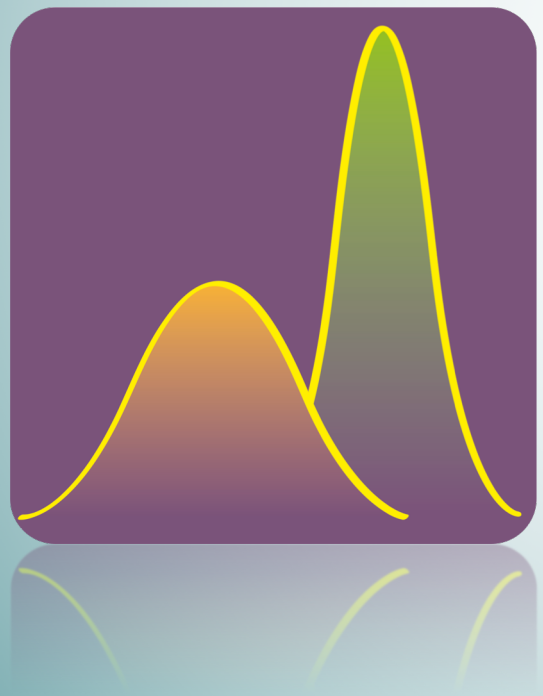
Estadística II

TEMA 2. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES BIDIMENSIONAL



Marta Guijarro Garvi

David Gutiérrez Sobrao

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

Este material se publica bajo licencia:

Creative Commons BY-NC-SA 4.0

Tema 2: Distribución de probabilidades bidimensional

Índice de contenidos

- Distribución de probabilidades bidimensional: función de distribución conjunta.
- Variable aleatoria bidimensional discreta.
- Variable aleatoria bidimensional continua.
- Distribuciones condicionadas: funciones de probabilidad y de densidad condicionadas y esperanzas condicionadas.
- Independencia.
- Regresión lineal: rectas de regresión y bondad del ajuste.

Tema 2: Distribución de probabilidades bidimensional

Resultados de aprendizaje

- Entender el concepto de distribución de probabilidades bidimensional a partir del concepto de distribución de frecuencias bidimensional.
- Conocer las semejanzas y diferencias entre variables aleatorias discretas y continuas.
- Saber hallar distribuciones marginales y condicionadas.
- Comprender la naturaleza unidimensional de las distribuciones condicionadas.
- Saber calcular probabilidades a partir de distribuciones marginales y condicionadas.
- Conocer la diferencia entre incorrelación e independencia.
- Saber hallar las rectas de regresión y calcular e interpretar la bondad de los ajustes.

Distribución de probabilidades bidimensional: función de distribución conjunta

Una **variable aleatoria bidimensional** es un par (X,Y) en el que X e Y son variables aleatorias.

La distribución de probabilidades de una variable aleatoria bidimensional o **distribución de probabilidades bidimensional** está determinada por la función de distribución de la variable bidimensional (X,Y) o **función de distribución conjunta**:

$$F_{X,Y}(x,y) = p[X \leq x, Y \leq y] \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Variable aleatoria bidimensional discreta

Una **variable aleatoria bidimensional discreta** es un par (X,Y) en el que X e Y son variables aleatorias discretas.

La distribución de probabilidades de una variable bidimensional discreta (X,Y) queda determinada por su función de probabilidad o **función de probabilidad conjunta**:

$$f_{X,Y}(x,y) = p[X=x, Y=y] \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Además,

- Para todo par de números reales, x e y, se cumple que $0 \le f_{X,Y}(x,y) \le 1$.
- $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f_{X,Y}(x_i,y_j) = 1$, donde x_i $(i=1,\ldots)$ e y_j $(j=1,\ldots)$ son los valores que toman X e Y, respectivamente.

