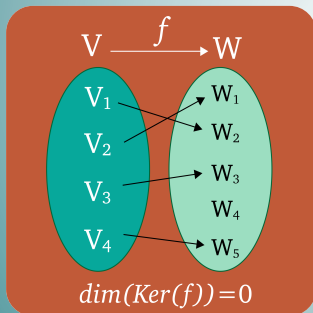


Álgebra

Tema 3. Espacios vectoriales



Rodrigo García Manzanás
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
 Ciencias de la Computación

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

- 1 Introducción
 - Vectores
 - Espacios vectoriales
 - Subespacio vectorial
- 2 Formas implícita y paramétrica
- 3 Inclusión, intersección y suma
- 4 Dependencia e independencia lineal
 - Rango de un conjunto de vectores
- 5 Sistema generador
- 6 Base y dimensión
 - Implicitación
 - Coordenadas y cambio de base
- 7 Suma directa y subespacio suplementario

VECTORES

El concepto de **vector** en *Álgebra* es distinto al clásico que tenemos de la *Física*. En concreto, cualquier objeto que cumpla las siguientes condiciones podrá ser considerado como un vector en *Álgebra*:

- Si se **suman** dos vectores, se obtiene otro vector
- Si se **multiplica** un vector por un número (**escalar**), se obtiene otro vector

Convenio: Identificaremos con letras latinas a los vectores (\vec{u} , \vec{v} , \vec{w} ...) y con letras griegas (α , β , γ ...) a los escalares

VECTORES

Estas dos operaciones han de cumplir ciertas **propiedades**:

- **Suma:**

- Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Elemento neutro $\vec{0}$: $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- Elemento opuesto $-\vec{u}$: $\vec{u} + -\vec{u} = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$

- **Producto por un escalar:**

- Asociativa: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
- Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- Elemento neutro 1: $1\vec{u} = \vec{u}1 = \vec{u}$

ESPACIOS VECTORIALES

ESPACIO VECTORIAL

Un **espacio vectorial** es cualquier conjunto de vectores que posea las operaciones *suma* y *producto por escalares*, cumpliendo todas las propiedades anteriores. Dicho espacio vectorial será *real* o *complejo* según sean los escalares que hacen que se cumplan esas propiedades

Ejemplos:

- \mathbb{R}^n , formado por todos los vectores \vec{x} de n componentes (x_1, \dots, x_n) es un espacio vectorial real. Sin embargo, no es un espacio vectorial complejo
- El conjunto de polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales, $\mathbb{P}_2 \equiv \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, es un espacio vectorial real. Sin embargo, no es un espacio vectorial complejo

ESPACIOS VECTORIALES

Ejercicios:

- Razona si son espacios vectoriales (reales o complejos) los siguientes:
 - El conjunto \mathbb{G} de los polinomios de grado 3 (estrictamente 3)
 - El conjunto $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ de matrices reales cuadradas de orden 2
- Explica si \mathbb{R}^3 , con las operaciones suma y producto por un escalar indicadas a continuación, es espacio vectorial:
$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$
$$\lambda(x, y, z) = (0, \lambda y, \lambda z)$$

SUBESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN

Dado un espacio vectorial U , se dice que un subconjunto S de U es un **subespacio vectorial** si contiene al vector $\vec{0}$ y al efectuar las operaciones de suma y producto por un escalar sobre vectores de S , el resultado permanece en S (se suele decir que S es *cerrado* para la suma y el producto por escalares)

- $\vec{0} \in S$
- Si $\vec{u}, \vec{v} \in S \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in S$
- Si $\vec{u} \in S$ y λ es un escalar $\Rightarrow \lambda\vec{u} \in S$

No haría falta comprobar el resto de propiedades (asociativa, conmutativa, etc) porque si se cumplen en U (por ser espacio vectorial), también se cumplirán en S

SUBESPACIOS VECTORIALES

Ejemplos:

- La recta $y = x$ es un subespacio de \mathbb{R}^2 . Está formado por los vectores de la forma (x, x) . Contiene al vector $(0, 0)$ y es cerrado para la suma y el producto por escalares:
 - $(x, x) + (x', x') = (x + x', x + x')$ también pertenece a la recta
 - $\lambda(x, x) = (\lambda x, \lambda x)$ también pertenece a la recta
- El plano XY es un subespacio de \mathbb{R}^3 . Está formado por vectores de la forma $(x, y, 0)$. Contiene al vector $(0, 0, 0)$ y es cerrado para la suma y el producto por escalares:
 - $(x, y, 0) + (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0)$ también pertenece al plano
 - $\lambda(x, y, 0) = (\lambda x, \lambda y, 0)$ también pertenece al plano

Ejercicios:

- ¿Es un subespacio de \mathbb{R}^2 el conjunto de vectores de la forma $(a, 1)$?
- ¿Forma un subespacio de \mathbb{P}_2 (polinomios de grado ≤ 2) \mathbb{P}_1 (polinomios de grado ≤ 1)?
- En $M_{2 \times 2}$ (matrices reales cuadradas de orden 2), ¿es un subespacio el conjunto de las matrices simétricas?

