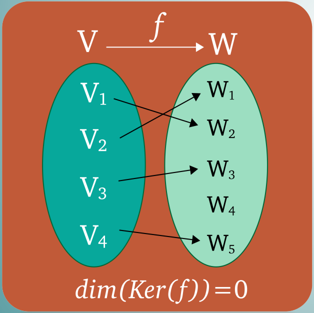
Álgebra

Tema 6. Diagonalización de endomorfismos



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Contenidos

Endomorfismo (I)

Un **endomorfismo** es una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ en la que el espacio inicial y el final son el mismo. La matriz de un endomorfismo será por tanto cuadrada $n \times n$, donde n es la dimensión de V

Recuerda que $\boxed{dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = n}$. Por tanto, un endomorfismo ha de ser *i)* inyectivo y suprayectivo a la vez (biyectivo), o *ii)* ninguna de las dos cosas

Ejercicio: Clasifica los siguientes endomorfismo:

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (-x + y, 3y)$
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (2x, x)$

ENDOMORFISMO (II)

En un endomorfismo f estaremos en la siguiente situación:

$$V \xrightarrow{\quad f \quad} V$$

$$\begin{array}{ccc} \text{b. canónica} & \xrightarrow{\quad A \quad} & \text{b. canónica} \\ P^{-1} \downarrow \uparrow P & & P^{-1} \downarrow \uparrow P \\ \text{base } B & \xrightarrow{\quad M \quad} & \text{base } B \end{array}$$

Por tanto, la expresión $M = Q^{-1}AP$ que vimos para aplicaciones lineales se convierte en $M = P^{-1}AP$ (o $A = PMP^{-1}$)

Nota: A y M serán matrices cuadradas

Por ser matrices (cuadradas) del mismo endomorfismo en bases distintas, se dice que A y M son **semejantes**. En este tipo de matrices se cumple:

- $tr(A) = tr(M)$
- $det(A) = det(M)$

En este tema se tratará de ver si, dada una matriz cuadrada A, existe otra matriz semejante a ella que sea diagonal, D, tal que se cumpla la relación $D = P^{-1}AP$ (o $A = PDP^{-1}$). Si esto se cumple, además de D (matriz diagonal), tendremos que hallar P (matriz de paso). En otras palabras: dado un endomorfismo, trataremos de encontrar una base en la cual la matriz del mismo sea diagonal. Para ello se utilizarán los **valores y vectores propios**

VALORES Y VECTORES PROPIOS

Si un vector $\vec{v}$ no nulo cumple que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ (con λ escalar $\in \mathbb{R}$), se dice que $\vec{v}$ es un **vector propio** (o autovector) de f, y que λ es su **valor propio** (o autovalor) asociado. Además, todos los vectores propios $\vec{v}$ asociados a λ forman un subespacio vectorial, V_λ, al que llamaremos **subespacio propio** de λ

Cálculo de valores y vectores propios

1. Plantear el **polinomio característico** de A: $|A - \lambda I|$. Los autovalores serán las raíces *reales* de este polinomio de grado n en λ

   Nota: Puede haber valores propios cuya multiplicidad sea mayor que 1. Por ejemplo, en el polinomio característico $(4-\lambda)^3(5+\lambda)$, el autovalor 4 tiene multiplicidad 3, y el -5 tiene multiplicidad 1. Utilizaremos la siguiente notación: $m(4) = 3$, $m(-5) = 1$

2. Para cada valor propio λ_i, resolver el sistema compatible *indeterminado* $(A - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0}$, con $\vec{v} \in V$. Las soluciones serán los autovectores de λ_i (subespacio propio asociado a λ_i: V_{λ_i})

   Notas:

   - Date cuenta que $V_{\lambda_i} = Ker(A - \lambda_i I)$
   - $\boxed{dim(V_{\lambda_i}) = n - rg(A - \lambda_i I)}$, y $\boxed{1 \leq dim(V_{\lambda_i}) \leq m(\lambda_i)}$

Ejercicio: Dado el endomorfismo $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow (3x + 2y, y) \in \mathbb{R}^2$, calcula sus autovalores y los subespacios propios asociados a estos autovalores

Sea A la matriz de un endomorfismo. Entonces:

Propiedades de los autovectores

- Los autovectores asociados a autovalores distintos son L.I.