Las funciones de probabilidad de las variables X e Y o **funciones de probabilidad marginales** son, respectivamente,

$$f_X(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{X,Y}(x_i,y_j) \quad \text{y} \quad f_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{X,Y}(x_i,y_j).$$

Variable aleatoria bidimensional continua

Una **variable aleatoria bidimensional continua** es una variable aleatoria (X,Y) cuya función de distribución, $F_{X,Y}(x,y)$, cumple las siguientes condiciones:

- Es continua en cada variable.
- Existen sus dos primeras derivadas parciales, así como su segunda derivada respecto a ambas variables, la cual es continua salvo, a lo sumo, en un número finito de curvas.
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{X,Y}(x,y)dydx=1.$

Variable aleatoria bidimensional continua

La distribución de probabilidades de una variable aleatoria bidimensional continua (X,Y) queda determinada por su función de densidad bidimensional o **función de densidad conjunta**:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{X,Y}(x,y)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Además,

- Para todo par de números reales, x e y, se cumple que $f_{X,Y}(x,y)\geq 0$.
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dydx=1.$

Las funciones de densidad de las variables X e Y o **funciones de densidad marginales** son, respectivamente,

$$f_X(x)=\int_{y=-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dy \quad \text{y} \quad f_Y(y)=\int_{x=-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dx$$

Distribuciones condicionadas: funciones de probabilidad condicionadas

Dada una variable aleatoria bidimensional discreta (X,Y), las **distribuciones de probabilidades condicionadas** quedan determinadas por las **funciones de probabilidad condicionadas**, tal y como se recoge en la siguiente tabla.

Distribuciones de X condicionadas por los valores que toma Y	*Distribuciones de Y condicionadas por los valores que toma X*
Función de probabilidad de X condicionada por $Y = y_j$: $$f_{X/Y=y_j}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y_j)}{f_Y(y_j)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_Y(y_j) \neq 0$$	Función de probabilidad de Y condicionada por $X = x_i$: $$f_{Y/X=x_i}(y) = \frac{f_{X,Y}(x_i, y)}{f_X(x_i)} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f_X(x_i) \neq 0$$

Distribuciones condicionadas: funciones de probabilidad condicionadas

Ejemplo 2.1. La distribución conjunta y las marginales de X e Y aparecen en la siguiente tabla:

$X \setminus Y$	0	3	
1	0,2	0,3	0,5
2	0,1	0,4	0,5
	0,3	0,7	

Estas distribuciones permiten hallar las distribuciones condicionadas, las cuales quedan determinadas mediante las correspondientes funciones de probabilidad condicionadas que figuran en la tabla siguiente.

Distribuciones de X condicionadas por los valores que toma Y	*Distribuciones de Y condicionadas por los valores que toma X*
$f_{X/Y=0}(x)=\begin{cases}\dfrac{f_{X,Y}(1,0)}{f_Y(0)}=\dfrac{2}{3} & x=1\\ \dfrac{f_{X,Y}(2,0)}{f_Y(0)}=\dfrac{1}{3} & x=2\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$	$f_{Y/X=1}(y)=\begin{cases}\dfrac{f_{X,Y}(1,0)}{f_X(1)}=\dfrac{2}{5} & y=0\\ \dfrac{f_{X,Y}(1,3)}{f_X(1)}=\dfrac{3}{5} & y=3\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$
$f_{X/Y=3}(x)=\begin{cases}\dfrac{f_{X,Y}(1,3)}{f_Y(3)}=\dfrac{3}{7} & x=1\\ \dfrac{f_{X,Y}(2,3)}{f_Y(3)}=\dfrac{4}{7} & x=2\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$	$f_{Y/X=2}(y)=\begin{cases}\dfrac{f_{X,Y}(2,0)}{f_X(2)}=\dfrac{1}{5} & y=0\\ \dfrac{f_{X,Y}(2,3)}{f_X(2)}=\dfrac{4}{5} & y=3\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

Distribuciones condicionadas: funciones de densidad condicionadas

Dada una variable aleatoria bidimensional continua (X,Y) las **distribuciones de probabilidades condicionadas** quedan determinadas por las **funciones de densidad condicionadas**, tal y como se recoge en la siguiente tabla.

