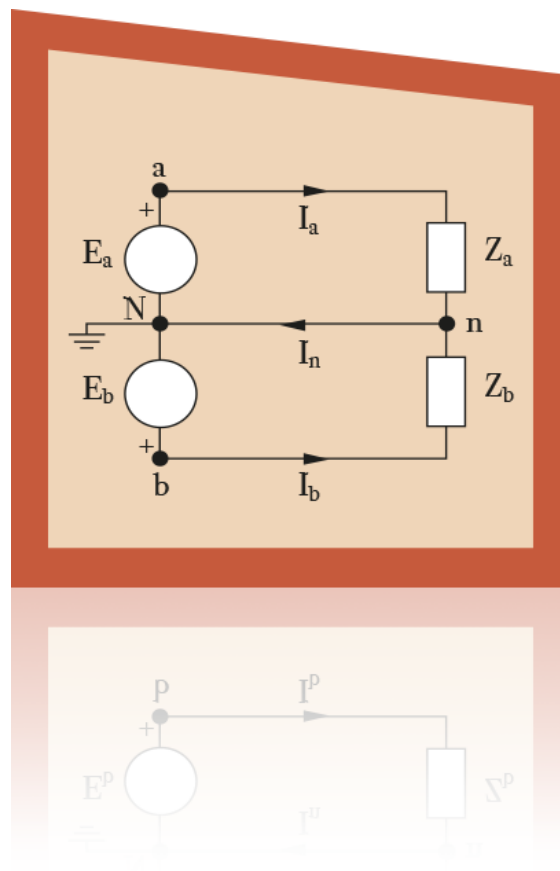


Teoría de Circuitos I

Tema 3. Polifásica III. Componentes simétricas



Profesores

Alberto Arroyo Gutiérrez

Pablo Benavente Rico

Eugenio Sainz Ortiz

Sergio Bustamante Sánchez

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Luis Vejo Fernández

Departamento de Transportes y Tecnología de Proyectos y Procesos

GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

TEORÍA DE CIRCUITOS I. 2º Curso.

Tema 3:

SISTEMAS POLIFÁSICOS III

1. Introducción.
2. Teorema de Fortescue.
3. Determinación gráfica de las componentes simétricas. Método general.
4. Determinación gráfica de un sistema de vectores, a partir de sus componentes simétricas.
5. Componentes simétricas de las tensiones compuestas y de las intensidades de línea.

COMPONENTES SIMÉTRICAS

1. INTRODUCCIÓN

Se dice que un circuito polifásico es **asimétrico o está desequilibrado**, cuando las ff.ee.mm. de los generadores de alimentación, no están equilibradas o cuando los receptores no están simétricamente conectados a la red. Se trate de una u otra causa, resulta que las tensiones e intensidades dejan de estar equilibradas. Esta situación se da, con frecuencia, en los sistemas de transporte y distribución de energía eléctrica cuando se producen cortocircuitos. El procedimiento más utilizado para estudiar estos **circuitos polifásicos desequilibrados** es el **método de las componentes simétricas** llamado también de coordenadas simétricas, que responde, esencialmente, a la siguiente propiedad geométrica: **todo sistema de q vectores, puede ser considerado como resultante de q sistemas simétricos de q vectores**. Esta técnica ha sido desarrollada, primeramente, por Stokvis y, generalmente, se conoce como **Método de Fortescue**. Se realiza, a continuación, el estudio de las componentes simétricas, aplicado a un sistema de tres vectores.

2. TEOREMA DE FORTESCUE

Este teorema, aplicado a un conjunto de tres vectores, establece la descomposición del mismo en tres sistemas:

- 1- Uno, denominado "sistema directo", de la misma secuencia de fases que el original.
- 2- Otro, denominado "sistema inverso", de secuencia de fases contraria a la del sistema original.
- 3- Un conjunto de tres vectores de la misma magnitud y fase, denominado "sistema homopolar".

Previamente, **se define el operador a** que permite relacionar los fasores de cualquier sistema trifásico equilibrado; este operador es un fasor unitario de 120° de argumento, por tanto:

$$a = 1_{/120^\circ}, \quad a^2 = 1_{/240^\circ}, \quad a^3 = 1, \quad a^4 = a, \quad a^5 = a^2, \quad a^6 = 1, \quad \dots \quad (2.1)$$

Se verifica:

$$1 + a + a^2 = 0 \quad (2.2)$$

Igualmente :

$$1 - a^2 = \sqrt{3} / 30^\circ, \quad 1 - a = \sqrt{3} / -30^\circ \quad (2.3)$$

Estas propiedades del operador a se ilustran en la figura 1.

