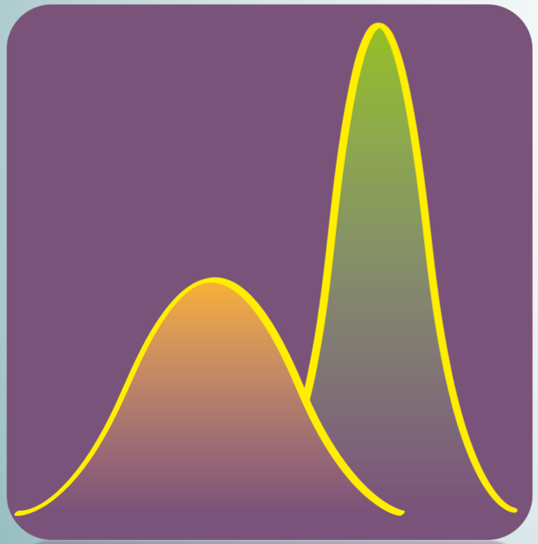
Estadística II

Tema 3. Modelos de distribuciones



Marta Guijarro Garvi

David Gutiérrez Sobrao

Departamento de Economía

Tema 3: Modelos de distribuciones

Índice de contenidos

- Distribuciones discretas: Bernoulli, binomial, geométrica, binomial negativa y Poisson.
- Distribuciones continuas: uniforme continua, exponencial negativa, normal, logarítmico- normal, Pareto, gamma y beta.

Tema 3: Modelos de distribuciones

Resultados de aprendizaje

- Entender el concepto de modelo de distribución.
- Comprender el papel de los parámetros de un modelo en la descripción de un fenómeno aleatorio.
- Saber definir la variable de estudio mediante la adaptación, cuando sea necesario, de la formulación general del modelo de distribución correspondiente.
- Saber denotar el modelo de distribución de la variable.
- Saber aplicar los conocimientos del Tema 1 para calcular probabilidades en modelos de distribuciones discretas y continuas.
- Saber identificar los modelos de distribuciones que surgen de experimentos de Bernoulli.

Distribuciones discretas: experimento de Bernoulli

Un experimento aleatorio cuyo interés está en la ocurrencia o no de un determinado suceso es un **experimento de Bernoulli**.

Del concepto de experimento de Bernoulli derivan cuatro modelos de distribuciones discretas: distribución de Bernoulli, distribución binomial, distribución geométrica y distribución binomial negativa.

Ejemplo 3.1. Un experimento de Bernoulli es el lanzamiento de un penalti por un jugador de fútbol, donde el éxito es marcar el penalti y el fracaso, fallarlo.

Distribuciones discretas: Bernoulli

Se realiza un experimento de Bernoulli con probabilidad de éxito p. La variable aleatoria X, *número de éxitos obtenidos en el experimento*, sigue una **distribución de Bernoulli** de parámetro p.

Notación simbólica	Función de probabilidad	Parámetros	Esperanza	Varianza
$X \to b(p)$	$f(x) = p^x \cdot (1-p)^{1-x}$ $x = 0,1$	p $0 < p < 1$	p	$p \cdot (1-p)$

Ejemplo 3.2. Un jugador de fútbol lanza un penalti, siendo su porcentaje de aciertos del 90 %. La variable aleatoria X, número de aciertos del jugador en el lanzamiento de un penalti, sigue una distribución de Bernoulli de parámetro 0,9.

Distribuciones discretas: Binomial

Se realizan n experimentos de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p. La variable aleatoria X, *número de éxitos obtenidos en los n experimentos*, sigue una **distribución Binomial** de parámetros n y p.

Notación simbólica	Función de probabilidad	Parámetros	Esperanza	Varianza	Propiedad
$X \rightarrow B(n,p)$	$f(x)=\binom{n}{x}p^x\cdot(1-p)^{n-x}$ $x=0,1,\ldots,n$	n, p $n=1,2,\ldots$ $0<p<1$	$n\cdot p$	$n\cdot p\cdot(1-p)$	$B(1,p)\equiv b(p)$

Ejemplo 3.3. Un jugador de fútbol lanza 5 penaltis, siendo su porcentaje de aciertos del 90 %. La variable aleatoria X, número de aciertos del jugador en el lanzamiento de los 5 penaltis, sigue una distribución Binomial de parámetros 5 y 0,9.

