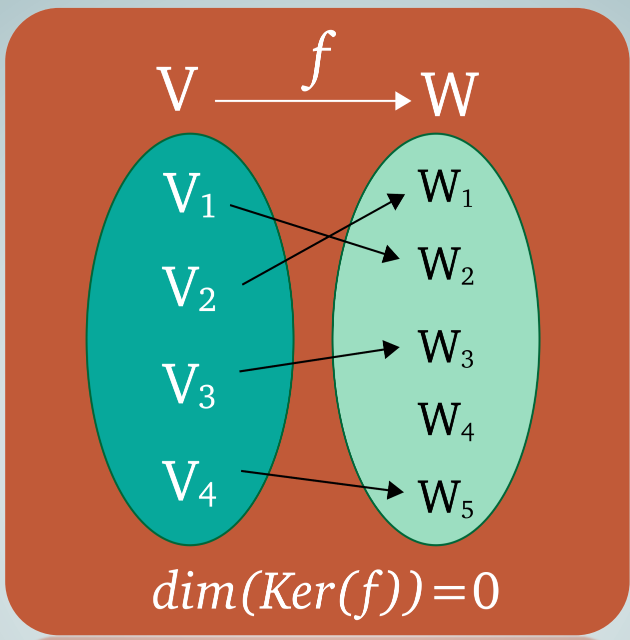
Álgebra

Problemas Tema 1. Matrices



Rodrigo García Manzanas
Neila Campos González
Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Este tema se publica bajo Licencia:
Creative Commons BY-NC-SA 4.0

Universidad de Cantabria · *Grado en Ingeniería Química*

G320: Álgebra

Tema 1: Matrices

1) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

realiza, si es posible, las siguientes operaciones:

a) $3D - 2A$
b) $B - C^t$
c) $D + BC$
d) $B^t B$
e) EAF
f) $B^t C^t - (CB)^t$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 19 & 27 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 16 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 10 & 10 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Calcula los siguientes determinantes

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 12 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad |C| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 12 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = -6$, $|B| = 0$, $|C| = 0$

3) Mediante operaciones elementales, transforma las siguientes matrices en escalonadas equivalentes y determina su rango

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Escalonada de A (una de las posibles): $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 5$

Escalonada de B (una de las posibles): $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 11/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$

Escalonada de C (una de las posibles): $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 13/4 & -17/4 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(C) = 3$

4) Determina el rango de la matriz A en función del parámetro a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Si $a \neq \{1, 1/2\} \Rightarrow rg(A) = 3$
Si $a = \{1, 1/2\} \Rightarrow rg(A) = 2$

5) Halla los valores del parámetro a para los cuales A se convierte en una matriz singular (es decir, no tiene inversa)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 0 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Si $a \neq \{2, -1/2\} \Rightarrow A$ es invertible

6) Calcula, si existe, la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 5/4 \\ 1 & -5 & -21/4 \end{pmatrix}$$
$$B^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 9 & -14 & 1 \end{pmatrix}$$
$|C| = 0 \Rightarrow$ no existe C^{-1}

7) Determina, por el método de la eliminación gaussiana, la inversa de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

8) Utiliza la factorización LU para calcular el determinante de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 13 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & -3 & 3 \\ -6 & -18 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$|A| = 12$