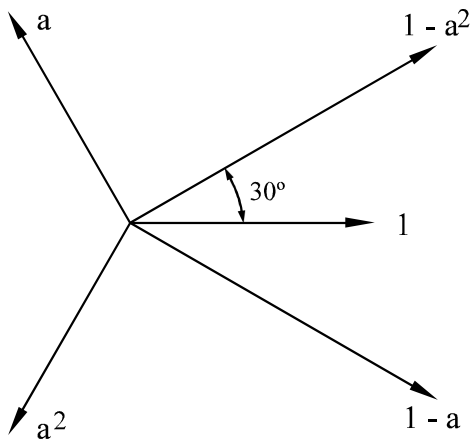


Figura 1. Representación del operador a y alguna de sus relaciones.

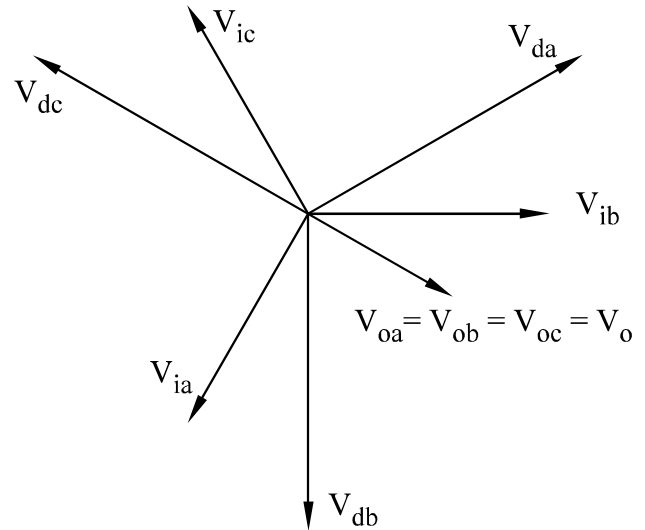


Figura 2. Componentes simétricas de un sistema trifásico.

En la figura 2, se representan las componentes simétricas de un sistema genérico de tensiones trifásicas; aunque son nueve magnitudes distintas pueden ponerse en función de tres; efectivamente, se verifica:

SISTEMA DIRECTO:

$$\bar{V}_{da} = \bar{V}_d, \quad \bar{V}_{db} = a^2 \bar{V}_d, \quad \bar{V}_{dc} = a \bar{V}_d$$

SISTEMA INVERSO:

$$\bar{V}_{ia} = \bar{V}_i, \quad \bar{V}_{ib} = a \bar{V}_i, \quad \bar{V}_{ic} = a^2 \bar{V}_i \quad (2.4)$$

SISTEMA HOMOPOLAR:

$$\bar{V}_{oa} = \bar{V}_{ob} = \bar{V}_{oc} = \bar{V}_o$$

siendo V_{dk} , V_{ik} , V_{ok} las componentes directa, inversa y homopolar, respectivamente, de la tensión V_k . Igualmente, I_{dk} , I_{ik} , I_{ok} serán las componentes simétricas de la intensidad I_k , siendo k las tres fases del sistema trifásico.

Sea un sistema trifásico desequilibrado $\bar{V}_a, \bar{V}_b, \bar{V}_c$. Si la descomposición es posible, ha de cumplirse:

$$\begin{aligned}\bar{V}_a &= \bar{V}_o + \bar{V}_d + \bar{V}_i \\ \bar{V}_b &= \bar{V}_o + a^2 \bar{V}_d + a \bar{V}_i \\ \bar{V}_c &= \bar{V}_o + a \bar{V}_d + a^2 \bar{V}_i\end{aligned}\tag{2.5}$$

En forma matricial, resulta (2.6).

