considerar en $\mathbb{R}^4$ los siguientes subespacios S y T.

$$S = \{(x, y, z, t)/x + 2y + z - t = 0; z - t = 0\} \qquad T = \{(1, 1, 1, 1)\}$$

a) Obtener una base de $S + T$ y su dimensión.

b) Obtener una base de $S \cap T$ y su dimensión.

c) Justificar si S y T están en suma directa.

d) Justificar si S y T son o no suplementarios.

a) Obtener una base de $S + T$ y su dimensión.

En primer lugar, hallamos una base de :

```
coefS=[1 2 1 -1; 0 0 1 -1]; % coeficientes de las implícitas en filas
baseS=null(coefS, 'r')
```

```
baseS = 4×2
```

```
    -2     0
     1     0
     0     1
     0     1
```

Se obtiene una base de S en columnas, por lo tanto, $dim(S) = 2$.

Respecto a T, ya nos dan una base así que expresamos el vector como vector columna:

```
baseT=[1 1 1 1]'
```

```
baseT = 4×1
     1
     1
     1
     1
```

Dado que es un único vector, $dim(T) = 1$.

Hallamos una base de la suma considerando conjuntamente los vectores que forman la base de S y de T y analizando si esos vectores son linealmente independientes.

```
baseSuma=[baseS baseT]
```

```
baseSuma = 4×3
    -2     0     1
     1     0     1
     0     1     1
     0     1     1
```

```
rf=rref(baseSuma)
```

```
rf = 4×3
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
     0     0     0
```

Hemos comprobado que son 3 vectores linealmente independientes, por lo tanto, forman base de $S + T$, y $dim(S + T) = 3$.

b) Obtener una base de $S \cap T$ y su dimensión.

A continuación se obtiene una base de la intersección resolviendo el sistema homogéneo que forman todas las ecuaciones implícitas de S y T juntas. Ya tenemos las ecuaciones implícitas de S pero no las de T (ver implicitación en los apuntes). Como estamos en $\mathbb{R}^4$ y $dim(T) = 1$, T tendrá 3 ecuaciones implícitas. Se pueden calcular a mano: $-x + y = 0, -x + z = 0, -x + t = 0$, o con MATLAB como se indica a continuación. Sabemos que cualquier vector de T (y en particular los vectores de la base) verificarán las ecuaciones implícitas del subespacio, cuya forma general será $Ax + By + Cz + Dt = 0$. Por tanto, bastará con resolver el sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes estará formada por los vectores de la base (colocados en filas), y en el que las incógnitas serán precisamente los coeficientes de las ecuaciones implícitas que buscamos A, B, C, D:

```
coefT= null(baseT','r')' % trasponemos baseT porque era un vector columna
```

```
coefT = 3×4
    -1     1     0     0
    -1     0     1     0
    -1     0     0     1
```

Las filas dan directamente los coeficientes de las implícitas de T.

Una vez tenemos las ecuaciones implícitas de S y de T, se calcula la base de la intersección resolviendo el sistema de las 5 ecuaciones juntas:

```
coefM=[coefS;coefT]
```

```
coefM = 5×4
     1     2     1    -1
     0     0     1    -1
    -1     1     0     0
    -1     0     1     0
    -1     0     0     1
```

Resolviendo el sistema:

```
baseIntersec=null(coefM, 'r')
```

```
baseIntersec =

  4×0 empty double matrix
```

En este caso se obtiene que la intersección es cero.

c) ¿Están en suma directa? Sí, porque $dim(S+T) = dim(S) + dim(T)$, es decir, la dimensión de la intersección es cero.

d) ¿Son suplementarios? Aunque están en suma directa, la dimensión del subespacio suma es 3 y la dimensión del espacio total es 4 ($\mathbb{R}^4$), por lo tanto no son suplementarios.

Ejercicios propuestos

Se propone resolver con MATLAB los ejercicios de las hojas de problemas del tema 3, en especial: **3.3, 3.5, 3.7, 3.8, 3.9**.