Distribuciones discretas: Geométrica

Se realizan sucesivos experimentos de Bernoulli hasta obtener el primer éxito, siendo la probabilidad de éxito p. La variable aleatoria X, *número de fracasos obtenidos antes del primer éxito*, sigue una **distribución geométrica** de parámetro p.

Notación simbólica	Función de probabilidad	Parámetros	Esperanza	Varianza
$X \to G(p)$	$f(x) = (1-p)^x \cdot p$ $x = 0, 1, \ldots$	p $0 < p < 1$	$\dfrac{1-p}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$

Ejemplo 3.4. Un jugador de fútbol lanza penaltis hasta marcar el primero, siendo su porcentaje de aciertos del 90 %. La variable aleatoria X, número de penaltis fallados antes de marcar el primero, sigue una distribución geométrica de parámetro 0,9.

Distribuciones discretas: Binomial negativa

Se realizan sucesivos experimentos de Bernoulli hasta obtener el r-ésimo éxito, siendo la probabilidad de éxito p. La variable aleatoria X, *número de fracasos obtenidos antes del r-ésimo éxito*, sigue una **distribución binomial negativa** de parámetros r y p.

Notación simbólica	Función de probabilidad	Parámetros	Esperanza	Varianza	Propiedad
$X \to BN(r,p)$	$f(x) = \binom{x+r-1}{x}(1-p)^x p^r$ $x = 0,1,\ldots$	r, p $r = 1,2,\ldots$ $0 < p < 1$	$\dfrac{r\cdot(1-p)}{p}$	$\dfrac{r\cdot(1-p)}{p^2}$	$BN(1,p) \equiv G(p)$

Ejemplo 3.5. Un jugador de fútbol lanza penaltis hasta marcar el séptimo, siendo su porcentaje de aciertos del 90 %. La variable aleatoria X, número de penaltis fallados antes de marcar el séptimo, sigue una distribución binomial negativa de parámetros 7 y 0,9.

Distribuciones discretas: Poisson

Notación simbólica	Función de probabilidad	Parámetros	Esperanza	Varianza
$X \to P(\lambda)$	$f(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$ $x = 0, 1, \ldots$	λ $\lambda > 0$	λ	λ

Ejemplo 3.6. Si el número de operaciones realizadas cada hora en un cajero automático es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro 35, entonces, la probabilidad de que en una hora se realicen 25 operaciones es

$$p[X = 25] = f(25) = e^{-35} \cdot \frac{35^{25}}{25!} = 0,016$$

Distribuciones continuas: Uniforme continua

Una variable aleatoria X sigue una **distribución uniforme continua** de parámetros a y b, si su función de densidad es constante en el intervalo (a,b) y nula fuera de él.

Notación simbólica	Función de densidad	Parámetros	Esperanza	Varianza
$X \to U(a,b)$	$f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ $a<x<b$	a,b $-\infty<a<b<\infty$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$

Ejemplo 3.7. Si X es una variable aleatoria con distribución $U(3,7)$, su esperanza es $E(X)=(3+7)/2=5$.

Distribuciones continuas: Exponencial negativa

Notación simbólica	Función de densidad	Parámetros	Esperanza	Varianza	Propiedad (propiedad del olvido)
$X \to \mathcal{E}(a)$	$f(x) = a \cdot e^{-a \cdot x}$ $x > 0$	a $a > 0$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$	$p[X > t + s / X > t] = p[X > s]$ $t, s > 0$

Ejemplo 3.8. La duración, en meses, de cierto tipo de batería es una variable aleatoria con distribución exponencial negativa de parámetro 1/15. La probabilidad de que una batería dure entre 10 y 20 meses es

$$p[10 < X < 20] = \int_{10}^{20} \frac{1}{15} \cdot e^{-\frac{1}{15} \cdot x} dx = 0,249.$$

Distribuciones continuas: Normal

Notación simbólica	Función de densidad	Parámetros	Esperanza	Varianza	Propiedad (tipificación)
$X \rightarrow N(\mu,\sigma)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ $-\infty < x < \infty$	μ,σ $-\infty < \mu < \infty$ $\sigma > 0$	μ	σ^2	$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\rightarrow N(0,1)$

Ejemplo 3.9. La distribución de las calificaciones de los estudiantes en una asignatura obligatoria de cierta titulación universitaria es normal de media 5,6 y desviación típica 1. La probabilidad de que la calificación de un estudiante sea inferior a 5 es[1]

$$p[X<5]=p\left[\frac{X-5,6}{1}<\frac{5-5,6}{1}\right]=p[Z<-0,6]=0,274.$$

[1]El cálculo manual de probabilidades referidas a este modelo de distribución se realiza mediante la tipificación, que permite transformar cualquier distribución normal en una distribución normal estándar para la cual existen tablas.