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_o \\ \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \end{bmatrix}\tag{2.6}$$

Sumando las ecuaciones de (2.5), resulta:

$$3\bar{V}_o = \bar{V}_a + \bar{V}_b + \bar{V}_c$$

Sumando a la primera, la 2ª multiplicada por a y la tercera multiplicada por a^2 , resulta:

$$3\bar{V}_d = \bar{V}_a + a\bar{V}_b + a^2\bar{V}_c$$

Sumando a la primera, la 2ª multiplicada por a^2 y la tercera multiplicada por a , resulta:

$$3\bar{V}_i = \bar{V}_a + a^2\bar{V}_b + a\bar{V}_c$$

Las ecuaciones (2.7), permiten la determinación de las componentes simétricas de las tensiones desequilibradas $\bar{V}_a, \bar{V}_b, \bar{V}_c$:

$$\begin{aligned}\bar{V}_o &= \frac{1}{3} (\bar{V}_a + \bar{V}_b + \bar{V}_c) \\ \bar{V}_d &= \frac{1}{3} (\bar{V}_a + a\bar{V}_b + a^2\bar{V}_c) \\ \bar{V}_i &= \frac{1}{3} (\bar{V}_a + a^2\bar{V}_b + a\bar{V}_c)\end{aligned}\tag{2.7}$$

que escritas en forma matricial, quedan:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_o \\ \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

(2.6) y (2.8) definen dos transformaciones lineales inversas, siendo:

$$(\bar{V}) = \begin{bmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{bmatrix} \quad \text{el vector de } \textbf{tensiones originales},$$

$$(\bar{V}_F) = \begin{bmatrix} \bar{V}_o \\ \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \end{bmatrix} \quad \text{el vector de } \textbf{componentes simétricas},$$

$$(\bar{F}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad \text{la } \textbf{matriz de Fortescue},$$

$$(\bar{F})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad \text{la } \textbf{matriz inversa de Fortescue}.$$

Por tanto, (2.6) y (2.8), pueden expresarse de forma más simplificada:

$$(\bar{V}) = (\bar{F}) (\bar{V}_F) \quad (2.9)$$

$$(\bar{V}_F) = (\bar{F})^{-1} (\bar{V}) \quad (2.10)$$

Finalmente, (2.10) permite la determinación de las componentes simétricas de un sistema trifásico cualquiera. Correlativamente, a partir de (2.9) se puede hallar el sistema trifásico original conociendo sus componentes simétricas.

Aplicación a un sistema equilibrado

En un sistema trifásico equilibrado de secuencia directa, las componentes inversa y homopolar son nulas. Efectivamente, sea el sistema de tensiones $\bar{V}_a = \bar{V}$; $\bar{V}_b = a^2 \bar{V}$; $\bar{V}_c = a \bar{V}$; aplicando (2.7), resulta:

$$\begin{aligned}\bar{V}_d &= \frac{\bar{V}_a}{3} (1 + a^3 + a^3) = \bar{V}_a \\ \bar{V}_i &= \frac{\bar{V}_a}{3} (1 + a^4 + a^2) = 0 \\ \bar{V}_o &= \frac{\bar{V}_a}{3} (1 + a^2 + a) = 0\end{aligned}\tag{2.11}$$

Del mismo modo, si el circuito es de secuencia inversa sus componentes directa y homopolar son nulas.

3. DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LAS COMPONENTES SIMÉTRICAS. MÉTODO GENERAL

Sean las tensiones trifásicas $\bar{V}_a$, $\bar{V}_b$, $\bar{V}_c$ de la figura 3(a).

Aplicando (2.7), resulta:

- $3\bar{V}_o$ es la resultante de las tensiones $\bar{V}_a$, $\bar{V}_b$, $\bar{V}_c$. Figura 3(b).
- $3\bar{V}_d$, se obtiene sumando a $\bar{V}_a$ la tensión $\bar{V}_b'$ -obtenida mediante la rotación de $\frac{2\pi}{3}$ radianes o 120° en sentido positivo de $\bar{V}_b$ - y $\bar{V}_c'$ que resulta de la rotación de $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ o (-120°) en la tensión $\bar{V}_c$. Figura 3(c).
- $3\bar{V}_i$, se obtiene adicionando a $\bar{V}_a$ la tensión $\bar{V}_b''$, a través de la rotación de $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ radianes o (-120°) de $\bar{V}_b$ y $\bar{V}_c''$, que resulta del giro $\frac{2\pi}{3}$ radianes o 120° de $\bar{V}_c$. Figura 3(d).

