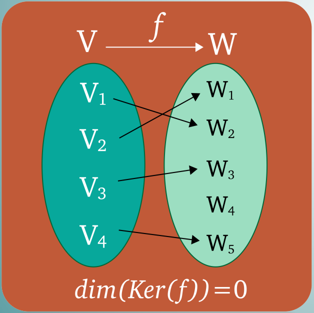
Álgebra

Tema 4. Espacio Euclídeo



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

PRODUCTO ESCALAR (I)

En este tema, trataremos de llevar a los espacios vectoriales (tema anterior) nociones geométricas como ortogonalidad, ángulo, longitud, distancia, área, etc. Todo esto se consigue al introducir un **producto escalar**, que es una operación entre dos *vectores* que da como resultado un *escalar*

Ejemplo: Como sabemos, el producto escalar usual de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, en $\mathbb{R}^n$, se define como:

$$(u_1, u_2, ..., u_n) \cdot (v_1, v_2, ..., v_n) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n$$

En $\mathbb{R}^2$, por tanto, tendríamos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2 \text{ (escalar)}$$

El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede denotar como $\vec{u} \cdot \vec{v}$ o también como $< \vec{u}, \vec{v} >$

PRODUCTO ESCALAR (II)

Propiedades:

- Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- Reubicación del escalar: $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$, siendo α un escalar
- Definido positivo: $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$. Sólo se da $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{v} = \vec{0}$

Un **espacio euclídeo** es cualquier espacio vectorial dotado de un producto escalar que cumpla las propiedades anteriores (no tiene porqué ser el producto escalar usual)

PRODUCTO ESCALAR (III)

Ejemplos:

- Un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ que cumple las propiedades anteriores podría ser: $(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3$
- En el espacio $\mathbb{M}_2$ (matrices 2×2 con términos reales), el producto ordinario de matrices no es un producto escalar, pues el resultado no es un escalar (es una matriz). Además, no es conmutativo, etc.
- En el espacio vectorial $\mathbb{C}[a, b]$ de las funciones continuas de una variable en el intervalo $[a, b]$ podemos definir el siguiente producto escalar que cumple todas las propiedades: $f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Ejercicio: Razona si en $\mathbb{P}_2 \equiv \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ son productos escalares los siguientes:

- El producto ordinario de polinomios
- $(ax^2, bx, c) \cdot (a'x^2, b'x, c') = aa' + bb' + cc'$

NORMA O MÓDULO

La norma o módulo de un vector $\vec{v}$ es un escalar, y se calcula como:

$$|\ \vec{v}\ | = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual, la norma del vector $(4,3)$ es $\sqrt{(4,3)\cdot(4,3)} = \sqrt{25} = 5$

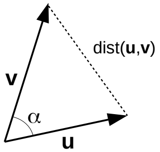
Propiedades:

- $|\vec{v}| \geq 0$. El único vector de módulo cero es $\vec{0}$
- $|\vec{v}| = |-\vec{v}|$
- $|\ \alpha\vec{v}\ | = |\alpha|\ |\ \vec{v}\ |$, siendo $|\alpha|$ el valor absoluto del escalar α
- Para dos vectores cualesquiera $\vec{u}, \vec{v}$ siempre se cumplen:
  - Desigualdad triangular: $|\ \vec{u}+\vec{v}\ | \leq |\ \vec{u}\ | + |\ \vec{v}\ |$
  - Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\ \vec{u}\cdot\vec{v}\ | \leq |\ \vec{u}\ ||\ \vec{v}\ |$. La igualdad sólo se cumple si $\vec{u}$ es múltiplo de $\vec{v}$

DISTANCIA Y ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES (I)

La **distancia** entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ es la norma del vector diferencia entre ambos:

$$dist(\vec{u}, \vec{v}) = \mid \vec{u} - \vec{v} \mid$$



En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual, se cumple:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mid \vec{u} \mid\mid \vec{v} \mid cos(\alpha)$$

siendo α el ángulo que forman los dos vectores

Este concepto de **ángulo** entre vectores es aplicable en cualquier espacio euclídeo:

$$\alpha = arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\mid \vec{u} \mid\mid \vec{v} \mid}$$

DISTANCIA Y ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES (II)

Ejercicio: Calcular sus módulos y la distancia y ángulo entre vectores para los siguientes casos:

- En $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, para los vectores $\vec{u} = (1, 0, 0)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$
- En $\mathbb{C}[0, 1]$ (funciones continuas de una variable en el intervalo $[0, 1]$), con el producto escalar definido como $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, para los "vectores" $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$

ORTOGONALIDAD

Dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ son ortogonales si su producto escalar es cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Un **conjunto** de vectores es **ortogonal** si cada vector es ortogonal a todos los demás

Ejemplo: En la base canónica de $\mathbb{R}^3$, todos los vectores son ortogonales entre sí

$$(1,0,0) \cdot (0,1,0) = 0$$
$$(1,0,0) \cdot (0,0,1) = 0$$
$$(0,1,0) \cdot (0,0,1) = 0$$

TEOREMA

Todo conjunto ortogonal es linealmente independiente

Nota: Un conjunto linealmente independiente no tiene porqué ser ortogonal

ORTONORMALIDAD

Normalizar un vector $\vec{v}$ es reducirlo a otro vector equivalente de norma 1, lo cual se consigue multiplicando $\vec{v}$ por $\frac{1}{|\vec{v}|}$

Ejemplo: Hemos visto que el vector $(4, 3)$ tiene norma 5. El vector $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, efectivamente, tiene norma 1

Se llama **conjunto ortonormal** a un conjunto *ortogonal* cuyos vectores tienen norma 1. Por lo tanto, sus elementos $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$ cumplirán: $\vec{v_i} \cdot \vec{v_j} = 0$ y $\vec{v_i} \cdot \vec{v_i} = 1, \;\; \forall i, j = \{1, ..., n\}$

Nota: Se llama **matriz ortogonal** a una matriz cuadrada de orden n cuyas columnas son vectores *ortonormales* de $\mathbb{R}^n$, considerando el producto escalar usual

Ejercicio: Comprueba si son ortonormales los siguientes conjuntos. En caso de ser sólo ortogonales, ortonormalízalos.

- La base canónica de $\mathbb{R}^3$
- $\{(1, 2, 0), (4, -2, 0)\}$

SUBESPACIO ORTOGONAL

Un vector $\vec{v}$ es ortogonal a un subespacio S ($\vec{v} \perp S$) si $\vec{v}$ es ortogonal a todos los vectores de S (basta con que sea ortogonal a los vectores de una base de S)

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, el vector $(0, 0, 1)$ es ortogonal al plano XY

SUBESPACIO ORTOGONAL

Un subespacio S es ortogonal a otro subespacio T ($S \perp T$) si todo vector de S es ortogonal a todo vector de T, es decir:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{u} \in S, \ \forall \vec{v} \in T$$

Basta con que los vectores de una base de S sean ortogonales a los vectores de una base de T

TEOREMA

Si S y T son ortogonales (es decir, $T = S^{\perp}$), su intersección es el vector $\{\vec{0}\} \Rightarrow S$ y $S^{\perp}$ serán subespacios suplementarios (complementarios), y estarán, por tanto, en suma directa ($S \oplus S^{\perp} = U$, siendo U el espacio total)

SUBESPACIO COMPLEMENTARIO ORTOGONAL

Dado un subespacio S, su complementario ortogonal (o simplemente ortogonal, denotado por $S^{\perp}$) es el **único** subespacio que cumple:

- $S^{\perp}$ es ortogonal a S
- $\boxed{dim S + dim S^{\perp} = n}$ donde n es la dimensión del espacio total

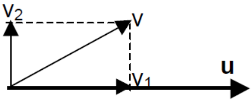
Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, el subespacio formado por el plano XY tiene infinitos complementarios (toda recta que pase por el origen y no esté contenida en el propio plano), pero sólo uno de ellos es ortogonal, el eje Z

El subespacio complementario ortogonal al subespacio S se construye buscando los vectores ortogonales a una base de S

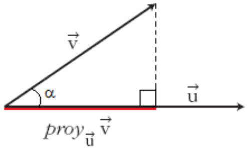
Ejercicio: Obtén una base del complementario ortogonal del subespacio $S \equiv \{(a, 0, 2a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ en $\mathbb{R}^4$

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE OTRO

Para proyectar un vector $\vec{v}$ sobre otro vector $\vec{u}$, podemos aprovechar que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, con $\vec{v}_1$ en la dirección de $\vec{u}$ y $\vec{v}_2$ en la dirección ortogonal (perpendicular) a $\vec{u}$, por lo que:



$$\vec{v}_1 = proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$$

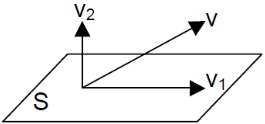


Ejercicios:

