Marta Guijarro Garvi / David Gutiérrez Sobrao.

Este material se publica bajo licencia Creative Commons 4.0 Internacional BY-NC-SA

# Tema 2. Problemas propuestos*

**2.1** Sea $(X, Y)$ una variable aleatoria con función de probabilidad:

| $X \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 2 | 0,2 | 0,1 | 0 |
| 3 | 0,1 | 0,2 | 0 |

a) Hállese la distribución de la variable $X$ condicionada por $Y = 2$.
b) Calcúlese la distribución de la variable $Y$ condicionada por $X = 1$.
c) Hállese $p\,[X = 2/X + Y = 3]$.
d) Obténganse las rectas de regresión y analícese la bondad de los ajustes.

**2.2** Una papelería tiene una cantidad $X$ de miles de bolígrafos al principio de cada mes, vendiéndose durante el mes $Y$ miles de unidades de dicho producto. La distribución conjunta de las variables $X$ e $Y$ es

$$f\,(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que hubiera al menos 700 bolígrafos al principio del mes?
b) Si se han vendido 500 bolígrafos, ¿cuál es la probabilidad de que hubiera al menos 700 bolígrafos al principio del mes?
c) Hállese el número esperado de bolígrafos al principio del mes.
d) Obténgase el número esperado de bolígrafos a principio de mes, sabiendo que se han vendido 500 bolígrafos.

**2.3**[1] La variable $X$ mide los ingresos trimestrales, en miles de euros, de las familias de una muestra y la variable $Y$, los gastos trimestrales en alimentos de las mismas familias y en las mismas unidades. La distribución conjunta es

$$f\,(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{24} \cdot (x + y) & 0 < x < 4,\ 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese la probabilidad de que una familia con ingresos trimestrales de 3 mil euros tenga unos gastos en alimentación comprendidos entre 1 y 2 mil euros.

**2.4** Una empresa se dedica a la fabricación de un cierto tipo de piezas. Debido a la tecnología empleada, la longitud, $X$, y el grosor, $Y$, (ambas magnitudes en milímetros) de cada unidad producida son variables aleatorias con funciones de densidad:

$$f_X\,(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} & 10 < x < 15 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f_Y\,(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{6} & 2 < y < 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

---

* Problemas extraídos de Guijarro, M. y Gutiérrez, D. (2024). Estadística II: esquemas de la asignatura. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Cantabria.

1. Problema de Fernández-Abascal, H., Guijarro, M., Rojo, J. L. y Sanz, J. A. (1994). *Cálculo de Probabilidades y Estadística.* Ariel Economía.

a) ¿Qué hipótesis es necesario añadir para poder obtener la distribución conjunta de las variables $X$ e $Y$ de modo que las densidades anteriores sean las respectivas marginales?
b) Admitiendo la validez de la hipótesis a la que alude el apartado anterior, ¿qué longitud cabe esperar en una pieza cuyo grosor sea de 3,7 milímetros?

**2.5**[2] Se realiza un estudio sobre la condición de los trabajadores de un sector del pequeño comercio. Siendo $X$ el número de trabajadores por establecimiento e $Y$ el número de los que no pertenecen a la familia propietaria de dicho establecimiento, se ha obtenido la siguiente función de probabilidad conjunta:

| $X \setminus Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2/9 | 1/9 | 0 |
| 2 | 1/9 | 2/9 | 0 |
| 3 | 0 | 1/9 | 2/9 |

a) Hállense las rectas de regresión y estúdiese la bondad de los ajustes.
b) Obténganse las esperanzas condicionadas.

**2.6** El número de automóviles, en miles de unidades, que se venden anualmente en un concesionario, $X$, y el número de ellos que tienen motor de gasolina, $Y$, tienen la siguiente distribución:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{9} & 0 < y < x < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese la probabilidad de que en un cierto año el número de coches vendidos sea inferior a 2 mil.
b) Calcúlese el número medio anual de coches con motor de gasolina vendidos en el concesionario.
c) Si en un año se han vendido 2 mil coches en este concesionario, obténgase el número esperado de automóviles vendidos con motor de gasolina.

**2.7** Una compañía telefónica ha llevado a cabo un análisis sobre la repercusión que su última campaña de publicidad ha tenido en el número de llamadas. El estudio, sobre una muestra de clientes, indica que las proporciones de llamadas a fijos, $X$, y de llamadas a móviles $Y$, realizadas durante un mes, tienen la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) ¿Existe relación entre la proporción de llamadas a móviles y la proporción de llamadas a fijos que un cliente realiza en un mes?
b) Si el 70 por ciento de las llamadas que una cliente hace en un mes ha sido a otros móviles, ¿cuál es el porcentaje medio de llamadas realizadas a teléfonos fijos?

2. *Ibid.*

**2.8** El número de pizzas, en miles de unidades, que se venden semanalmente en un establecimiento es una variable aleatoria, $X$, con distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una semana se vendan menos de 500 pizzas?
b) Sabiendo que en una semana se han vendido al menos 200 pizzas, ¿qué probabilidad hay de que se vendan más de 700?

Además, el número de pizzas "carbonara", en miles de unidades, que se venden semanalmente en dicho establecimiento, es una variable aleatoria, $Y$, tal que la función de densidad conjunta entre $X$ e $Y$ es

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

c) Hállese el número medio de pizzas "carbonara" vendidas en una semana en la que se han vendido 800 pizzas.
d) Si en una semana se han vendido 300 pizzas "carbonara", ¿cuál es la probabilidad de que se hayan vendido menos de 500 pizzas?

**2.9** Un establecimiento de carcasas para móviles tiene $X$ carcasas al comienzo de cada mes. Durante el mes se venden $Y$ carcasas (ambas variables están expresadas en miles). La distribución conjunta viene dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese la probabilidad de que en un mes se vendan menos de 350 carcasas.
b) Sabiendo que a comienzos del próximo mes el establecimiento tendrá 500 carcasas, ¿cuál es la probabilidad de que se vendan menos de 350?

**2.10** Un establecimiento de productos dietéticos tiene $X$ unidades de un complejo vitamínico a comienzos de cada año. Durante el año se venden $Y$ unidades de dicho producto (ambas variables están expresadas en miles). La distribución conjunta de $X$ e $Y$ es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < y < x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese la probabilidad de que en un cierto año se vendan menos de mil unidades del complejo vitamínico.
b) Sabiendo que a comienzos del próximo año el establecimiento tendrá 1,4 miles de unidades del complejo vitamínico, ¿cuántas unidades espera vender?

**2.11** Un estudio sobre seguridad vial recoge que la proporción de personas con edad comprendida entre 18 y 35 años que anualmente tienen un accidente de tráfico, $X$, y la proporción de personas con edades entre 35 y 55 años que sufren anualmente un accidente, $Y$, tienen la siguiente distribución conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{25}{8} & x > 0, y > 0, x + y < 0{,}8 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Si en un año el porcentaje de accidentados con una edad entre 18 y 35 años ha sido del 30 %, hállese el porcentaje esperado de personas accidentadas con una edad entre 35 y 55 años.
b) Si en un cierto año el porcentaje de accidentados con una edad entre 18 y 35 años ha sido del 30 %, ¿cuál es la probabilidad de que el porcentaje de personas accidentadas con edades comprendidas entre los 35 y los 55 años haya sido superior al 20 %?