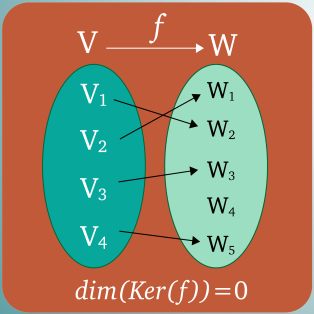
Álgebra

Tema 2. Sistemas de ecuaciones lineales



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Contenidos

SISTEMAS DE ECUACIONES

En general, una ecuación **lineal** es cualquiera de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde las **incógnitas** $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ están elevadas a uno y no aparecen en funciones trascendentes ($ln(x)$, $sen(x)$, $cos(x)$, e^x...) y/o multiplicadas entre sí. A menudo se necesita resolver varias ecuaciones lineales que han de cumplirse a la vez (sistema lineal). Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene la forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

donde $\left\{a_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}\right\} \in \mathbb{R}$ son los **coeficientes** y $\{b_{1,\ldots,m}\} \in \mathbb{R}$ los **términos independientes**. Lógicamente, todos los $\left\{a_{ij}\right\}$ no pueden ser nulos a la vez. Si todos los $\{b_{1,\ldots,m}\}$ son nulos, el sistema se denomina **homogéneo**.

Ejemplo: ¿Son lineales los siguientes sistemas?

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x+2y-5z & = & -4 \\ -x-2y+5z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} x-y+2z=0 \\ 3x+y-3z=0 \\ -2x+3y-4z=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x-ln(y) & = & 1 \\ -2x+4e^{y} & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x-y+3z=2 \\ -3x+\frac{2}{y}-z=1 \\ y+2z=4 \end{array}\right.$$

FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

A: matriz de coeficientes; $\vec{x}$: vector de incógnitas; $\vec{b}$: vector de términos independientes

TEOREMA

Toda matriz representa un sistema lineal y todo sistema lineal se puede representar por su **matriz ampliada**, $A^* = \left(A \mid \vec{b}\right)$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Soluciones de un sistema

La solución de un sistema es el conjunto de valores para las n incógnitas que satisfacen simultáneamente las m ecuaciones

Teorema

Cualquier sistema de ecuaciones lineales tiene: ninguna solución, una única solución o infinitas soluciones

- Sistema **incompatible**: No tiene solución

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ 2x+2y & = & 2 \end{array}\right.$$

- Sistema **compatible**: Tiene solución

Determinado: Solución única

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y & = & 1 \\ -x+2y & = & 3 \end{array}\right.$$

Indeterminado: Infinitas soluciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y+z & = & 0 \\ x-2y+3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Nota: Todo sistema lineal homógeneo es compatible, ya que tiene, como mínimo, la solución trivial $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \vec{0}$

Soluciones de un sistema

Teorema de Rouché-Fröbenius

Dado un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas, la condición necesaria y suficiente para que sea compatible (tenga solución) es que $rg(A) = rg(A^*)$

- $rg(A) \neq rg(A^*) \Rightarrow$ Incompatible
- $rg(A) = rg(A^*) \Rightarrow$ Compatible
  - Determinado si $rg(A) = rg(A^*) = n$
  - Indeterminado si $rg(A) = rg(A^*) < n$
    - $rg(A)$: número de incógnitas principales
    - $n - rg(A)$: número de parámetros libres

Sistemas equivalentes

Dos sistemas lineales con las mismas incógnitas son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Nota: Para que dos sistemas sean equivalentes, no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones.

Teorema

A partir de un sistema lineal cualquiera se puede obtener otro sistema equivalente efectuando *operaciones elementales*

Operación elemental en una matriz	Operación elemental en un sistema
Intercambiar dos filas	Intercambiar dos ecuaciones
Multiplicar una fila por $k \neq 0$	Multiplicar una ecuación por $k \neq 0$
Sumar a una fila, otra fila mutiplicada por $k \neq 0$	Sumar a una ecuación, otra ecuación mutiplicada por $k \neq 0$

Ejemplo: Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

son sistemas equivalentes:

$$F_{1,2} \qquad \begin{cases} -x + y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$F_1(1/2) \qquad \begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

$$F_{2,1}(1/2) \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 2y = 7 \end{cases}$$