Distribuciones de X condicionadas por los valores que toma Y	*Distribuciones de Y condicionadas por los valores que toma X*
Función de densidad de X condicionada por $Y = y$: $$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_Y(y) \neq 0$$	Función de densidad de Y condicionada por $X = x$: $$f_{Y/X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f_X(x) \neq 0$$

Distribuciones condicionadas: funciones de densidad condicionadas

Ejemplo 2.2. La función de densidad conjunta de X e Y es:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1 & 1<x<2, 1<y<2\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Con esta función de densidad conjunta se obtienen las funciones de densidad marginales de X e Y:

$$f_Y(y)=\int_{x=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_{x=1}^{2} 1\,dx=1 \quad 1<y<2 \qquad f_X(x)=\int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_{y=1}^{2} 1\,dy=1 \quad 1<x<2$$

Las funciones de densidad conjunta y marginales permiten hallar las distribuciones condicionadas, las cuales quedan determinadas por las correspondientes funciones de densidad condicionadas recogidas en la tabla siguiente.

Distribuciones de X condicionadas por los valores que toma Y	*Distribuciones de Y condicionadas por los valores que toma X*
Para $1<y<2$ $\quad f_{X/Y=y}(x)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{1}{1}=1 \quad 1<x<2$	Para $1<x<2$ $\quad f_{Y/X=x}(y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{1}{1}=1 \quad 1<y<2$

Distribuciones condicionadas: esperanzas condicionadas

Dada una variable aleatoria bidimensional (X,Y) las esperanzas condicionadas son las esperanzas de las correspondientes distribuciones condicionadas, tal y como se recoge en la siguiente tabla para variables bidimensionales discretas y continuas.

Variable aleatoria bidimensional discreta (distribución de probabilidades bidimensional discreta)	
Distribuciones de X condicionadas por los valores que toma Y	*Distribuciones de Y condicionadas por los valores que toma X*
Esperanza de X condicionada por $Y = y_j$: $$E(X/Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_{X/Y=y_j}(x_i)$$	Esperanza de Y condicionada por $X = x_i$: $$E(Y/X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot f_{Y/X=x_i}(y_j)$$
Variable aleatoria bidimensional continua (distribución de probabilidades bidimensional continua)	
Distribuciones de X condicionadas por los valores que toma Y	*Distribuciones de Y condicionadas por los valores que toma X*
Esperanza de X condicionada por $Y = y$: $$E(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X/Y=y}(x)dx$$	Esperanza de Y condicionada por $X = x$: $$E(Y/X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y/X=x}(y)dy$$

Distribuciones condicionadas: esperanzas condicionadas

Ejemplo 2.3 (continuación del Ejemplo 2.1) Las esperanzas de las distribuciones condicionadas (esperanzas condicionadas) son:

$$E(X/Y=0)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_{X/Y=0}(x_i)=\frac{4}{3} \qquad E(X/Y=3)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_{X/Y=3}(x_i)=\frac{11}{7}$$

$$E(Y/X=1)=\sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot f_{Y/X=1}(y_j)=\frac{9}{5} \qquad E(Y/X=2)=\sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot f_{Y/X=2}(y_j)=\frac{12}{5}$$

Ejemplo 2.4 (continuación del Ejemplo 2.2) La esperanza de la distribución de X condicionada, por ejemplo, por $Y=1{,}3$ es

$$E(X/Y=1{,}3)=\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X/Y=1,3}(x)dx=\int_{x=1}^{2} x \cdot 1 dx=1{,}5.$$

con $f_{X/Y=1,3}(x)=1 \quad 1<x<2.$

La esperanza de la distribución de Y condicionada, por ejemplo, por $X=1{,}8$ es

$$E(Y/X=1{,}8)=\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y/X=1,8}(y)dy=\int_{y=1}^{2} y \cdot 1 dy=1{,}5.$$

con $f_{Y/X=1,8}(y)=1 \quad 1<y<2.$

Independencia

Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional. Las variables X e Y son **independientes** si

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R},$$

siendo $f_{X,Y}(x,y), f_X(x)$ y $f_Y(y)$ funciones de probabilidad o de densidad, dependiendo de si la variable bidimensional es discreta o continua.

Además, es condición necesaria y suficiente para que las variables X e Y sean independientes que las distribuciones condicionadas coincidan con las correspondientes marginales.