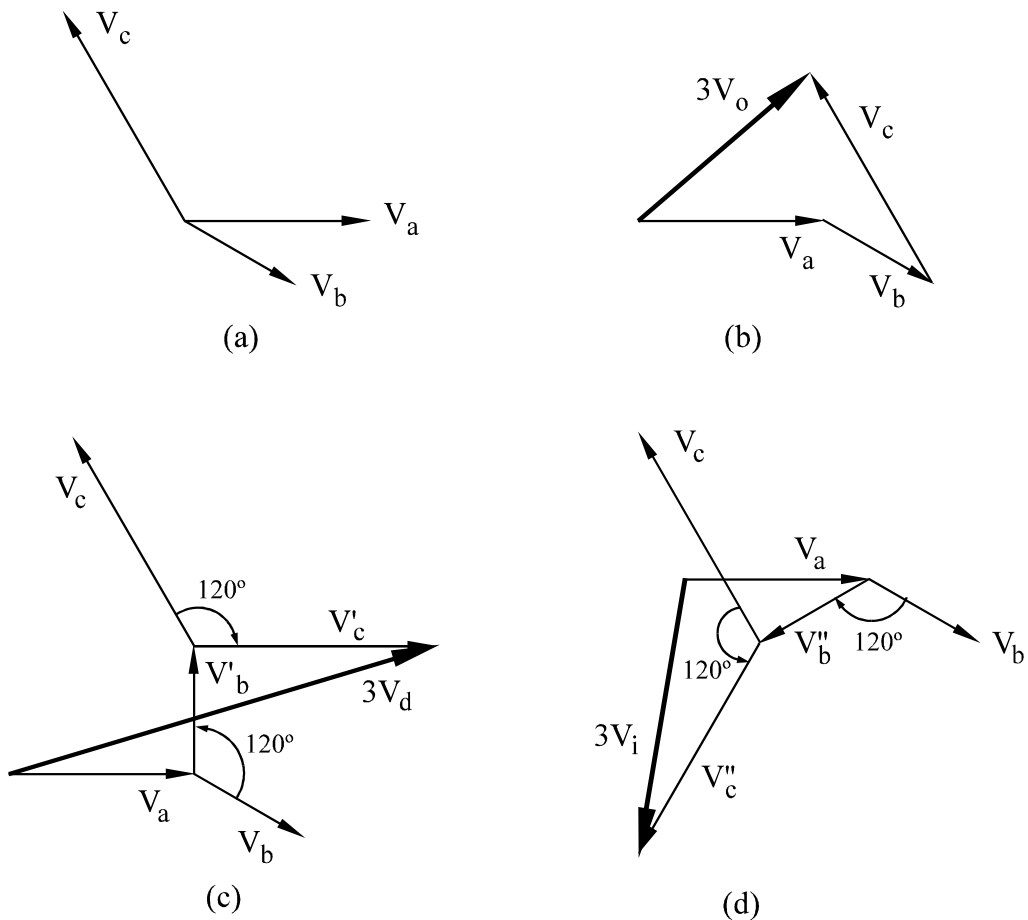


Figura 3. Determinación gráfica de las componentes simétricas. (a) Sistema original desequilibrado. (b) Cálculo de la componente homopolar. (c) Cálculo de la componente directa. (d) Cálculo de la componente inversa.

4. DETERMINACIÓN GRÁFICA DE UN SISTEMA DE VECTORES, A PARTIR DE SUS COMPONENTES SIMÉTRICAS

Si se conocen las componentes simétricas de un sistema, se pueden determinar las tensiones $\bar{V}_a$, $\bar{V}_b$ y $\bar{V}_c$, mediante una resolución gráfica que aplica, directamente, las ecuaciones (2.5).

La figura 7, indica el método de operación. La figura 7(a) representa el sistema directo, la figura 7(b), el inverso y la figura 7(c), el homopolar. En la figura 7(d) se aplican las ecuaciones (2.5) para obtener las tensiones $\bar{V}_a$, $\bar{V}_b$, $\bar{V}_c$.