Distribuciones continuas: Logarítmico-normal

Una variable aleatoria X sigue una **distribución logarítmico-normal** de parámetros μ y σ, si la variable aleatoria $Y = \ln(X)$ sigue una distribución normal de parámetros μ y σ.

Notación simbólica	Función de densidad	Parámetros	Esperanza	Varianza
$X \to \log N(\mu, \sigma)$	$f(x) = \frac{1}{x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$ $x > 0$	μ, σ $-\infty < \mu < \infty$ $\sigma > 0$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2 \cdot \mu^2} \cdot \left(e^{2 \cdot \sigma^2} - e^{\sigma^2}\right)$

Ejemplo 3.10. El ingreso anual de los habitantes de un municipio, en miles de euros, X, sigue una distribución logarítmico-normal de parámetros $\mu = 3$ y $\sigma = 0,3$. La probabilidad de que el ingreso sea inferior a 12 mil euros anuales es

$$p[X < 12] = p[\ln X < \ln 12] = p\left[\frac{\ln X - 3}{0,3} < \frac{\ln 12 - 3}{0,3}\right] = p[Z < -1,717] = 0,043.$$

Distribuciones continuas: Pareto

Función de densidad	Parámetros	Esperanza	Varianza
$f(x)=\frac{\alpha}{x}\cdot\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}$ $x \geq x_0$	α, x_0 $\alpha, x_0 > 0$	$\frac{\alpha \cdot x_0}{\alpha - 1}$ $\alpha > 1$	$\frac{\alpha \cdot x_0^2}{(\alpha-2)\cdot(\alpha-1)^2}$ $\alpha > 2$

Ejemplo 3.11. El ingreso mensual, en unidades monetarias, de las personas que trabajan en una empresa es una variable aleatoria con distribución[2]:

$$F(x)=1-\left(\frac{50}{x}\right)^{1,75} \quad x \geq 50.$$

La probabilidad de que un individuo tenga un salario superior a 200 unidades monetarias es

$$p[X>200]=1-F(200)=\left(\frac{50}{200}\right)^{1,75}=0,88.$$

[2]Derivando la función de distribución se obtiene la función de densidad correspondiente a la distribución de Pareto de parámetros 1,75 y 50.

Distribuciones continuas: Gamma

Notación simbólica	Función de densidad	Parámetros	Esperanza	Varianza	Propiedad
$X \to \gamma(a,p)$	$f(x) = \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot x^{p-1} \cdot e^{-a \cdot x}$ $x > 0$ Donde* $\Gamma(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$	a, p $a, p > 0$	$\dfrac{p}{a}$	$\dfrac{p}{a^2}$	$\gamma(a,1) \equiv \mathcal{E}(a)$

*Se cumple que: $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1)$, y, si $n \in \mathbb{Z}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Ejemplo 3.12. La renta mensual, en miles de euros, de los habitantes de cierto municipio es una variable con distribución gamma de parámetros $a = 1$ y $p = 3$. La renta mensual esperada es igual a $3/1 = 3$ mil euros.

Distribuciones continuas: Beta

Notación simbólica	Función de densidad	Parámetros	Esperanza	Varianza
$X \to \beta(p,q)$	$f(x)=\dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}\cdot x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}$ $0<x<1$ Donde* $\Gamma(p)=\int_{-\infty}^{\infty} x^{p-1}\cdot e^{-x}\cdot dx$	p,q $p,q>0$	$\dfrac{p}{p+q}$	$\dfrac{p\cdot q}{(p+q+1)\cdot(p+q)^2}$

*Se cumple: $\Gamma(1)=1$; $\Gamma(p)=(p-1)\cdot\Gamma(p-1)$, y, si $n\in\mathbb{Z}$, $\Gamma(n)=(n-1)!$

Ejemplo 3.13. La proporción de personas que compran cierto producto en la semana posterior a ver su anuncio por televisión es una variable aleatoria con distribución beta de parámetros p = 3 y q = 2. La probabilidad de que, tras ver el anuncio, el porcentaje de personas que compren en la semana posterior sea superior al 80 % es:

$$p[X>0{,}8]=\int_{0,8}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{0,8}^{1} 12\cdot x^3\cdot(1-x)dx=0{,}18.$$