Así, cuando (X,Y) es una variable bidimensional discreta, X e Y son independientes si y solamente si:

$$f_{X/Y=y_j}(x) = f_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(f_Y(y_j) \neq 0\right) \quad \text{y} \quad f_{Y/X=x_i}(y) = f_Y(y) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \left(f_X(x_i) \neq 0\right).$$

Y, cuando (X,Y) es continua, X e Y son independientes si y solamente si:

$$f_{X/Y=y}(x) = f_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(f_Y(y) \neq 0\right) \quad \text{y} \quad f_{Y/X=x}(y) = f_Y(y) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \left(f_X(x) \neq 0\right).$$

Regresión lineal: rectas de regresión

Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional. La **covarianza** entre X e Y es

$$Cov(X,Y) = E\left[\left(X-\mu_X\right)\cdot\left(Y-\mu_Y\right)\right].$$

Se cumple: $Cov(X,Y) = E\left(X\cdot Y\right) - \mu_X\cdot\mu_Y$

La recta que mejor explica[1] la variable Y en función de la variable X es la **recta de regresión de *Y* sobre *X***:

$$y = \mu_Y + \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X^2}\cdot\left(x-\mu_X\right).$$

Análogamente, la recta que mejor explica la variable X en función de la variable Y es la **recta de regresión de *X* sobre *Y***:

$$x = \mu_X + \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_Y^2}\cdot\left(y-\mu_Y\right).$$

[1]El criterio utilizado para obtener las rectas de regresión es el de los mínimos cuadrados.

Los coeficientes de regresión de las rectas de regresión son: $\beta_{Y/X} = Cov(X,Y)/\sigma_X^2$ y $\beta_{X/Y} = Cov(X,Y)/\sigma_Y^2$.

Regresión lineal: bondad de ajuste

La evaluación de la calidad de la explicación lineal obtenida mediante las rectas de regresión, esto es, el análisis de la **bondad de ajuste** se realiza con el **coeficiente de correlación**:

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad (-1 \le \rho \le 1),$$

y mediante su cuadrado, el **coeficiente de determinación lineal**:

$$\rho^2 = \frac{[Cov(X,Y)]^2}{\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2} \qquad (0 \le \rho^2 \le 1).$$

- Si ρ es igual a -1 o a 1 $(\rho^2 = 1)$, el ajuste es perfecto (negativo o positivo, respectivamente), existiendo una relación lineal exacta negativa o positiva entre las variables.
- Si ρ es igual a 0 $(\rho^2 = 0)$, el ajuste es pésimo, no existiendo relación lineal entre ellas. En este caso, las variables están **incorrelacionadas**.
- El signo de las pendientes de las rectas de regresión, de los coeficientes de regresión y del coeficiente de correlación es el signo de la covarianza.
- Si dos variables son independientes están incorrelacionadas, pero el recíproco no es cierto.

Regresión lineal: rectas de regresión y bondad del ajuste

Ejemplo 2.5. La distribución conjunta y las distribuciones marginales de X e Y se presentan en la siguiente tabla:

$X \setminus Y$	0	1	2	
1	0,05	0,09	0	0,14
2	0,10	0,16	0,22	0,48
3	0,16	0,10	0,12	0,38
	0,31	0,35	0,34	

Las medias y varianzas de X e Y, así como la covarianza entre ellas son:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_X(x_i)=2,240 \qquad Var(X)=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-\mu_X)^2 \cdot f_X(x_i)=0,462$$

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{\infty} y_j \cdot f_Y(y_j)=1,030 \qquad Var(Y)=\sum_{j=1}^{\infty}(y_j-\mu_Y)^2 \cdot f_Y(y_j)=0,649$$

$$Cov(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i-\mu_X)\cdot(y_j-\mu_Y)\cdot f_{X,Y}(x_i,y_j)=0,003$$

En consecuencia, las rectas de regresión de Y sobre X y de X sobre Y son, respectivamente:

$$y=0,006\cdot x+1,016 \quad \text{y} \quad x=0,004\cdot y+2,236.$$

Además, los coeficientes de correlación y determinación lineal son:

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=0,005 \quad \text{y} \quad \rho^2\simeq 0.$$

Las rectas de regresión, casi paralelas a los ejes de coordenadas, junto con los valores de los coeficientes, evidencian la casi inexistente relación lineal entre las variables.