- Demuestra que $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$
- En $\mathbb{R}^2$, proyecta el vector $(1, 2)$ sobre el $(3, 1)$

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE UN SUBESPACIO

Dado un vector $\vec{v}$ y un subespacio S de $\mathbb{R}^2$ (un plano), $\vec{v}$ se puede descomponer de manera única como $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, con $\vec{v}_1 \in S$ y $\vec{v}_2$ en la dirección ortogonal a S. Es decir, $\vec{v} = proy_S(\vec{v}) + proy_{S^\perp}(\vec{v})$



En $\mathbb{R}^n$, la fórmula de la proyección será:

$$proy_S(\vec{v}) = proy_{\vec{u}_1}(\vec{v}) + ... + proy_{\vec{u}_n}(\vec{v})$$

$$proy_S(\vec{v}) = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{v}}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 + ... + \frac{\vec{u}_n \cdot \vec{v}}{\vec{u}_n \cdot \vec{u}_n}\vec{u}_n$$

donde $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ han de formar una **base ortogonal** de S

Ejercicio: En $\mathbb{R}^3$, proyecta el vector $(3, 2, 2)$ sobre el subespacio S generado por los vectores $(2, 0, 1)$ y $(0, 3, 0)$

CÁLCULO DE BASES ORTOGONALES: MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT (I)

Acabamos de ver que para calcular la proyección de un vector sobre un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ se requiere una **base ortogonal** de S. El método de **Gram-Schmidt** permite obtener una base ortogonal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ de S partiendo de una base cualquiera $\{\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, ..., \vec{u'}_n\}$

1. Como primer vector tomamos el propio $\vec{u'}_1$: $\vec{u}_1 = \vec{u'}_1$
2. Para contruir el segundo vector, tomamos $\vec{u'}_2$ y lo proyectamos sobre $\vec{u}_1$, quedándonos con la componente ortogonal a $\vec{u}_1$:
$\vec{u}_2 = \vec{u'}_2 - proy_{\vec{u}_1}(\vec{u'}_2)$
3. Para construir el tercer vector, tomamos $\vec{u'}_3$ y lo proyectamos sobre $\vec{u}_1$ y sobre $\vec{u}_2$, quedándonos con las correspondientes componentes ortogonales: $\vec{u}_3 = \vec{u'}_3 - proy_{\vec{u}_1}(\vec{u'}_3) - proy_{\vec{u}_2}(\vec{u'}_3)$
4. etc.

Finalmente, si quisiéramos obtener una base no sólo ortogonal, si no también **ortonormal**, habrá que normalizar los vectores $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$

CÁLCULO DE BASES ORTOGONALES: MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT (II)

Ejemplo: Obtén una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de la siguiente base: $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$

$$\vec{u}_1 = \vec{u'}_1 = (1,1,0)$$
$$\vec{u}_2 = \vec{u'}_2 - proy_{\vec{u}_1}(\vec{u'}_2) = \vec{u'}_2 - \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u'}_2}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$
$$\vec{u}_3 = \vec{u'}_3 - proy_{\vec{u}_1}(\vec{u'}_3) - proy_{\vec{u}_2}(\vec{u'}_3) = \vec{u'}_3 - \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u'}_3}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{u'}_3}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 =$$
$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Base ortonormal:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2), \frac{2}{\sqrt{12}}(1,-1,1)\right\}$$

Ejercicio: Obtén una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ a partir de la formada por los vectores $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$ y $(-1,1,1)$

MATRIZ DE PROYECCIÓN (I)

La **matriz de proyección** permite obtener la proyección de un vector cualquiera $\vec{v}$ sobre un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ sin necesidad de hallar una base ortogonal de S

$$proy_S(\vec{v}) = P_S\vec{v}$$

Se calcula como $\boxed{P_S = A(A^tA)^{-1}A^t}$, donde A es la matriz que contiene una **base** de S en sus columnas (A no tiene porqué ser cuadrada)

Nota: P_S es única y **no depende de la base de partida**. Esta matriz es especialmente útil si tenemos que proyectar varios vectores sobre un mismo subespacio

Ejercicio: En $\mathbb{R}^3$, proyecta el vector $(3, 2, 2)$ sobre el subespacio $S \equiv < (2, 0, 1), (0, 3, 0) >$ haciendo uso de la matriz de proyección

MATRIZ DE PROYECCIÓN (II)

Toda matriz de proyección sobre un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ es:

- Cuadrada de orden n
- Simétrica
- Idempotente ($P_S^2 = P_S$)

Y además, toda matriz que cumpla las tres propiedades anteriores, resulta ser matriz de proyección del subespacio de $\mathbb{R}^n$ que generan sus columnas

Ejemplo: La matriz P_S cumple las tres propiedades anteriores (comprueba la última). Es la matriz de proyección de un subespacio S cuya base es $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$

$$P_S = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE PROYECCIÓN (III)

Ejercicio: Razona si la siguiente matriz puede ser una matriz de proyección. En tal caso, ¿a qué subespacio correspondería?

