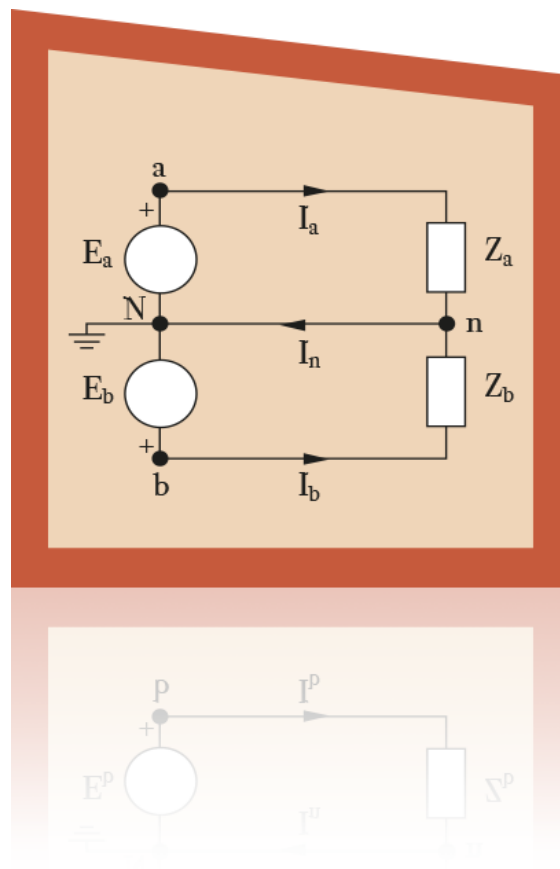


Teoría de Circuitos I

Tema 4. Circuitos con acoplamiento magnético



Profesores

Alberto Arroyo Gutiérrez

Pablo Benavente Rico

Eugenio Sainz Ortiz

Sergio Bustamante Sánchez

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Luis Vejo Fernández

Departamento de Transportes y Tecnología de Proyectos y Procesos

GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

TEORÍA DE CIRCUITOS I. 2º Curso.

Tema 4:

CIRCUITOS CON ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO

1. Introducción.
2. Bobinas acopladas magnéticamente. Inducción mutua.
3. Análisis de redes con acoplamientos magnéticos. Régimen permanente sinusoidal.
4. Regla de los puntos.
5. Circuito equivalente de una red con acoplamiento magnético.
6. El transformador como elemento del circuito.

CIRCUITOS CON ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO

1. INTRODUCCIÓN

El electromagnetismo es la rama de la ingeniería eléctrica (o de la física) que tiene que ver con el análisis y aplicación de campos eléctricos y magnéticos.

Los **principios electromagnéticos** se aplican en varias disciplinas afines, como máquinas eléctricas, conversión de energía electromecánica, meteorología por radar, sensores remotos, comunicaciones satelitales, interferencia y compatibilidad electromagnéticas, plasmas y fibra óptica.

Los **dispositivos electromagnéticos** incluyen motores y generadores eléctricos, transformadores, electroimanes, antenas, radares, hornos de microondas, antenas parabólicas, superconductores y electrocardiogramas.

Hasta ahora se han visto circuitos con varias mallas y nudos en los que el acoplamiento era de tipo conductivo (acoplamiento de elementos de circuitos de forma que circule o conduzca corriente).

Ahora se abordarán circuitos en los que, sin perjuicio de que pueda existir acoplamiento conductivo, existe un acoplamiento magnético o inductivo.

Dos o más circuitos se dice que **están acoplados** cuando intercambian energía. Las intensidades de las corrientes que circulan por uno de ellos no dependen únicamente de los parámetros de sus propios elementos, sino que dependen también de los parámetros mutuos o de acoplamiento así como de los propios de los circuitos con los que está acoplado.

El **transformador** es un dispositivo eléctrico **diseñado** con base en el concepto de **acoplamiento magnético**. Se sirve de bobinas magnéticamente acopladas para transferir energía de un circuito a otro. Los transformadores son elementos clave de circuitos siendo una de sus importantes aplicaciones la distribución de energía eléctrica. Se usan en sistemas eléctricos para aumentar o reducir tensiones o corrientes de c.a. También se les emplea en circuitos electrónicos, como en receptores de radio y televisión, para propósitos tales como acoplamiento de impedancias y aislamiento de una parte de un circuito respecto de otra.

2. BOBINAS ACOPLADAS MAGNÉTICAMENTE. INDUCCIÓN MUTUA.

Cuando dos bobinas están en estrecha proximidad entre sí, el flujo magnético causado por la corriente en una bobina se relaciona con la otra bobina, lo que induce tensión en ésta última. Este fenómeno se conoce como **inducción o inductancia mutua**.

