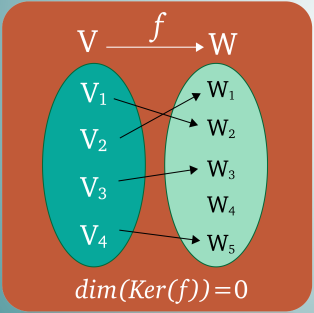
Álgebra

Tema 5. Aplicaciones lineales



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

CONTENIDOS

Aplicación

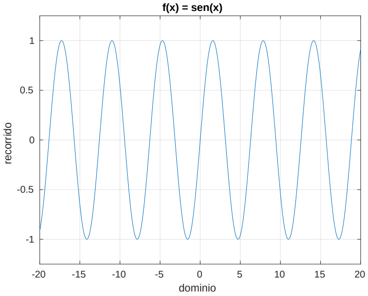
Una aplicación f entre dos conjuntos A y B es una regla que permite asignar a cada elemento de A, uno (y sólo uno) de B

$$f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B} \qquad\qquad A \xrightarrow{f} B$$

Si f asigna al elemento $a \in A$ el elemento $b \in B$ se dice que b es la imagen de a, y se denota $f(a) = b$

Podríamos pensar en funciones matemáticas como aplicaciones en las que el dominio sería el conjunto inicial A y el rango (o recorrido) el conjunto final B. Por ejemplo, la función $f(x) = sen(x)$ podría verse como una aplicación tal que:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\rightsquigarrow sen(x) \end{aligned}$$



En este tema, trabajaremos con aplicaciones entre (sub)espacios vectoriales

Aplicación lineal (u homomorfismo)

Dados dos (sub)espacios vectoriales V y W, una aplicación $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ es lineal si y sólo si:

- $f(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = f(\vec{v_1}) + f(\vec{v_2}), \;\; \forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$
- $f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v}), \;\; \forall \vec{v} \in V, \alpha$ escalar
- $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

Ejercicio: Comprueba si son lineales las siguientes aplicaciones:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y, z) \rightsquigarrow (2x, z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$
  $(x, y) \rightsquigarrow (x, y, x + y, 1)$

Algunas aplicaciones lineales importantes:

- Identidad

  $id : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$

  $\vec{v} \rightsquigarrow \vec{v}$

- Nula

  $n : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$

  $\vec{v} \rightsquigarrow \vec{0}$

- Giros

  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

  $(x, y) \rightsquigarrow (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)$

  Giro de 45° (en sentido antihorario) en el plano $\mathbb{R}^2$

- Reflexiones o simetrías

  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

  $(x, y, z) \rightsquigarrow (x, -y, z)$

  Simetría en el espacio $\mathbb{R}^3$ respecto del plano XZ

- Homotecias

  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

  $(x, y) \rightsquigarrow (1.10x, 1.10y)$

  Dilatación de un $10\,\%$ en el plano

- Proyecciones

  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

  $(x, y, z) \rightsquigarrow (x, 0, z)$

  Proyección en el espacio $\mathbb{R}^3$ sobre el plano XZ

NÚCLEO

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$, lineal

$$Ker(f) = \left\{ \vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_W \right\}$$

Nota: Como mínimo, $Ker(f)$ estará compuesto por $\vec{0}_V$

Ejemplo: Calcula el núcleo de las siguientes aplicaciones lineales:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y, z) \rightsquigarrow (x + y + 2z, 3x + 3y + 6z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (2x - 3y, -x - y)$

IMAGEN

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal, y S un subespacio de V. La imagen de S ($Im(S)$) será un subespacio de W formado por las imágenes de todos los elementos de S

Propiedades:

- $\boxed{dim(Im(S)) \leq dim(S)}$
  Nota: Lógicamente, también se cumplirá que $dim(S) \leq dim(V)$ y que $dim(Im(S)) \leq dim(W)$
  - Los subespacios de $\mathbb{R}^n$ son rectas, planos, etc. Bajo una aplicación lineal, una recta no puede transformarse en un plano. En cambio, un plano podrá transformarse en otro plano, en una recta o en un punto ($\{\vec{0}\}$)
- La imagen de un sistema generador de S es un sistema generador de $Im(S)$
  Nota: Esta es la propiedad que usaremos en la práctica para calcular la imagen de una aplicación
- La imagen de un conjunto L.D. es otro conjunto L.D. La imagen de un conjunto L.I. no tiene porqué ser L.I. (por ejemplo, no está asegurado que la imagen de una base de S sea base de $Im(f)$)
  Nota: Esto sólo ocurrirá para aplicaciones inyectivas