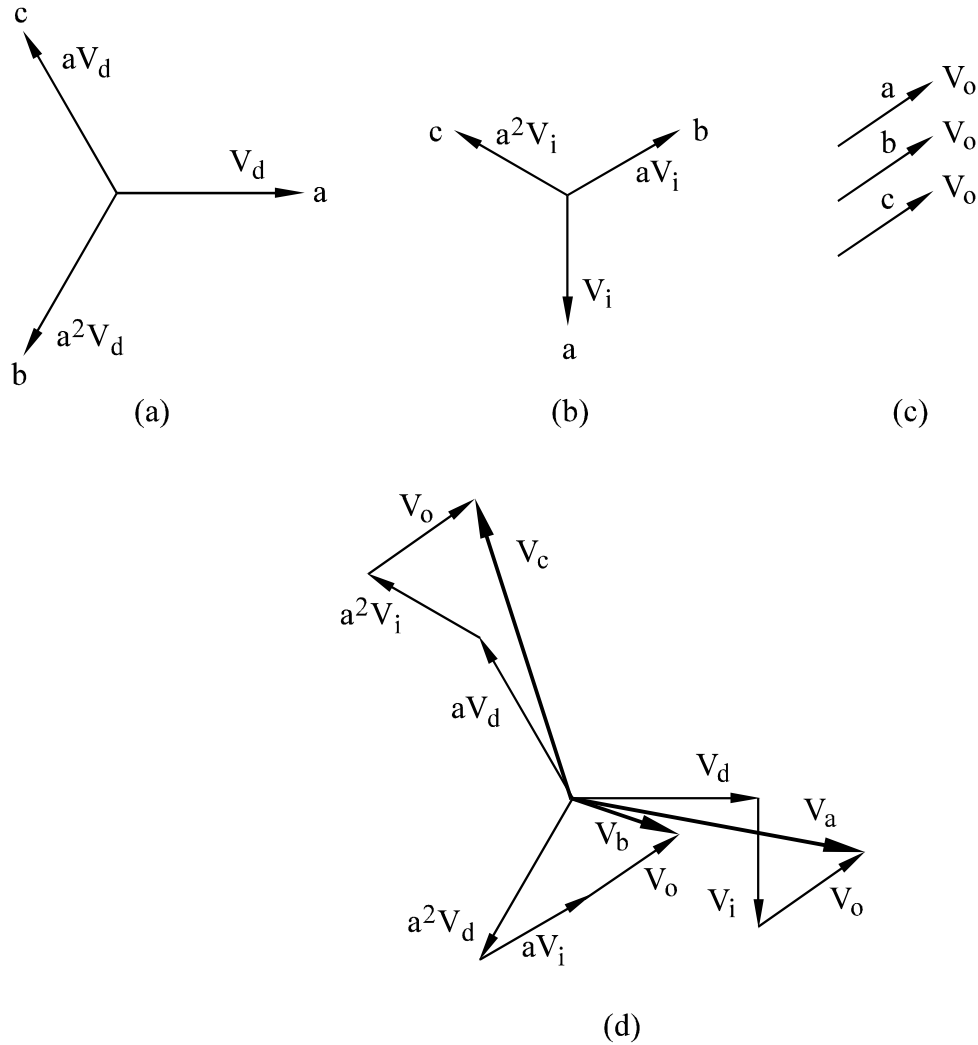


Figura 7. Determinación gráfica de un sistema de tensiones, a partir de sus componentes simétricas. (a) Sistema directo. (b) Sistema inverso. (c) Sistema homopolar. (d) Sistema desequilibrado de tensiones resultante.

5. COMPONENTES SIMÉTRICAS DE LAS TENSIONES COMPUESTAS Y DE LAS INTENSIDADES DE LÍNEA

Sea el sistema de tensiones simples $\bar{V}_a$, $\bar{V}_b$, $\bar{V}_c$ de la estrella de la figura 8, cuyas componentes simétricas son $\bar{V}_o$, $\bar{V}_d$, $\bar{V}_i$.

Las tensiones de línea, del sistema de la figura 8, son:

$$\bar{V}_{ab} = \bar{V}_a - \bar{V}_b$$

$$\bar{V}_{bc} = \bar{V}_b - \bar{V}_c \quad (5.1)$$

$$\bar{V}_{ca} = \bar{V}_c - \bar{V}_a$$

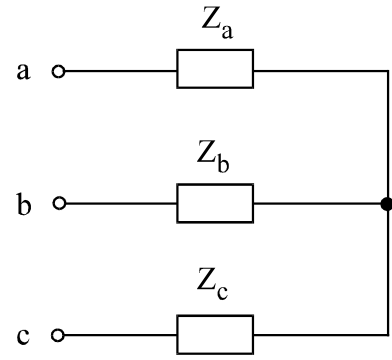


Figura 8. Sistema receptor en estrella.