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN

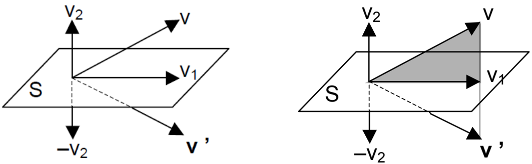
Si tenemos que proyectar un vector $\vec{v}$ sobre un subespacio S de $\mathbb{R}^n$, y no disponemos de una base ortogonal de S, tendríamos dos opciones:

- Calcular una base ortogonal por Gram-Schmidt ($\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$) y utilizar la fórmula de la proyección: $proy_S(\vec{v}) = proy_{\vec{u}_1}(\vec{v}) + ... + proy_{\vec{u}_n}(\vec{v})$
- Hallar la matriz de proyección P_S y utilizarla para proyectar: $proy_S(\vec{v}) = P_S\vec{v}$

CÁLCULO DE ÁREAS

El vector simétrico a $\vec{v}$ respecto de S ($\vec{v'}$) será:

$$\vec{v'} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = proy_S(\vec{v}) - proy_{S^\perp}(\vec{v})$$



Puesto que en un espacio euclídeo podemos "medir" distancias y longitudes (utilizando la noción de módulo de un vector), podríamos también aplicar las fórmulas geométricas usuales para calcular áreas en $\mathbb{R}^2$

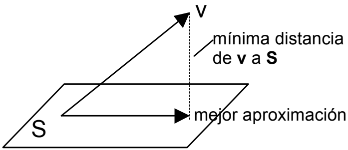
Ejercicio: Dado el subespacio S de $\mathbb{R}^3$ generado por $\vec{u}_1 = (2, 0, 1)$ y $\vec{u}_2 = (0, 3, 0)$, halla el vector simétrico $\vec{v'}$ de $\vec{v} = (3, 2, 2)$. Calcula el área del triángulo formado por $\vec{v}$ y $\vec{v'}$

Pista: El área que nos piden será 2 veces la sombreada en gris

Aproximación de una función trascendentes por un polinomio

En un espacio euclídeo, dado un vector $\vec{v}$ y un subespacio S, de entre todos los vectores de S hay uno que es el más próximo a $\vec{v}$ (mejor aproximación a $\vec{v}$ en S), y es precisamente la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre S: $proy_S(\vec{v})$. Para cualquier otro vector $\vec{w} \in S$ la distancia a $\vec{v}$ es mayor, es decir:

$$|proy_S(\vec{v}) - \vec{v}| < |\vec{w} - \vec{v}|, \quad \forall\, \vec{w} \in S,\ \vec{w} \neq proy_S(\vec{v})$$



Partiendo de esta idea, y con el fin de facilitar los cálculos en los que intervengan funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales... es posible sustituir estas funciones por un polinomio (más manejable) que se aproxime a ellas en un cierto intervalo $[a, b]$. Veamos un ejemplo.

Aproximación de una función trascendente por un polinomio (II)

Ejemplo: Podríamos aproximar la función $f(x) = e^x$ por un polinomio $\in \mathbb{P}_2$ (grado $\leq$ 2) en el intervalo $[0, 1]$, considerando el producto escalar $f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx$

La mejor aproximación a f en $\mathbb{P}_2$ será $proy_{\mathbb{P}_2}(f)$. Por tanto, necesitamos en primer lugar hallar una base ortogonal de $\mathbb{P}_2$ para a continuación aplicar la formula de la proyección que hemos visto. Para obtener una base ortogonal de $\mathbb{P}_2$ podemos partir de su base canónica ($\{1, x, x^2\}$) y aplicar Gram-Schmidt*:

$$\vec{u}_1 = \vec{u'}_1 = 1$$
$$\vec{u}_2 = \vec{u'}_2 - proy_{\vec{u}_1}(\vec{u'}_2) = \vec{u'}_2 - \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u'}_2}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 = x - 1/2$$
$$\vec{u}_3 = \vec{u'}_3 - proy_{\vec{u}_1}(\vec{u'}_3) - proy_{\vec{u}_2}(\vec{u'}_3) = \vec{u'}_3 - \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u'}_3}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{u'}_3}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 =$$
$$= x^2 - x + 1/6$$