TEOREMA

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal. Las dimensiones del núcleo y la imagen se relacionan de acuerdo con la siguiente fórmula:

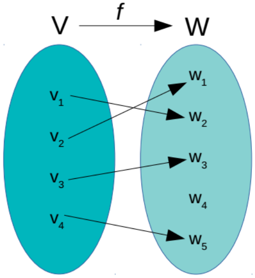
$$\boxed{dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(V)}$$

Ejemplo: Calcula la imagen de las siguientes aplicaciones lineales y comprueba que se cumple la relación de dimensiones entre núcleo e imagen:

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y, z) \rightsquigarrow (x + y + 2z, 3x + 3y + 6z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (2x - 3y, -x - y)$

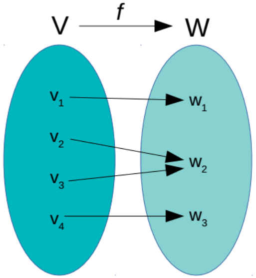
Una aplicación lineal $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ puede ser:

Inyectiva $\Leftrightarrow$ no hay dos elementos de V (antecedentes) que tengan imágenes iguales en W



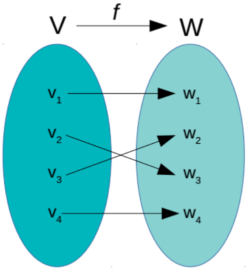
$$dim(Ker(f)) = 0$$

Suprayectiva (o sobreyectiva) $\Leftrightarrow$ todos los elementos de W tienen antecedente



$$dim(Im(f)) = dim(W)$$

Biyectiva $\Leftrightarrow$ a cada elemento de V le corresponde uno de W, y viceversa



inyectiva + suprayectiva

Nota: Si $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ es biyectiva, existe su inversa $f^{-1} : \mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{V}$ que deshace lo hecho por f

Ejemplos: Clasifica las siguientes aplicaciones lineales como inyectivas/suprayectivas/biyectivas:

- La aplicación del conjunto de la población española mayor de edad en el conjunto de los números naturales, que asigna a cada ciudadano su número de DNI
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$
  $x \rightsquigarrow x^2$
- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y, z) \rightsquigarrow (x + y + 2z, 3x + 3y + 6z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (2x - 3y, -x - y)$
- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

Matriz asociada a una aplicación

Toda aplicación lineal se puede identificar con una matriz, y toda matriz representa una aplicación lineal. Dada $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ lineal, se llama **matriz asociada a** f (en bases canónicas) a la matriz A que contiene en sus columnas las imágenes de la base canónica de V

Propiedades:

1. La matriz de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es de tamaño $m \times n$
2. $rg(f) = dim(Im(f)) = rg(A)$
3. A puede utilizarse para calcular la imagen de cualquier vector del (sub)espacio inicial
   Por ejemplo, si multiplicamos A por el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (en columna), obtendremos el vector $f(\vec{v}) \in \mathbb{R}^m$ (también en columna). Es decir, $\boxed{A\vec{v} = f(\vec{v})}$

Ejemplo: Calcula la matriz asociada de la siguiente aplicación y utilízala para hallar el rango de f y la imagen del vector $(2, 3)$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (x + y, x - y, 0)$$

Ecuación de una aplicación

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con matriz asociada $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$.

Denotemos por $(x_1, ..., x_n)$ un vector del conjunto inicial $\mathbb{R}^n$ y por $(y_1, ..., y_m)$ su imagen en $\mathbb{R}^m$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

que también se puede escribir como un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} y_1 = a_{1,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{1,n} \cdot x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{m,n} \cdot x_n \end{array}\right\}$$

Ejemplo: ¿Cuál será la ecuación de la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada es $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$?