FORMAS IMPLÍCITA Y PARAMÉTRICA

Geoméricamente, los subespacios vectoriales en \mathbb{R}^2 son rectas, y en \mathbb{R}^3 son planos (el subespacio $\vec{0}$ es un punto). En general, los subespacios en \mathbb{R}^n serán hiperplanos, y podremos describirlos de dos maneras:

- **Forma implícita:** mediante ecuaciones. Los vectores que verifican las ecuaciones son los que pertenecen al subespacio
- **Forma paramétrica:** mediante una expresión con parámetros, que al tomar distintos valores producen todos los vectores del subespacio. *Los parámetros deben ser independientes entre sí*

Nota: La suma del número de ecuaciones implícitas y el número de parámetros (independientes) da n

FORMAS IMPLÍCITA Y PARAMÉTRICA

Paso de la forma implícita a la paramétrica:

Basta considerar las ecuaciones implícitas como un sistema, y resolverlo. La solución general del sistema (que podrá depender de parámetros) será la expresión paramétrica

Paso de la forma paramétrica a la implícita:

Se trata de describir mediante ecuaciones cómo es el vector genérico del subespacio. Ayudará saber cuántas ecuaciones son necesarias para ello (lo veremos en detalle más adelante)

FORMAS IMPLÍCITA Y PARAMÉTRICA

Ejemplos:

- En \mathbb{R}^2 la bisectriz del primer/tercer cuadrante se escribe en implícitas como $\{x = y\}$ y en paramétricas como $\{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$
- La forma implícita del subespacio de \mathbb{R}^3 cuya expresión en paramétricas es $\{(\alpha, \beta, \alpha - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, es $\{z = x - y\}$
- El subespacio cero $(0, 0, 0)$ tiene como forma implícita $\{x = 0, y = 0, z = 0\}$. No tiene forma paramétrica, pues no hay nada que pueda variar
- \mathbb{R}^3 tiene como forma paramétrica $\{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. No tiene forma implícita

Ejercicios:

- Obtener las ecuaciones implícitas del subespacio de \mathbb{R}^3 dado por la forma paramétrica $\{(\lambda, \lambda, 3\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$
- Obtener la forma paramétrica del subespacio de \mathbb{R}^3 dado por las ecuaciones implícitas: $\{x + z = 0, x + 2y + z = 0\}$

INCLUSIÓN DE SUBESPACIOS

DEFINICIÓN

Se dice que el subespacio S está contenido en el subespacio T ($S \subset T$) si todos los elementos de S están también en T

Nota: En cualquier espacio vectorial, el subespacio $\vec{0}$ está contenido en todos los demás subespacios

Ejemplos:

- En \mathbb{R}^3 , sean $S \equiv \{y = 0, z = 0\}$ y $T \equiv \{y = 0\}$. $S \subset T$ pues todo vector que satisfaga las ecuaciones de S también satiface la de T

Nota: Cuantas más ecuaciones implícitas haya, más pequeño será el subespacio

- En \mathbb{R}^3 , sean $S \equiv \{(\lambda, 0, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $T \equiv \{(\alpha, 0, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. $S \subset T$, pues todo vector de la forma $(\lambda, 0, 0)$ también lo es de la forma $(\alpha, 0, \beta)$.

INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS

DEFINICIÓN

La intersección de los subespacios S y T ($S \cap T$) la forman los elementos comunes a S y T

La forma más sencilla de calcular $S \cap T$ es considerar, conjuntamente, las ecuaciones implícitas de S y las de T . Si el sistema formado es "sencillo", puede ya considerarse como la forma implícita de $S \cap T$. En todo caso, resolviendo el sistema obtendremos la forma paramétrica de $S \cap T$

Ejemplo: Sean en \mathbb{R}^3 los subespacios $S \equiv \{z = 0\}$ (plano XY) y $T \equiv \{y = 0\}$ (plano XZ). $S \cap T$ se expresa en implícitas como $\{z = 0, y = 0\}$ y en paramétricas como $\{(\lambda, 0, 0)\}$ (eje X).