Como todo sistema de tensiones de línea cumple (5.2):

$$\sum \bar{V}_{ij} = 0 \quad (5.2)$$

la componente homopolar de las tensiones compuestas es nula:

$$\bar{V}_{oL} = \frac{\bar{V}_{ab} + \bar{V}_{bc} + \bar{V}_{ca}}{3} = 0 \quad (5.3)$$

Sustituyendo, en la ecuación (5.1), las tensiones simples, en función de sus componentes simétricas, resulta:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{ab} &= (1 - a^2) \bar{V}_d + (1 - a) \bar{V}_i \\ \bar{V}_{bc} &= (a^2 - a) \bar{V}_d + (a - a^2) \bar{V}_i \\ \bar{V}_{ca} &= (a - 1) \bar{V}_d + (a^2 - 1) \bar{V}_i \end{aligned} \quad (5.4)$$

Las relaciones (5.4) muestran que el sistema de tensiones compuestas puede ser descompuesto en un sistema directo:

$$[(1 - a^2) \bar{V}_d, (a^2 - a) \bar{V}_d, (a - 1) \bar{V}_d].$$

y un sistema inverso

$$[(1 - a) \bar{V}_i, (a - a^2) \bar{V}_i, (a^2 - 1) \bar{V}_i].$$

De acuerdo con (5.4), el sistema directo de las tensiones de línea, se deduce del sistema directo de las simples, con un giro de $\frac{\pi}{6}$ radianes (30°)

en sentido positivo y un valor eficaz $\sqrt{3}$ veces superior. El sistema inverso de las tensiones de línea, se deduce del inverso de las simples, haciéndolas girar $\frac{\pi}{6}$ radianes (30°) en sentido negativo y siendo su valor eficaz $\sqrt{3}$ veces superior; es decir:

$$\bar{V}_{dL} = (1 - a^2) \bar{V}_d = \sqrt{3} \bar{V}_{d/30^\circ} \quad (5.5)$$

$$\bar{V}_{iL} = (1 - a) \bar{V}_i = \sqrt{3} \bar{V}_{i/-30^\circ}$$

Las relaciones entre las componentes simétricas de las corrientes de línea y las del receptor triángulo, resultan similares a las existentes entre tensiones de línea y de fase en una conexión estrella.

La figura 9, muestra los dos sistemas de corrientes de un receptor en triángulo. Se designan $\bar{I}_d, \bar{I}_i, \bar{I}_o$, las componentes simétricas de las corrientes de receptor $\bar{I}_{ab}, \bar{I}_{bc}, \bar{I}_{ca}$. Las relaciones (5.6) resultan de la aplicación de la primera Ley de Kirchhoff en la red de la figura 9.

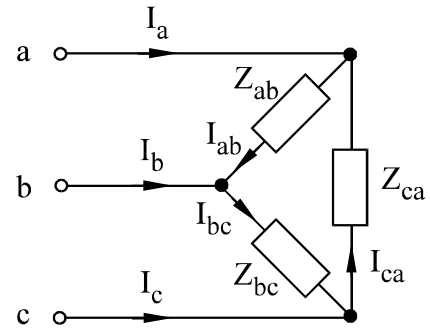


Figura 9. Sistema receptor en triángulo.

$$\begin{aligned} \bar{I}_a &= \bar{I}_{ab} - \bar{I}_{ca} = (1 - a) \bar{I}_d + (1 - a^2) \bar{I}_i \\ \bar{I}_b &= \bar{I}_{bc} - \bar{I}_{ab} = (a^2 - 1) \bar{I}_d + (a - 1) \bar{I}_i \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\bar{I}_c = \bar{I}_{ca} - \bar{I}_{bc} = (a - a^2) \bar{I}_d + (a^2 - a) \bar{I}_i$$

La componente homopolar es nula, ya que en toda red a tres hilos la suma de las tres corrientes de línea es cero.

De acuerdo a (5.6), resulta:

$$\bar{I}_{dL} = \sqrt{3} \cdot \bar{I}_{d/-30^\circ} \quad (5.7)$$

$$\bar{I}_{iL} = \sqrt{3} \cdot \bar{I}_i / 30^\circ$$

Nótese que el método de Fortescue descompone, de forma natural, una red equilibrada en subsistemas equilibrados. Se ha demostrado -en el apartado 2- que un sistema equilibrado de secuencia directa sólo tiene componente directa, no resultando necesarias las restantes componentes. Igualmente, la relación entre las tensiones de línea y las de fase de receptores en estrella equilibrados, de secuencias directa o inversa, son las dadas por (5.5). Similarmente sucede en la relación entre las intensidades de línea y las de receptor en la conexión triángulo, dadas por (5.7).