

Apellidos:

Nombre:

Nº:

IMPORTANTE: Todas las respuestas deben ser **razonadas** en el espacio disponible. Debe usarse bolígrafo azul o negro, **no se corregirán resultados a lápiz**.

1. (1 puntos) Considerar la siguiente aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) \rightsquigarrow (x - t, 0, x + y + kt)$$

con $k \in \mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de k para el cuál f es sobreyectiva? ¿Y para que sea inyectiva?

2. (1 puntos) Dada la matriz A con $a \in \mathbb{R}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 4 & 4 \end{pmatrix}$

¿Existe algún valor de a para el cuál A es diagonalizable? En caso afirmativo, escribir la matriz diagonal semejante del endomorfismo.

3. (1+0.25+0.5+0.25=2 puntos) Sea f el escalamiento anisótropo en \mathbb{R}^2 que duplica la abscisa y reduce a la mitad la ordenada de un vector y g la simetría respecto del eje OX en \mathbb{R}^2 .

- a) Hallar las matrices A y B de las aplicaciones f y g , respectivamente, en bases canónicas.
- b) Hallar las matrices de la composición de aplicaciones $f \circ g$ y $g \circ f$.
- c) Dado $\vec{v} = (1, 2)$, hallar $f(\vec{v})$, $g(\vec{v})$, $(f \circ g)(\vec{v})$ y $(g \circ f)(\vec{v})$ con las matrices de los apartados anteriores y representar gráficamente \vec{v} y los vectores transformados a través de f , g , $f \circ g$ y $g \circ f$ (aproximadamente).
- d) ¿Qué sucede con la longitud del vector \vec{v} después de las transformaciones anteriores?



4. (0.5+0.5+0.5+0.25+0.25+1=3 puntos) Considerar la siguiente aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) \rightsquigarrow (x - y, x + y, 2x, 3y)$$

- a) Hallar la matriz de la aplicación en bases canónicas.
- b) Dar una base y la dimensión del núcleo de f .
- c) Dar una base y la dimensión de la imagen de f .
- d) Clasificar la aplicación f .
- e) Hallar los vectores de \mathbb{R}^2 tales que su imagen es el vector $(-7, 3, -10, 6)$.
- f) Considerar el subespacio S de \mathbb{R}^2 dado por la ecuación implícita $2x + y = 0$, calcular una base y la dimensión de su imagen según f .



5. (1.5+0.25+0.25+0.25+0.5+0.25=3 puntos) Considerar la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2z, -y, 2x + z)$$

Se pide:

- Calcular sus valores y vectores propios. Comprobar el resultado.
- Dar la base \mathbb{R}^3 en la cual la matriz de la aplicación es diagonal.
- Diagonalizar el endomorfismo.
- Estudiar la relación entre la matriz diagonal y la matriz en bases canónicas.
- Usando los apartados anteriores, calcular A^{17} , donde A es la matriz de la aplicación en bases canónicas.
- Razonar el valor de los valores y vectores propios de la matriz A^{17} .