TEOREMA

$S \cap T$ también es un subespacio, pues la suma y el producto por un escalar permanece dentro de S y T y, por tanto, dentro de $S \cap T$

SUMA DE SUBESPACIOS

DEFINICIÓN

Dados dos subespacios S y T , el subespacio suma se define como el conjunto de vectores que podamos construir sumando un vector de S y otro de T

Al contrario que la intersección, la suma $S + T$ se calcula más fácilmente usando la forma paramétrica de S y T

Ejemplo: Sean en \mathbb{R}^3 los subespacios $S \equiv \{(\alpha, \alpha + \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ y $T \equiv \{(0, 0, \gamma) : \gamma \in \mathbb{R}\}$. Entonces, $S + T \equiv \{(\alpha, \alpha + \beta, \beta + \gamma) : \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}\}$

TEOREMA

$S + T$ también es un subespacio, pues la suma y el producto por un escalar permanece dentro de $S + T$

OBSERVACIÓN

$S \cap T$ es el mayor subespacio contenido en S y T , y $S + T$ es el menor subespacio que contiene a S y T

DEPENDENCIA LINEAL

DEFINICIÓN

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ se llama **combinación lineal** (C.L.) a cualquier vector de la forma $\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_r \vec{u}_r$, donde $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ son escalares llamados *coeficientes* de la C.L.

OBSERVACIÓN

La C.L. de elementos de un subespacio S está en S

Ejemplo: En \mathbb{R}^2 , dado el subespacio $S \equiv \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, cualquier C.L. de dos elementos de S tendría la forma $\alpha(\lambda, \lambda) + \beta(\mu, \mu) = (\alpha\lambda + \beta\mu, \alpha\lambda + \beta\mu)$, que también es elemento de S .

DEPENDENCIA LINEAL

DEFINICIÓN

Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** (o **ligado**) si al menos uno de ellos es C.L. de los demás, o bien, el vector $\vec{0}$ es C.L. de ellos con algún coeficiente no nulo

Un conjunto de vectores es **linealmente independiente** (o **libre**) si ninguno de ellos es C.L. de los demás, o el vector $\vec{0}$ no se puede expresar como C.L. de ellos a no ser que todos los coeficientes sean nulos

Ejercicio: Comprobar si son linealmente dependientes los siguientes conjuntos de vectores:

- $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (0, 3)$ y $\vec{w} = (2, 5)$ en \mathbb{R}^2
- $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (4, 5)$ en \mathbb{R}^2
- $\vec{u} = (1, 0, 2)$, $\vec{v} = (4, 3, 1)$ y $\vec{w} = (5, 3, 3)$ en \mathbb{R}^3

DEPENDENCIA LINEAL

Propiedades:

- El conjunto formado por un solo vector \vec{u} no nulo es libre
- Dos vectores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ son linealmente dependientes cuando uno es múltiplo de otro
- Todo conjunto que contenga el $\vec{0}$ es ligado
- Si un conjunto es ligado, añadiéndole vectores sigue siendo ligado
- Si un conjunto es libre, quitándole vectores sigue siendo libre
- Si un conjunto es libre, se pueden añadir más vectores libres hasta un cierto número (la **dimensión** del espacio) sin dejar de ser libre
- Si un conjunto es ligado, quitándole vectores que son C.L. de los demás llegará a ser libre

RANGO DE UN CONJUNTO DE VECTORES

DEFINICIÓN

El **rango de un conjunto de vectores** es el número de vectores linealmente independientes que hay en dicho conjunto

Propiedades:

- El rango de un conjunto de vectores es el rango de la matriz que forman (se suelen colocar por columnas)
- Si tenemos n vectores en \mathbb{R}^n , la matriz que forman es cuadrada, por lo que se puede obtener su determinante. Si el determinante es nulo serán dependientes, si el determinante es no nulo serán independientes
- Si al eliminar uno de los vectores de un conjunto se conserva el rango del conjunto, dicho vector depende linealmente de los demás
- Si al añadir un vector a un conjunto se conserva el rango, entonces el nuevo vector depende linealmente de los anteriores

Ejercicio: En \mathbb{R}^3 , determina el rango del conjunto formado por los vectores $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{w} = (1, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$. ¿Hay algún vector dependiente de los demás? En ese caso, ¿cuáles son los independientes?