Propiedades de los autovalores (I)

- Si A es diagonal o triangular, sus autovalores son directamente los elementos de la diagonal
- La suma de todos los autovalores de una matriz, contando cada uno de ellos tantas veces como indica su multiplicidad, es igual a su traza
- El producto de todos los autovalores de una matriz, contando cada uno de ellos tantas veces como indica su multiplicidad, es igual a su determinante
- Los autovalores de un endomorfismo son los mismos respecto de cualquier base. Por tanto, cualquier matriz de un endomorfismo, respecto de cualquier base, tiene la misma traza y el mismo determinante
- Una matriz es singular si y sólo si $\lambda = 0$ es autovalor

Propiedades de los autovalores (II)

- Los autovalores de A son los mismos que los de A^t
- Si los autovalores de A son $\{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$:
    - Los de A^k son $\{\lambda_1^k, ..., \lambda_r^k\}$
    - Los de αA (con α escalar $\in \mathbb{R}$) son $\{\alpha\lambda_1, ..., \alpha\lambda_r\}$
    - Los de A^{-1} (simpre que A^{-1} exista) son $\left\{\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_r}\right\}$

Recuerda que diagonalizar un endomorfismo (o la matriz cuadrada A que lo representa) es encontrar una matriz diagonal D (que será semejante a A) y una matriz P (matriz de cambio de base) tales que se cumpla la relación $A = PDP^{-1}$

Procedimiento general para diagonalizar un endomorfismo (I)

Comprobar si A es diagonalizable:

1. Resolver la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ para obtener los valores propios. Si alguno de ellos no es real, el endomorfismo no es diagonalizable
2. Para cada λ_i $(i = \{1, ..., r\})$, hallar una base del subespacio propio asociado V_{λ_i} y obtener su dimensión, comprobando que $dim(V_{\lambda_i}) = m(\lambda_i)$. Si algún autovalor no verifica lo anterior, el endomorfismo no es diagonalizable

Nota: Toda matriz real simétrica es diagonalizable. Además, en este tipo de matrices, los vectores propios asociados a distinto valor propio son ortogonales

Ejercicio: Comprueba si los siguientes endomorfismos son diagonalizables:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, cuyo polinomio característico es $-(7-\lambda)^2(\lambda+2)$

En caso de serlo, obtén una base de sus subespacios propios

Procedimiento general para diagonalizar un endomorfismo (II)

Si efectivamente A es diagonalizable:

1. La diagonal de D estará formada por los valores propios
   Nota: Para que D sea $n \times n$ se necesitarán n valores propios, así que en la diagonal habrá que repetir cada valor propio λ_i tantas veces como indique su multiplicidad
2. La base respecto a la cual el endomorfismo es diagonalizable es la formada por la unión de todas las bases de los subespacios propios (date cuenta que $\sum_{i=1}^{r} dim(V_{\lambda_i}) = n$). P es una matriz que tiene, en columnas, los vectores de esta base (que será una base de V)
   Nota: Ha de respetarse el mismo orden al colorcar los valores propios en la diagonal de D y los vectores propios en las columnas de P

Por tanto, si B es una base formada por vectores propios de f, la matriz de f en la base B es diagonal (D). Estaríamos en la siguiente situación:

Endomorfismo diagonalizable

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad f \quad} & V \\ \\ \text{b. canónica} & \xrightarrow{\quad A \quad} & \text{b. canónica} \\ P^{-1}\downarrow\uparrow P & & P^{-1}\downarrow\uparrow P \\ \text{base } B \text{ (vectores propios)} & \xrightarrow{D\ (diagonal)} & \text{base } B \text{ (vectores propios)} \end{array}$$

Como ya sabemos, se cumplirá que $A = PDP^{-1}$

Ejercicio: Comprueba si son diagonalizables los siguientes endomorfismos:

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x, y) \rightsquigarrow (3x + 2y, y)$
- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
  $(x, y, z) \rightsquigarrow (x - 4y, -y, 2y + z)$

En caso de serlo, obtén las matrices D y P y comprueba que se cumple la relación $A = PDP^{-1}$

CÁLCULO DE POTENCIAS DE UNA MATRIZ

Si A es una matriz diagonalizable, el cálculo de A^k se simplifica notablemente, ya que $A = PDP^{-1}$. Por tanto:

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k\ veces} = \underbrace{PDP^{-1} \cdots PDP^{-1}}_{k\ veces} = P\,\underbrace{D \cdots D}_{k\ veces}\,P^{-1}$$

Es decir, $A^k = PD^kP^{-1}$. El problema se reduce por tanto a encontrar las matrices P y D

Ejercicio: Calcula A^4, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$