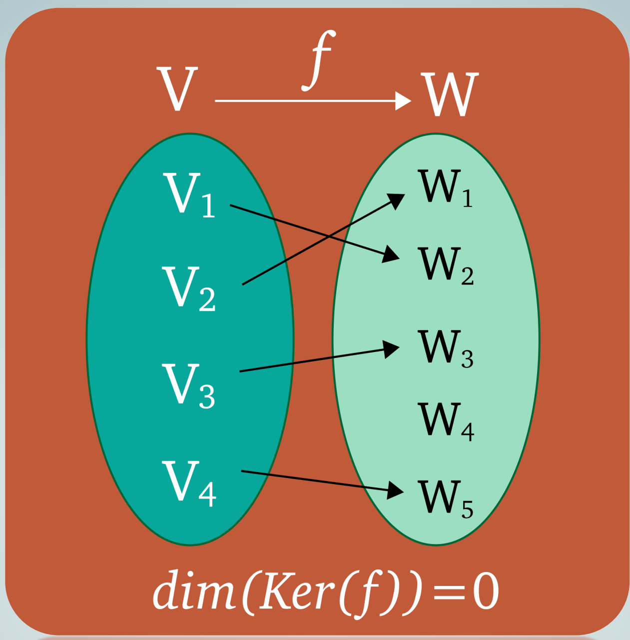
Álgebra

Problemas Tema 4. Espacio Euclídeo



Rodrigo García Manzanas

Neila Campos González

Ana Casanueva Vicente

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Universidad de Cantabria · *Grado en Ingeniería Química*

G320: Álgebra

Tema 4: Espacio euclídeo

1) En el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ con el producto escalar $f\cdot g=\int_0^1 f(x)\,g(x)dx$, normaliza el vector $f(x)=x^2$

Solución:

$\sqrt{5}x^2$

2) Comprueba si los siguientes vectores son ortogonales:

a) $(1,0,0,3,4)$ y $(1,2,3,1-1)$ en $\mathbb{R}^5$, con el producto escalar usual
b) $(3,3,1)$ y $(-1,1,-1)$ en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar $(u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3)=u_1v_1+\frac{4}{3}u_2v_2+u_3v_3$
c) $f(x)=x$ y $g(x)=x+1$ en el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, con el producto escalar $f\cdot g=\int_0^1 f(x)\,g(x)dx$

Solución:

a) Sí
b) Si
c) No, el producto escalar es $\frac{5}{6}$

3) Comprueba si S y T son subespacios ortogonales en $\mathbb{R}^4$, siendo $\{(-3,-3,0,1),(1,0,2,0)\}$ base de S y $\{(0,1,0,3),(1,1,-1,6)\}$ base de T

Solución:

No son subespacios ortogonales

4) Halla, en $\mathbb{R}^3$, una base del complemento ortogonal de lo subespacios S y T, que tienen por bases:

a) $B_S\equiv\{(1,0,2)\}$
b) $B_T\equiv\{(1,0,2),(1,1,1)\}$

Solución:

a) $\{(-2,0,1),(0,1,0)\}$
b) $\{(-2,1,1)\}$

5) Dado el vector $(0,3,2)$, halla su proyección ortogonal sobre los siguientes subespacios:

a) La recta generada por el vector $(1,2,1)$
b) El plano generado por los vectores $(1,2,1)$ y $(0,-1,2)$

Solución:

a) $\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$
b) $\left(\frac{4}{3},\frac{37}{15},\frac{26}{15}\right)$

6) Halla una base ortonormal del plano generado por los vectores $\vec{u}=(0,1,0)$ y $\vec{v}=(3,2,1)$

Solución:

$\left\{(0,1,0),\frac{1}{\sqrt{10}}(3,0,1)\right\}$

7) Dado el subespacio S generado por $(1,0,-1,1)$ y $(0,2,0,3)$:

a) Calcula su matriz de proyección
b) Proyecta el vector $(0,0,0,5)$ sobre S

Nota: Puedes utilizar MATLAB

Solución:

a) $P_S=A(A^tA)^{-1}A^t$, donde $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\-1&0\\1&3\end{pmatrix}$

b) $\left(\frac{2}{3},2,\frac{-2}{3},\frac{11}{3}\right)$

8) Considera en $\mathbb{R}^3$ un subespacio S que tiene por base los vectores $(0,5,1)$ y $(2,5,1)$. Calcula:

a) La distancia del punto $(1,2,6)$ a S

b) La distancia del punto $(1,2,6)$ a $S^{\perp}$

Solución:

a) $14\sqrt{\frac{2}{13}}$

b) $\frac{1}{13}\sqrt{1833}$

9) En el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0,2]$ con el producto escalar $f\cdot g = \int_0^2 f(x)\,g(x)dx$, halla la mejor aproximación de la función $f(x) = 2x+1$ en el subespacio generado por la función $g(x) = x$

Solución:

$\frac{11}{4}x$

10) Demuestra que no es posible expresar el vector $\vec{v} = (15,6,4,-5)$ como combinación lineal de los vectores $\{(-1,0,0,1),(4,1,-1,-2)\}$. Obtén los coeficientes de la combinación lineal de estos dos vectores que da el vector más cercano a $\vec{v}$

Solución:

$c_1 = -1, c_2 = 3$

11) Dado el siguiente sistema, comprueba que es incompatible y resuélvelo por mínimos cuadrados. Calcula el error cuadrático
Nota: Puedes utilizar MATLAB

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y & = & 4 \\ x-y & = & 3 \\ x+3y & = & 7 \end{array}\right.$$

Solución:

$rg(A) = 2 \neq rg(A^*) \Rightarrow S.I.$
La solución aproximada es $x = \frac{11}{8}$, $y = \frac{11}{8}$
El error cuadrático es $27/2$

12) Un ingeniero ha tomado los siguientes datos experimentales relativos a la medida de la intensidad de corriente que atraviesa un hilo conductor para distintos voltajes: Calcula el mejor ajuste a los datos con

x=voltaje (V)	2	5	7
y=intensidad (A)	6	7.9	8.5

a) una recta, *b)* una función cuadrática, *c)* con una función exponencial ($y = Ae^{Bx}$) y estima los errores cuadráticos. Compara los resultados que arrojan los ajustes cuando el voltaje es 7V
Nota: Utiliza MATLAB

Solución:

a) Ajuste lineal: $y = 0.5105x + 5.0842$, $err = 0.1053A^2$, $y(7) = 8.6579A$
b) Ajuste cuadrático: $y = -0.0667x^2 + 1.1x + 4.0667$, $err = 0A^2$, $y(7) = 8.5A$
c) Ajuste exponencial: $y = 5.2928 \cdot e^{0.0714x}$, $err = 0.1747A^2$, $y(7) = 8.7248A$