*hay que hacer uso del producto escalar dado, es decir, hay que calcular las integrales correspondientes

Ya tenemos una base ortogonal de $\mathbb{P}_2$: $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}\}$

Aproximación de una función trascendente por un polinomio (III)

Ahora ya podemos aplicar la fórmula de la proyección. El polinomio $p(x)$ que buscamos será:

$$p(x) = proy_{\mathbb{P}_2}(f) = \frac{\vec{u}_1 \cdot f}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 + \frac{\vec{u}_2 \cdot f}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 + \frac{\vec{u}_3 \cdot f}{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3}\vec{u}_3$$

Haciendo uso del producto escalar dado, tendríamos:

$$\vec{u}_1 \cdot f = \int_0^1 1\, e^x dx = e - 1$$

$$\vec{u}_2 \cdot f = \int_0^1 (x - \tfrac{1}{2})\, e^x dx = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}e$$

(hay que hacer una integral por partes: $u = x$, $dv = e^x$)

etc.

Haciendo todos los cálculos llegamos a:

$$p(x) = proy_{P_2}(f) = 0.84x^2 + 0.85x + 1.01 \simeq f(x) = e^x$$

Por ejemplo, en $x = 0.5$ tendríamos:

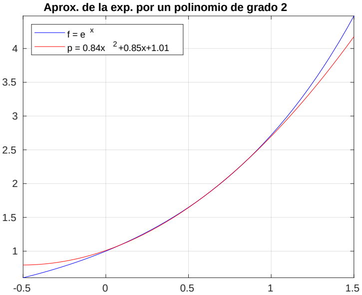
$$p(0.5) = 0.84 \cdot 0.5^2 + 0.85 \cdot 0.5 + 1.01 = 1.6450$$

$$f(0.5) = e^{0.5} = 1.6487$$

Aproximación de una función trascendente por un polinomio (IV)

Podemos ver, con ayuda de MATLAB, cuán buena es nuestra aproximación:

```
syms x  % variable simbólica
f = exp(x);  % función a aproximar
p = 0.84*x^2 + 0.85*x +1.01;  % polinomio aproximador
fplot(f, [-0.5, 1.5], 'b')  % dibujo función
hold on
fplot(p, [-0.5, 1.5], 'r')  % dibujo polinomio
title('Aprox. de la exp. por un polinomio de grado 2')
legend('f = e^x', 'p = 0.84x^2+0.85x+1.01',...
    'Location', 'northwest')
grid on
```



Se puede estimar el error cuadrático medio de nuestra aproximación en el intervalo $[0, 1]$ como:

$$error = |proy_{\mathbb{P}^2}(f) - f|^2 = \int_0^1 [p(x) - f(x)]^2 dx = 0.0000386$$

```
double(int((p-f)^2, 0, 1))  % error cuadrático
```

Solución aproximada de sistemas incompatibles (I)

Método de mínimos cuadrados

Un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si existe $\vec{x}$ tal que $\vec{b}$ es C.L. de los vectores (columnas) de A, es decir, si $\vec{b}$ pertenece al subespacio generado por las columnas de A (llamémosle S). Que un sistema sea incompatible quiere decir que $\vec{b}$ no pertenece al subespacio S. En esta situación, podemos sustituir $\vec{b}$ por otro vector $\vec{c}$ que sí pertenezca al subespacio S. Lógicamente, $\vec{c}$ ha de ser la mejor aproximación de $\vec{b}$ en S. En definitiva, se trata de resolver el nuevo sistema compatible

$$A\vec{x} = \vec{c} = proy_S(\vec{b})$$

donde S es el subespacio generado por las columnas de A

$\vec{c}$ cumple aproximadamente las ecuaciones del sistema y el error cuadrático cometido (que es lo que trata de minimizar este método) será:

$$error = \left| \vec{c} - \vec{b} \right|^2$$

SOLUCIÓN APROXIMADA DE SISTEMAS INCOMPATIBLES (II)