Se sabe que cuando una espira es atravesada por una intensidad i , variable en el tiempo, se crea un flujo ϕ también variable en el tiempo y como consecuencia una f.e.m. inducida que se opone a la causa que lo produce. (Ley de Lenz).

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

Si el arrollamiento tiene N espiras (bobina con N vueltas):

$$e = - N \frac{d\phi}{dt} = - N \frac{d\phi}{di} \cdot \frac{di}{dt} = - L \frac{di}{dt}.$$

Siendo L el coeficiente de autoinducción o autoinductancia, definido por:

$$L = N \frac{d\phi}{di}$$

L será constante en medios lineales o en tramos lineales de medios que no lo son y se verificará:

$$L = N \frac{\phi}{i}$$

Esta f.e.m. inducida es el origen de la caída de potencial en una bobina de inducción:

$$v_L = L \frac{di}{dt} = -e.$$

Suponiendo ahora **dos espiras**, figura 2.1; por las que circulan $i_1(t)$ e $i_2(t)$ inicialmente aisladas. Aparecerán unos flujos ϕ_1 y ϕ_2 debido a dichas intensidades.

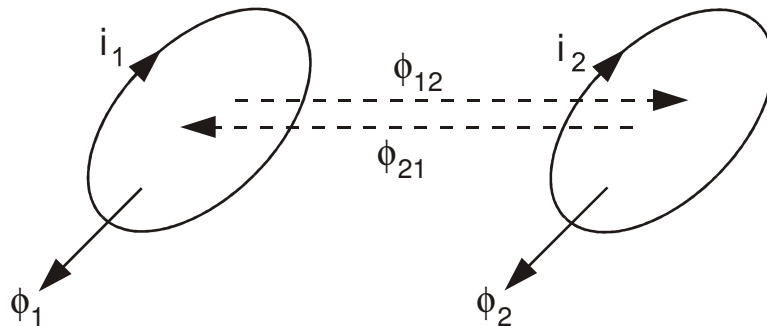


Figura 2.1. Espiras acopladas magnéticamente.

Si las espiras anteriores tienen ahora N_1 vueltas la primera (bobina 1) y N_2 vueltas la segunda (bobina 2) se **acoplan magnéticamente**, cuando parte del flujo de la bobina 1 atraviesa la 2 y parte del flujo de la bobina 2 atraviesa la 1.

Sea:

$$\phi_{12} = \text{la parte de } \phi_1 \text{ que atraviesa la 2.}$$

$$\phi_{21} = \text{la parte de } \phi_2 \text{ que atraviesa la 1.}$$

Como consecuencia de ello, además de la f.e.m. de autoinducción, aparecerán otras ff.ee.mm. inducidas debidas al acoplamiento, llamadas **ff.ee.mm. de inducción mutua** que valdrán:

$$e_{m_1} = -N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt} = -N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \cdot \frac{di_2}{dt} = -M_{21} \frac{di_2}{dt}.$$

$$e_{m_2} = -N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} = -N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \cdot \frac{di_1}{dt} = -M_{12} \frac{di_1}{dt}.$$

Puede demostrarse que:

$$M_{12} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} = M_{21} = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} = M \quad \text{y se llama } \underline{\text{coeficiente de inducción o}}$$

inductancia mutua entre las dos bobinas. Es la capacidad de una bobina de inducir una tensión en una bobina cercana, se expresa en Henrios (H) y será constante en medios lineales. Hay que tener en cuenta que solo existe acoplamiento mutuo cuando las bobinas están próximas y los circuitos se excitan mediante fuentes variables en el tiempo (recuérdese que las bobinas actúan como cortocircuitos en c.c.).

El sentido de estas ff. ee. mm. será **aditivo o sustractivo**, según se sumen o resten los efectos de la autoinducción y la inducción mutua.

La relación:

$$\frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2} = K.$$

se llama **coeficiente de acoplo o acoplamiento**, es una medida del acoplamiento magnético entre dos bobinas y de su definición se observa que varia entre 0 y 1. Depende de la proximidad de las bobinas, su núcleo, su orientación y su devanado. Si el flujo completo producido por una bobina se enlaza con la otra bobina entonces $K = 1$ y se tiene un acoplamiento de 100%, o se dice que las bobinas están perfectamente acopladas. Para $K < 0,5$, se dice que las bobinas están acopladas holgadamente (en transformadores de núcleo de aire usados en circuitos de radiofrecuencia); y para $K > 0,5$, se dice que están acopladas estrechamente (en transformadores de núcleo de hierro usados en sistemas eléctricos).

Se puede obtener la **relación entre K y M**.