Cálculo del núcleo y la imagen de una aplicación lineal mediante su matriz asociada

Núcleo:

Los vectores del núcleo son los $\vec{v} \in V \mid A\vec{v} = \vec{0_W}$. Por tanto, basta con plantear el siguiente sistema:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

si es compatible determinado $\Rightarrow Ker(f) = \{\vec{0}\}$
si es compatible indeterminado $\Rightarrow Ker(f)$ se expresará en forma paramétrica

Imagen:

$Im(f)$ es el espacio generado por las columnas de A. Dichas columnas no tienen porqué formar una base de $Im(f)$. Para obtener dicha base habrá que suprimir las columnas que sean L.D. (por ejem. escalonando la matriz y quedándonos con las columnas pivotales)

Ejemplo: Calcula una base del núcleo y otra de la imagen de la aplicación lineal definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

La matriz asociada con la que hemos trabajado hasta ahora es la matriz llamada **estándar** o **en bases canónicas** (si no se afirma lo contrario, se tratará siempre de la matriz estándar). Sin embargo, si fijamos en los espacios inicial y final otras bases distintas de las canónicas, habrá que encontrar una nueva matriz adecuada a estas bases

MATRIZ DE UNA APLICACIÓN EN BASES CUALESQUIERA

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, B una base cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y B' una base cualquiera de $\mathbb{R}^m$. Entonces, se define la matriz de f en bases B y B' como la matriz M que contiene en sus columnas las imágenes de los vectores de B, expresadas en coordenadas respecto de B'

Ejemplo: Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (x + y, x - y, 0) \end{aligned}$$

$B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcula M, la matriz asociada de f en las bases B y B'

Propiedades de M:

Al igual que para la matriz estándar (A)

1. La matriz de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en bases cualesquiera (M) es de tamaño $m \times n$
2. $rg(f) = dim(Im(f)) = rg(M)$
3. $M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$,
   siendo $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ las coordenadas de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ en la base B y $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ las coordenadas de su imagen $f(\vec{x})$ en la base B'

Ejemplo: Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (x + y, x - y, 0) \end{aligned}$$

halla la imagen del vector $(5, 3)$ y comprueba que se cumple la última propiedad, considerando la matriz M que ya has calculado

Relación entre la matriz estándar y la matriz en bases cualesquiera

Sea $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ una aplicación lineal con matriz asociada A en bases canónicas. Sea B una base cualquiera de V, y B' una base cualquiera de W. Sean además:

- P: matriz de cambio de base de B a la b. canónica, en V (y por tanto, P^{-1} la matriz de paso de la b. canónica a B)
- Q: matriz de cambio de base de B' a la b. canónica, en W (y por tanto, Q^{-1} la matriz de paso de la b. canónica a B')

$$V \xrightarrow{\quad f \quad} W$$

$$\begin{tikzcd}
\text{b. canónica} \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & \text{b. canónica} \arrow[d, shift right, "Q^{-1}"'] \\
\text{base } B \arrow[r, "M"] \arrow[u, shift right, "P"'] & \text{base } B' \arrow[u, shift right, "Q"']
\end{tikzcd}$$

Entonces $\Rightarrow$ $M = Q^{-1}AP$ o $A = QMP^{-1}$

Nota: Dos matrices son *equivalentes* si representan la misma aplicación en distintas bases (por ejemplo A y M)

También es posible cambiar de base sólo en el espacio inicial, o sólo en el final.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \text{b. canónica} \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & \text{b. canónica} \\ \text{base } B \arrow[u, shift right, "P"'] \arrow[ur, "M"] & \end{tikzcd}$$

En este caso, $M = AP$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \text{b. canónica} \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "M"'] & \text{b. canónica} \arrow[d, shift right, "Q^{-1}"'] \\ & \text{base } B' \arrow[u, shift right, "Q"'] \end{tikzcd}$$

En este caso, $M = Q^{-1}A$

Ejemplo: Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (x + y +, x - y, 0) \end{aligned}$$

para la cual ya hayamos su matriz en bases canónicas $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ en bases $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. Halla las matrices P y Q, y comprueba que se cumple la relación $M = Q^{-1}AP$