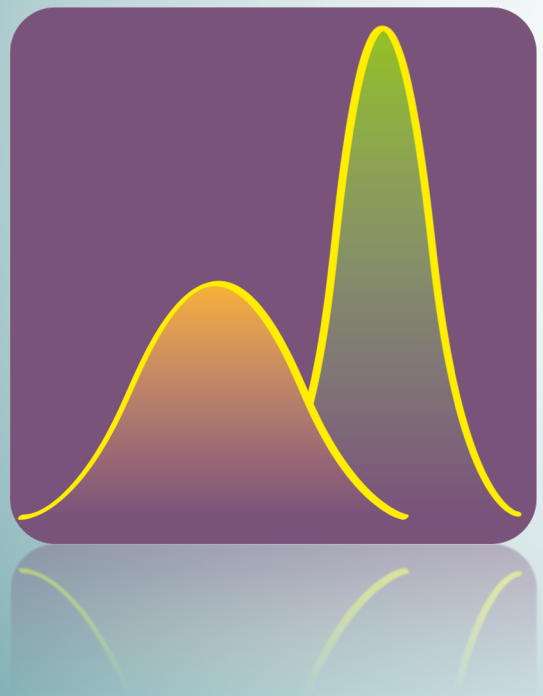
Estadística II

Tema 1. Distribución de probabilidades unidimensional



Marta Guijarro Garvi

David Gutiérrez Sobrao

Departamento de Economía

Este material se publica bajo licencia:
Creative Commons BY-NC-SA 4.0

Tema 1: Distribución de probabilidades unidimensional

Índice de contenidos

- Variable aleatoria: principales conceptos.
- Función de distribución de una variable aleatoria.
- Variable aleatoria discreta: función de probabilidad.
- Variable aleatoria continua: función de densidad.
- Esperanza y varianza de una variable aleatoria.

Tema 1: Distribución de probabilidades unidimensional

Resultados de aprendizaje

- Comprender el concepto de distribución de probabilidades a partir del concepto de distribución de frecuencias.
- Conocer las semejanzas y diferencias entre variables aleatorias discretas y continuas.
- Saber calcular probabilidades utilizando las funciones de probabilidad, de densidad y de distribución de las variables aleatorias.
- Saber hallar esperanzas y varianzas de variables aleatorias.
- Saber calcular esperanzas y varianzas de transformaciones lineales.

Variable aleatoria: principales conceptos

Un **experimento aleatorio** es aquel cuya realización sucesiva en idénticas condiciones produce resultados diferentes.

Una **variable aleatoria**, X, es una característica numérica asociada a los resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplo 1.1. Un experimento aleatorio es el lanzamiento de un dado, cuyos posibles resultados son sus diferentes caras. A partir de este experimento se define la variable aleatoria X como el número de resultados pares obtenidos. Esta variable aleatoria toma el valor 0 cuando el resultado es cualquiera de las caras 1, 3 o 5, y el valor 1, cuando el resultado es 2, 4 o 6.

Función de distribución de una variable aleatoria

Dada una variable aleatoria, X, su **función de distribución** se define como:

$$F_X(x) = p[X \leq x] \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La función de distribución es una función monótona creciente y continua por la derecha. Además,

- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
- Si a y b son dos números reales ($a < b$), entonces,

$$P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a).$$

Función de distribución de una variable aleatoria

La función de distribución es una herramienta para el cálculo de probabilidades.

Ejemplo 1.2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,3 & 0 \le x < 1 \\ 0,7 & 1 \le x < 2 \\ 0,9 & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

Con esta función de distribución pueden calcularse, por ejemplo, las siguientes probabilidades:

- $P[X \le 2] = F_X(2) = 0,9.$
- $P[X < 2] = F_X(1) = 0,7.$
- $P[X > 1] = 1 - F_X(1) = 0,3.$
- $P[X \ge 1] = 1 - F_X(0) = 0,7.$
- $P[1 < X \le 2] = F_X(2) - F_X(1) = 0,2.$
- $P[1 \le X < 3] = F_X(2) - F_X(0) = 0,6.$

Variable aleatoria discreta: función de probabilidad

Una **variable aleatoria discreta**, X, es aquella que toma una cantidad finita o infinita numerable de valores: $x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n < \ldots$

La **función de probabilidad** de una variable aleatoria discreta, X, se define como:

$$f_X(x) = p[X = x] \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Una variable aleatoria discreta toma aquellos valores para los cuales su función de probabilidad es distinta de cero.

La función de probabilidad está entre 0 y 1 para cualquier número real y, además, la suma de la función de probabilidad en los valores que toma la variable es igual a la unidad.

Variable aleatoria discreta: función de probabilidad

La función de probabilidad permite el cálculo de probabilidades en variables aleatorias discretas.

Ejemplo 1.3. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,2 & x = 1 \\ 0,3 & x = 2 \\ 0,1 & x = 3 \\ 0,4 & x = 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Con esta función de probabilidad pueden calcularse, por ejemplo, las siguientes probabilidades:

- $P[X \leq 3] = f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) = 0,6.$
- $P[X > 3] = f_X(5) = 0,4.$
- $P[1 < X \leq 2] = f_X(2) = 0,3.$
- $P[1 \leq X < 3] = f_X(1) + f_X(2) = 0,5.$

Variable aleatoria continua: función de densidad

Una **variable aleatoria continua**, X, es aquella cuya función de distribución es continua y derivable con continuidad salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos.