Efectivamente:

$$M = N_1 \frac{\phi_{21}}{di_2} = N_2 \frac{\phi_{12}}{di_1}$$

Donde:

$$M^2 = \frac{N_1 \phi_2}{i_2} \cdot \frac{\phi_{21}}{\phi_2} \cdot \frac{N_2 \phi_1}{i_1} \cdot \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = K^2 \frac{N_2 \phi_2}{i_2} \cdot \frac{N_1 \phi_1}{i_1} = K^2 L_1 L_2.$$

Por tanto:

$$M = K \sqrt{L_1 L_2}$$

Se sabe que la **energía almacenada en una bobina** viene dada por la expresión:

$$W = \frac{1}{2} L i^2$$

La expresión general de la energía instantánea almacenada en dos bobinas acopladas magnéticamente, es:

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

Se selecciona el signo **positivo** en el término mutuo **si ambas corrientes entran o salen** de los terminales con marcas de polaridad; en caso **contrario**, se selecciona el **signo negativo**. Esta energía almacenada nunca puede ser negativa, porque el circuito es pasivo, debe ser igual o mayor que cero.

3. ANÁLISIS DE REDES CON ACOPLAMIENTOS MAGNÉTICOS. RÉGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL.

Sea el circuito acoplado de la figura 3.1.

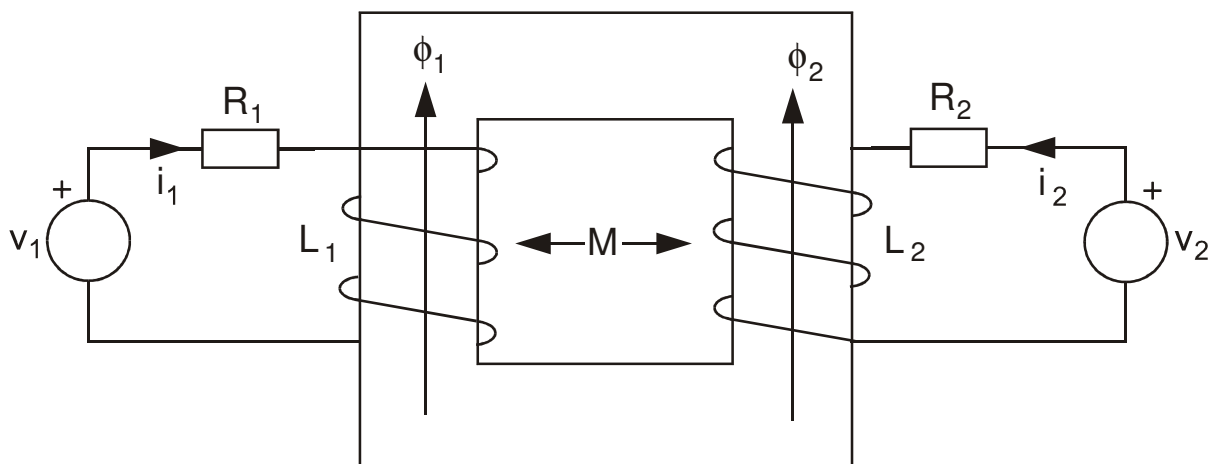


Figura 3.1. Red con acoplamiento magnético.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a cada una de las mallas, se tiene:

$$v_1 = i_1 R_1 + v_{L_1} + v_{M_1} = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}.$$

$$v_2 = i_2 R_2 + v_{L_2} + v_{M_2} = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.$$

Se verá ahora si, de acuerdo con las intensidades de rama asignadas, el efecto es aditivo o sustractivo. Empleando la **regla de la mano derecha** (agarrando la estructura magnética, los dedos son la intensidad de la corriente y el pulgar el flujo). Así se obtiene ϕ_1 y ϕ_2 . Si los flujos se **ayudan** los signos de las caídas debidas a la autoinducción (v_L) y a la inducción mutua (v_M) tienen el **mismo signo**. Si los flujos se **contraponen**, las caídas de potencial tendrán **signos contrarios**.

En este caso ϕ_1 y ϕ_2 están enfrentados, luego:

$$v_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; \quad v_2 = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

Si las fuentes son de corriente alterna sinusoidal:

$$\bar{V}_1 = \bar{I}_1 R_1 + jL_1 \omega \bar{I}_1 - jM \omega \bar{I}_2; \quad \bar{V}_2 = \bar{I}_2 R_2 + jL_2 \omega \bar{I}_2 - jM \omega \bar{I}_1$$

4. REGLA DE LOS PUNTOS

Como puede comprobarse, el estudio de los circuitos acoplados mediante el método expuesto anteriormente, aparte de tedioso, implica dibujar los bobinados. La **regla de los puntos** permitirá el **análisis de circuitos acoplados** de una forma más **cómoda y sencilla**.