MÉTODO DE GAUSS (O ELIMINACIÓN GAUSSIANA)

Consiste en convertir cualquier sistema lineal, mediante operaciones elementales, en otro equivalente triangular o casi triangular, para después resolverlo por sustitución hacia atrás. En otras palabras, se basa en la transformación de A^* en una forma **escalonada**

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x - y &= 3 \\ 2x + y &= 3 \end{cases}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x &= 3 + y \\ 3y &= -3 \end{cases}$$

Solución: $(x, y) = (2, -1)$

Sistema compatible determinado

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 = n$$

Ejemplo 2:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y & = & 3 \\ 2x + y & = & 3 \\ 2x + y & = & 4 \end{array}\right.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{3,1}(-2)]{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{3,2}(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La tercera ecuación nos dice que $0 = 1 \Rightarrow$ No tiene solución

Sistema incompatible

$$rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3$$

Ejemplo 3:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 3 \\ 2x + y + 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Sistema con más variables (3) que ecuaciones (2),

por tanto habrá 3-2 (1) parámetro libre

Sistema compatible indeterminado

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 < n = 3$$

Convenio: tomar como incógnitas principales las correspondientes a las columnas pivotales (x, y) y como parámetros libres las correspondientes a las columnas no pivotales (z)

Solución (en forma paramétrica):

$$\left.\begin{array}{lclcl} z & = & \alpha & & \\ y & = & -1 & & \\ x & = & 3 + y - z & = & 2 - \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (x, y, z) = (2 - \alpha, -1, \alpha)$$

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Consiste en convertir cualquier sistema en otro equivalente cuya matriz ampliada A^* sea escalonada **reducida** por filas

Recordatorio: La forma reducida es la matriz escalonada con pivotes unidad y los demás elementos de la columna del pivote nulos

Ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x+16y+64z & = & 100 \\ 2x+4y+8z & = & 6 \\ x+y+z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 16 & 64 & 100 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2(1/2)]{F_1(1/4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{3,1}(-1)]{F_{2,1}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -2 & -12 & -22 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2(1/2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{3,2}(-3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3(1/3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{2,3}(6)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{1,3}(-16)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2(-1)]{F_{1,2}(4)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Solución: $(x, y, z) = (-3, -1, 2)$

Sistema compatible determinado

$$rg(A) = rg(A^*) = n = 3$$

MÉTODO DE CRAMER

Este método puede aplicarse para resolver sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (n), en los cuales $A_{n\times n}$ sea invertible. En este caso, la solución *única* (nótese que un sistema de Cramer será siempre compatible determinado) puede obtenerse a partir de los determinantes que resultan de cambiar, en A, la columna correspondiente a la incógnita x_i por la de términos independientes

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-2y+z & = & 0 \\ 2y-8z & = & 8 \\ -4x+5y+9z & = & -9 \end{array}\right.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_x| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ -9 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 58$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 32 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{58}{2} = 29; \quad y = \frac{32}{2} = 16; \quad z = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $(x, y, z) = (29, 16, 3)$

MÉTODO DE LA FACTORIZACIÓN LU

También se pueden resolver sistemas lineales con ayuda de la **factorización** LU que vimos para matrices invertibles

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 4z = 12 \\ x - 4y + 3z = -21 \\ -6x - 9y + 10z = -24 \end{cases}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \\ -6 & -9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Aplicando las operaciones elementales $F_{2,1}(-\frac{1}{2})$, $F_{3,1}(3)$ y $F_{3,2}(\frac{1}{2})$ sobre A podemos factorizarla en la forma LU, con:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

A partir de esta factorización, podemos desdoblar el sistema original en dos

$$\left.\begin{array}{r} A\vec{x} = \vec{b} \\ A = LU \end{array}\right\} \Rightarrow LU\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} U\vec{x} = \vec{y} \\ L\vec{y} = \vec{b} \end{array}\right\}$$

Estos dos nuevos sistemas son triangulares y en consecuencia se resuelven inmediatamente:

$$L\vec{y} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$a = 12; \; b = -27; \; c = -3/2$$

$$U\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $\{z = -3, y = 2, x = -4\}$