La **función de densidad** de una variable aleatoria continua, X, con función de distribución, $F_X(x)$, se define como

$$f_X(x) = F_X'(x),$$

para todo número real, x, en el que la función de distribución es derivable.

La función de densidad es siempre positiva para cualquier número real y su integral en la recta real es igual a la unidad. Además, si a y b son números reales ($a < b$), entonces,

$$P[a < X \leq b] = \int_a^b f_X(x)dx.$$

Observación: El cálculo de probabilidades con la función de densidad equivale al cálculo de áreas. En consecuencia, se cumple que $p[X = x] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Variable aleatoria continua: función de densidad

La función de densidad permite el cálculo de probabilidades en variables aleatorias continuas.

Ejemplo 1.4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Con esta función de densidad pueden calcularse, por ejemplo, las siguientes probabilidades:

- $P[X \leq 1,5] = \int_{-\infty}^{1,5} f_X(x)dx = \int_{1}^{1,5} 1dx = 0,5.$
- $P[1,7 \leq X \leq 2,5] = \int_{1,7}^{2,5} f_X(x)dx = \int_{1.7}^{2} 1dx = 0,3.$
- $P[X > 1,3] = \int_{1,3}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{1,3}^{2} 1dx = 0,7.$
- $P[X > 3] = \int_{3}^{\infty} f_X(x)dx = 0.$

Esperanza y varianza de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria discreta (continua) y sea $f_X(x)$ su función de probabilidad (densidad), la **esperanza** de X, $E(X)$ o μ_X, se define según se recoge en la tabla siguiente.

X es discreta	$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_X(x_i)$
X es continua	$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$

La esperanza es una medida de posición de la distribución de probabilidades de la variable aleatoria.

Además, si $g(X)$ es una variable aleatoria función de X, su esperanza, $E[g(X)]$, se define según se recoge en la siguiente tabla.

X es discreta	$\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot f_X(x_i)$
X es continua	$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx$

Esperanza y varianza de una variable aleatoria

La esperanza de una constante es la propia constante. Además, si $u(X)$ y $v(X)$ son dos variables aleatorias funciones de X y a y b son dos números reales, entonces,

$$E\left[a \cdot u(X) + b \cdot v\left(X\right)\right] = a \cdot E\left[u(X)\right] + b \cdot E\left[v\left(X\right)\right].$$

Si $u(X) = X$ y $v(X) = 1$, se tiene, como caso particular,

$$E\left(a \cdot X + b\right) = a \cdot E(X) + b.$$

Esperanza y varianza de una variable aleatoria

La **varianza** de una variable aleatoria, X, con esperanza μ_X se denota por $Var(X)$ o σ_X^2 y se define como

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2\right].$$

Si X es una variable aleatoria discreta (continua) y $f_X(x)$ es su función de probabilidad (densidad), la varianza de X se calcula, por tanto, según se recoge en la tabla siguiente.

X es discreta	$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - \mu_X)^2 \cdot f_X(x_i)$
X es continua	$\int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x)dx$

La esperanza es una medida de dispersión de la distribución de probabilidades de la variable aleatoria.

Esperanza y varianza de una variable aleatoria

La varianza de X puede calcularse como:

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - \mu_X^2.$$

La varianza de una constante es igual a 0 y, además, si a y b son dos números reales, entonces,

$$Var\left(a \cdot X + b\right) = a^2 \cdot Var\left(X\right).$$

Esperanza y varianza de una variable aleatoria

A partir de la varianza de una variable aleatoria X se obtienen otras dos medidas de dispersión de la distribución de probabilidades de X:

la **desviación típica**,

$$\sigma_X = +\sqrt{Var(X)},$$

y el **coeficiente de variación**,

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}.$$

A diferencia de la varianza y la desviación típica, que son medidas de dispersión absolutas, el coeficiente de variación es una medida de dispersión relativa.

Esperanza y varianza de una variable aleatoria

Ejemplo 1.5. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,3 & x = 0 \\ 0,2 & x = 1 \\ 0,5 & x = 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Las medidas de posición y dispersión de esta distribución de probabilidades son:

- $\mu_X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_X(x_i) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,5 = 1,7.$
- $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu_X)^2 \cdot f_X(x_i) = (0-1.7)^2 \cdot 0,3 + (1-1.7)^2 \cdot 0,2 + (3-1.7)^2 \cdot 0,5 = 1,81.$
- $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{1,81} = 1,35.$
- $CV_X = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X} = \dfrac{1,35}{1,7} = 0,79.$

Esperanza y varianza de una variable aleatoria

Ejemplo 1.6. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & 2 < x < 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Las medidas de posición y dispersión de esta distribución de probabilidades son:

- $\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_2^4 x \cdot \frac{1}{2}dx = 3.$
- $\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \cdot f_X(x)dx = \int_2^4 (x-3)^2 \cdot \frac{1}{2}dx = \frac{1}{3}.$
- $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,58.$
- $CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{0,58}{3} = 0,19.$