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema por mínimos cuadrados y estima el error cuadrático cometido:

$$\begin{cases} 2x+3y &= 0 \\ x &= 1 \\ y &= 1 \end{cases} \qquad A\vec{x}=\vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{b}=(0,1,1)$ no pertenece al subespacio S generado por los vectores $(2,1,0)$ y $(3,0,1)$, por lo que tendremos que buscar nuestro $\vec{c}$ adecuado. Una base de S es la formada por los vectores $(2,1,0)$ y $(3,0,1)$, puesto que son L.I. Con esta base, podemos calcular la matriz de proyección P_S, y a partir de ella, el vector $\vec{c}$:

$$\vec{c} = proy_S(\vec{b}) = P_s\vec{b} = A(A^tA)^{-1}A^t\vec{b} = \begin{pmatrix} 5/14 \\ 2/7 \\ -1/14 \end{pmatrix}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El nuevo sistema $A\vec{x}=\vec{c}$ es compatible determinado, y su solución es $x=2/7, y=-1/14$ (puedes comprobarlo con MATLAB). El error cuadrático cometido será:

$$error = \left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2 = \left|\left(\frac{5}{14},\frac{2}{7},\frac{-1}{14}\right)-(0,1,1)\right|^2 \simeq 1.79$$

SOLUCIÓN APROXIMADA DE SISTEMAS INCOMPATIBLES (III)

OBSERVACIÓN

Dado un sistema de ecuaciones incompatible $A\vec{x} = \vec{b}$, si las columnas de A son linealmente independientes, la solución aproximada por mínimos cuadrados será única, y se puede obtener como:

$$\vec{x} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{b}$$

Ejercicios:

- Demuestra la observación anterior
- Resuelve, por mínimos cuadrados, el siguiente sistema incompatible. ¿Cuál es el error cuadrático que se comete? (puedes utilizar MATLAB)

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -x + 4y & = & 15 \\ y & = & 6 \\ -y & = & 4 \\ x - 2y & = & -5 \end{array} \right.$$

Ajuste de una nube de puntos (I)

Dada una nube de puntos (por ejemplo, un conjunto de puntos obtenidos mediante resultados experimentales), podemos buscar una función (recta, parábola, etc.) que mejor se ajuste a dichos puntos. La idea es plantear el sistema incompatible que resulte de forzar a que la función aproximadora/interpoladora pase por todos los puntos de la nube, y resolverlo mediante mínimos cuadrados

Ejemplo: Busca la recta que mejor se ajuste a los puntos $(1,2)$, $(2,3)$ y $(3,5)$
La ecuación de una recta es de la forma $y = mx + n$. Si pasara por los tres puntos, debería cumplirse:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2 & = m\cdot 1 + n \\ 3 & = m\cdot 2 + n \\ 5 & = m\cdot 3 + n \end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}, \quad \text{S.I.}$$

Como las columnas de A son L.I. se puede hallar la solución aproximada (por mín. cuad.):

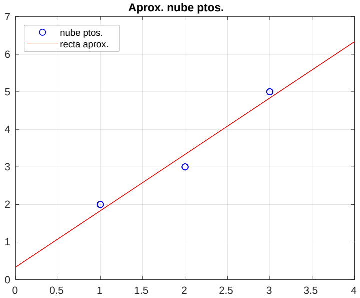
$$\vec{x} = (A^tA)^{-1}A^t\vec{b} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ la recta que buscamos es } y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$$

AJUSTE DE UNA NUBE DE PUNTOS (II)

Podemos ver, con ayuda de MATLAB, cuán buena es nuestra aproximación

```
x0 = [1 2 3];  % x nube
y0 = [2 3 5];  % y nube
plot(x0, y0, 'ob')  % dibujo nube

syms x  % variable simbólica
y = 3/2*x + 1/3;  % recta aproximadora
hold on
fplot(y, [0 4], 'r')  % dibujo recta
title('Aprox. nube ptos.')
legend('nube ptos.', 'recta aprox.',...
    'Location', 'northwest')
grid on
```



El error cuadrático cometido será:

$$error = \left|A\vec{x} - \vec{b}\right|^2 = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right|^2 \simeq 0.167$$

```
double(sum((y0 - subs(y, x0)).^2))  % error cuadrático
```

Si en lugar de una recta hubiésemos escogido como función aproximadora una parábola ($y = mx^2 + nx + p$), el error sería menor. A medida que aumenta el grado del polinomio interpolador, disminuye el error cometido en la aproximación