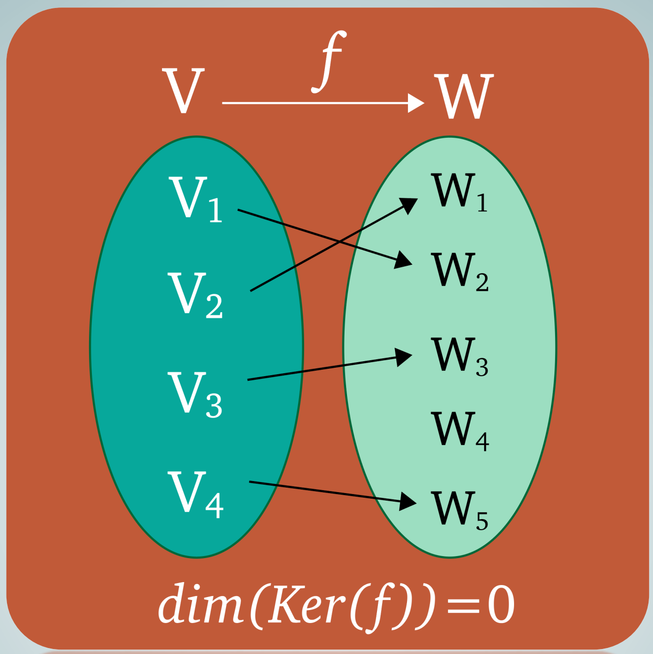
Álgebra

Práctica 5. Dependencia e independencia lineal



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Grado en Ingeniería Química

G320: Álgebra

Práctica 5: Dependencia e independencia lineal

Rodrigo García Manzanas (rodrigo.manzanas@unican.es)

Objetivos

- Determinar si un conjunto de vectores es libre o ligado
- Calcular bases de un subespacio

Dependencia e independencia lineal

Dado un conjunto de vectores de $S = \{(5, -9, 6, 4), (-3, 4, -2, -1), (0, -7, 8, 7), (2, 0, 4, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$, podemos determinar si es libre o ligado de varias maneras:

Método 1: Sabemos que el conjunto será libre si para expresar el vector $(0, 0, 0, 0)$ como combinación lineal de los vectores propuestos es necesario que todos los coeficientes de la combinación sean nulos. Esto equivale a comprobar que el sistema homogéneo correspondiente tenga tan sólo la solución trivial (sistema compatible determinado). Si por el contrario, el sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado), el conjunto será ligado.

```
% defino los vectores de S
u1 = [5 -9 6 4];
u2 = [-3 4 -2 -1];
u3 = [0 -7 8 7];
u4 = [2 0 4 1];

% clasifico el sistema
S = [u1' u2' u3' u4'];  % matriz de coeficientes (del sistema homogéneo)
b = [0 0 0 0]';  % vector de términos independientes (del sistema homogéneo)
Samp = [S b];  % matriz ampliada (del sistema homogéneo)
[rank(S) rank(Samp)]  % sistema compatible indeterminado -> infinitas soluciones
```

```
ans = 1×2
     3     3
```

```
% por tanto, el conjunto S será ligado
```

Método 2: Calculando el rango del conjunto de vectores, que nos dirá cuál es el número de vectores independientes (aunque no cuáles)

```
rank(S)  % está claro es un conjunto ligado (habrá un vector que sea
```

```
ans = 3
```

```
% combinación lineal de los demás)
```

Método 3: Usando la función *null,* que permite resolver directamente sistemas homogéneos. El único argumento de entrada que recibe es la matriz de coeficientes. De la solución devuelta por *null* podemos extrear las relaciones de dependencia (en caso de haberlas) que se dan entre los vectores del conjunto.

```
null(S, 'r')  % la relación de dependencia será -3*u1-5*u2+u3=0
```

```
ans = 4×1
    -3
    -5
     1
     0
```

```
-3*u1-5*u2+u3  % comprobación
```

```
ans = 1×4
     0     0     0     0
```

Método 3: Haciendo uso de la escalonada reducida, que nos permitirá identificar si hay algún vector/es que dependa/n linealmente de los demás, y, en tal caso, averiguar cuáles son las relaciones de dependencia existentes. Las columnas pivotales en la forma reducida marcan los vectores que son independientes.

```
rref(S)  % los vectores independientes serán u1, u2 y u4 (columnas pivotales)
```

```
ans = 4×4
     1     0     3     0
     0     1     5     0
     0     0     0     1
     0     0     0     0
```

```
% el vector u3 es combinación lineal de u1 y u2, en la siguiente forma:
% u3=3*u1+5*u2 (que es la misma relación de dependencia que habíamos
% obtenido antes con null)
```

Llegados a este punto, ya sabemos que una base de *S* es la compuesta por los vectores $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_4}\}$.

Otra forma de comprobar que $\overrightarrow{u_3}$ es combinación lineal de la base que acabamos de hallar es ver que al añadir $\overrightarrow{u_3}$ a la matriz formada for los vectores $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_4}\}$ (en columnas), el rango del conjunto no aumenta.

```
baseS = [u1' u2' u4'];
[rank(baseS), rank([baseS, u3'])]  % el rango no aumenta,
```

```
ans = 1×2
     3     3
```

```
% luego u3 es c.l. de u1, u2 y u4
```

Si quisiéramos hallar la forma implícita de *S*, podríamos añadir un vector genérico (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ a la matriz formada por los vectores de la base de *S* (en columnas) e imponer que el rango del conjunto no aumente.

```
syms x y z t real
det([baseS, [x y z t]'])  % la ecuación implícita de S será
```

ans = $21\,z - 22\,x - 16\,y - 40\,t$

```
% por tanto -22x-16y+21z-40t=0
```

<u>**Ejercicios propuestos**</u>

Ejercicio 1:

Encuentra las relaciones de dependencia lineal (en caso de haberlas) que se dan en el conjunto de vectores $S = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$, siendo $\vec{u_1} = (1, 0, 1, 2)$, $\vec{u_2} = (0, 1, 1, 1)$, $\vec{u_3} = (4, 3, 7, 11)$ y $\vec{u_4} = (-2, 1, -1, -3)$. Comprueba que son correctas.

Ejercicio 2:

Dados los subespacios $S = \{(x, y, z, t, p) | x + y = 0, z + t = 0\}$ y $T = \{(x, y, z, t, p) | x - t = 0\}$ de $\mathbb{R}^5$, halla una base del subespacio intersección $S \cap T$.

Ejercicio 3:

Dado el subespacio $S = \{(1, 0, -3, 2), (0, 1, 2, -3), (-3, -4, 1, 6), (1, -3, -8, 7), (2, 1, -6, 9)\}$ de $\mathbb{R}^4$:

- *a)* Obtén una base de *S*
- *b)* Halla el valor (o valores) de *a* tal que $(a, 4, -5, -10)$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores de la base que has encontrado. ¿Cuáles son los coeficientes de la combinación?
- *c)* Halla la forma implícita de *S*