SISTEMA GENERADOR

DEFINICIÓN

Dados los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de ellos se llama **subespacio generado** (o **engendrado**) por $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$. Se dice que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ constituyen un **sistema generador** (del subespacio generado)

Ejemplos:

- En \mathbb{R}^2 , un vector no nulo \vec{u} genera una recta
- En \mathbb{R}^3 , dos vectores (l.i.) generan un plano. Por ejemplo, $\vec{u} = (1, 0, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, 0)$ generan el plano XY

SISTEMA GENERADOR

Ejercicios:

- ¿Son los vectores $(1, 1)$ y $(2, 2)$ un sistema generador de \mathbb{R}^2 ? En caso negativo, ¿qué espacio generan?
- Halla un sistema generador del subespacio $\{x = y\}$ de \mathbb{R}^3
- ¿Forman los vectores $\vec{u} = (2, 0)$, $\vec{v} = (1, 3)$ y $\vec{w} = (2, 1)$ un sistema generador de \mathbb{R}^2 ?
- En \mathbb{R}^3 ¿pertenece $\vec{u} = (1, 2, 3)$ al subespacio generado por $\vec{v} = (4, 5, 6)$, $\vec{w} = (7, 8, 9)$?

OBSERVACIÓN

Uniando sistemas generadores de los subespacios S y T , se obtiene un sistema generador del subespacio $S + T$

Ejemplo:

Sea $S \equiv \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ (plano XY) \rightarrow sist. gen. $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

Sea $T \equiv \{(\alpha, 0, \gamma) : \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\}$ (plano XZ) \rightarrow sist. gen. $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$

Se puede ver que $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es sistema generador de $S + T$ (plano XY + plano XZ)

DEFINICIÓN

Se llama **base** de un espacio (o subespacio) vectorial a un sistema generador de dicho espacio (o subespacio) en el que todos sus vectores sean linealmente independientes

Propiedades:

- Un espacio (o subespacio) vectorial S tiene infinitas bases
- Una base de S es un sistema generador lo más pequeño posible (minimal) de S
- Una base de S es un conjunto de vectores linealmente independientes lo más grande posible en S
- Dada una base de S , cualquier vector de S se puede obtener, de forma única, como C.L. de los vectores de esa base

Ejemplos:

- La base canónica de \mathbb{R}^3 la forman los vectores $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, que son linealmente independientes y constituyen un sistema generador (cualquier vector de \mathbb{R}^3 se puede escribir como C.L. de ellos)
- Otra base distinta de \mathbb{R}^3 es $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 2, -3)\}$
- Los vectores $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$ no forman base de \mathbb{R}^3 ya que no son linealmente independientes

Ejercicios:

- En \mathbb{R}^3 , sea el subespacio $S \equiv$ plano XY . ¿Forman los vectores $\{(3, 2, 0), (1 - 1, 0)\}$ base de S ? ¿Y los vectores $\{(2, 0, 0), (0, 3, 0), (4, 1, 0)\}$?
- ¿Es $\{(1, 0, 2), (1, 0, -1)\}$ base de \mathbb{R}^3 ?

DIMENSIÓN

DEFINICIÓN

Todas las bases de un espacio (o subespacio) tienen el mismo número de vectores, que nos dice cuál es la **dimensión** del espacio (subespacio)

Propiedades:

- La dimensión de un subespacio en \mathbb{R}^n coincide con el número de parámetros libres en su forma paramétrica
- Sean S y T subespacios. Si $S \subset T \Rightarrow \dim(S) \leq \dim(T)$
- El rango de un conjunto de vectores es igual a la dimensión del subespacio que generan

OBSERVACIÓN

Sea S un subespacio de dimensión m . Entonces:

- si tenemos m vectores linealmente independientes en S , serán sistema generador de S (y por tanto, base)
- si tenemos m vectores que generan S , también serán linealmente independientes (y por tanto, base)

IMPLICITACIÓN

Los conceptos que hemos visto hasta ahora permiten pasar de la forma paramétrica a la forma implícita de un subespacio

Ejemplo: Vamos a hallar la forma implícita del subespacio de \mathbb{R}^3

$$S \equiv \{(\alpha, \beta, 3\alpha - 5\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ parámetros libres} \Rightarrow \dim(S) = 2 \\ 3 \text{ incógnitas en } \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{habrá 1 ecuación implícita}$$

Obtenemos una base de S , que puede ser la formada por los vectores $(1, 0, 3)$ y $(0, 1, -5)$, que forman un sistema generador y son linealmente independientes

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 2$$

Un vector (x, y, z) de \mathbb{R}^3 pertenecerá a S si es C.L., es decir, si el rango sigue siendo 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -5 & z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z - 3x + 5y \end{pmatrix} \Rightarrow z - 3x + 5y = 0 \text{ (ecuación buscada)}$$

IMPLICITACIÓN

Ejercicio: Expresa en forma implícita el subespacio de \mathbb{R}^4
 $S \equiv \{(\alpha, \beta, 2\alpha + \beta, -\alpha + 3\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

COORDENADAS

Como ya hemos visto, dada una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ del espacio (o subespacio) vectorial U , todo vector $\vec{u} \in U$ puede expresarse de forma única como C.L. de dicha base ($\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_r \vec{u}_r$). Los escalares $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ son las **coordenadas** del vector \vec{u} en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$

Ejemplo: En la base canónica de \mathbb{R}^2 ($\{(1, 0), (0, 1)\}$), las coordenadas del vector $\vec{u} = (1, 2)$ son exactamente $(1, 2)$. Si escogemos otra base de \mathbb{R}^2 , por ejemplo $\{(2, 3), (1, -1)\}$, las nuevas coordenadas del vector \vec{u} serán $(\frac{3}{5}, \frac{-1}{5})$

MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

DEFINICIÓN

En un espacio vectorial U , dadas dos bases B y B' , se llama **matriz de cambio de base** (o de cambio de coordenadas) de B a B' a la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base B expresados en función de la base B'

Ejemplo: Consideremos en \mathbb{R}^2 la base $B \equiv \{(2, 3), (1, -1)\}$ y la base canónica $B' \equiv \{(1, 0), (0, 1)\}$

Cambio de base de B a B' :

$$(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$(1, -1) = 1(1, 0) - 1(0, 1)$$

La matriz de cambio de base de B a B' :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Cambio de base de B' a B :

$$(1, 0) = 1/5(2, 3) + 3/5(1, -1)$$

$$(0, 1) = 1/5(2, 3) - 2/5(1, -1)$$

La matriz de cambio de base de B' a B :

$$Q = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

La matriz Q nos permite hallar las coordenadas de $\vec{u} = (1, 2)$ en la base B :

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

Podemos volver a las coordenadas en la base B' usando la matriz P :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Toda matriz de cambio de base es cuadrada $n \times n$, siendo n es la dimensión del espacio al que se refieren las bases
- Toda matriz de cambio de base es invertible, es decir, tiene determinante no nulo
- P y Q son inversas entre sí: $Q = P^{-1}$ y $P = Q^{-1}$
- La matriz de cambio de una base B a la misma base B es la matriz identidad

SUMA DIRECTA

OBSERVACIÓN

Sean S y T dos subespacios. Hemos visto que uniendo un sistema generador de S con uno de T se obtiene un sistema generador de $S + T$. Sin embargo, no siempre uniendo una base de S con una base de T se obtiene una base de $S + T$

En general, se cumplirá:

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

DEFINICIÓN

Se dice que la suma de S y T es **directa** ($S \oplus T$) si su intersección ($S \cap T$) es solamente el vector $\vec{0}$. Por tanto:

$$\dim(S \oplus T) = \dim(S) + \dim(T)$$

En estas condiciones, al unir una base de S y una base de T se obtiene una base de $S \oplus T$

SUBESPACIO SUPLEMENTARIO

DEFINICIÓN

Si dos subespacios S y T del espacio vectorial U están en suma directa ($S \cap T = \vec{0}$) y además su suma es igual al espacio total ($S \oplus T = U$), se dice que S y T son **suplementarios** (o **complementarios**)

Nota: El único suplementario del $\vec{0}$ es el espacio total, y el único suplementario del espacio total es el $\vec{0}$

Procedimiento para hallar un subespacio suplementario:

Dada una base del subespacio S , la extendemos añadiendo vectores (linealmente independientes de los anteriores) hasta formar una base del espacio total U . Para ello podemos elegir cualquier vector, por ejemplo, los de la base canónica de U . Los vectores que hemos añadido a los de la base de S forman una **base de un suplementario** de S (hay infinitos suplementarios)

SUBESPACIO SUPLEMENTARIO

Ejemplo: En \mathbb{R}^4 , sea S un subespacio cuya base viene dada por los vectores $\vec{u}_1 = (1, 0, 2, 0)$ y $\vec{u}_2 = (3, 0, 0, 0)$. Para hallar un suplementario de S , consideramos los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^4 , $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Podemos añadir a $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ los vectores $(0, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$, ya que los 4 forman un conjunto linealmente independiente (rango 4). Por tanto, $\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ serán una base de un suplementario de S

Ejercicio: Dado el subespacio S de \mathbb{R}^4 definido por las ecuaciones implícitas $\{x + y = 0, t = 0\}$, obtén un subespacio complementario de S