Para establecer los **terminales correspondientes**, en el circuito de la figura 4.1, se procederá de la forma siguiente:

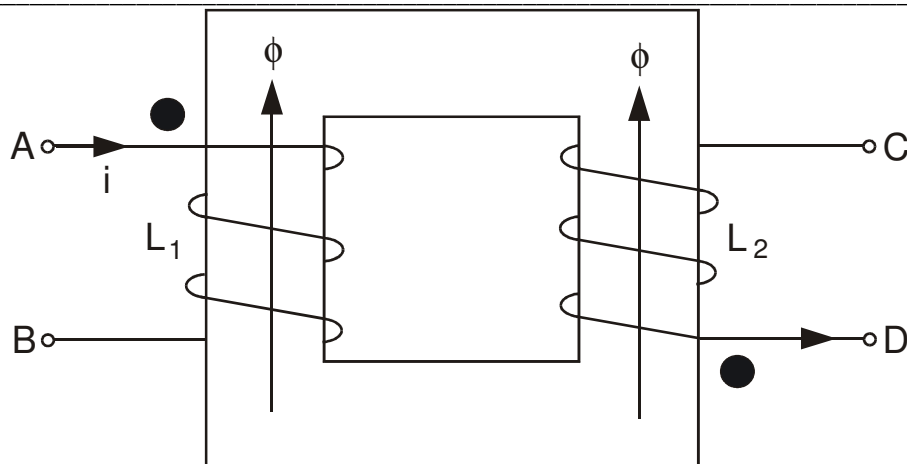


Figura 4.1 Circuito magnético.

1. Se elige un sentido para la intensidad en una de las bobinas, colocando un punto (•) por donde entra dicha corriente.
2. Se detecta el sentido del flujo que origina dicha corriente (regla de la mano derecha).
3. Empleando la misma regla, se determina el sentido de la corriente de la segunda bobina que origina un flujo opuesto al de la primera, colocando un punto (•) por donde sale la corriente.

El **acoplamiento magnético** de la figura 4.1, se representará en la figura 4.2:

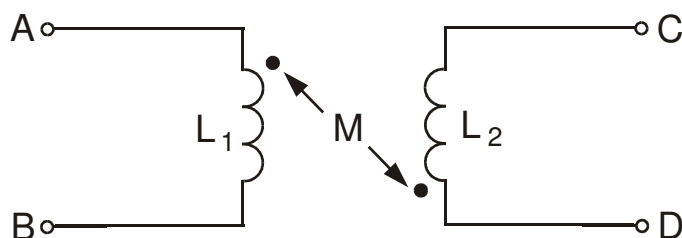


Figura 4.2 Circuito equivalente.

Una vez determinados los terminales correspondientes, la **REGLA DE LOS PUNTOS**, dice:

- A. Si las dos corrientes de las bobinas acopladas entran o salen por terminales correspondientes (con punto) los signos de los términos en M y L coinciden.
- B. Si una corriente de una bobina entra por el terminal con punto y la de la otra sale por su terminal correspondiente, los signos de los términos en M son opuestos a los de los términos en L.

En coherencia con todo lo expuesto, se deduce que la **forma más adecuada** de resolución de los **circuitos acoplados**, es utilizando el **MÉTODO DE INTENSIDADES DE MALLA**.

Para facilitar su resolución se **procurará**, siempre que sea posible, que a través de cada bobina acoplada, circule **una sola intensidad** de malla.

5. CIRCUITO EQUIVALENTE DE UNA RED CON ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO.

Se puede **sustituir el circuito acoplado** por otro que **cumpla las mismas ecuaciones** que el original. Dicho circuito se llama **circuito equivalente**.

En efecto, sea el circuito acoplado de la figura 5.1.

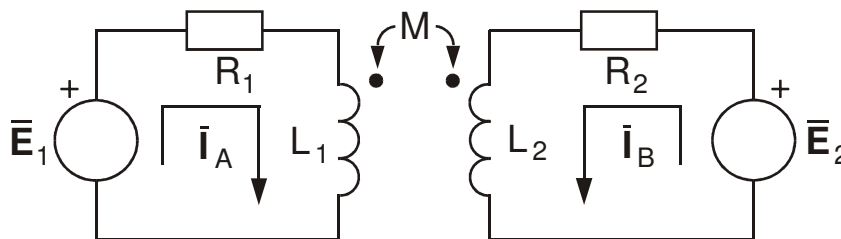


Figura 5.1.
Circuito original.

La matriz de impedancias de la red, es:

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_A \\ \bar{I}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix}$$

Se examina ahora la matriz de impedancias del circuito de la figura 5.2:

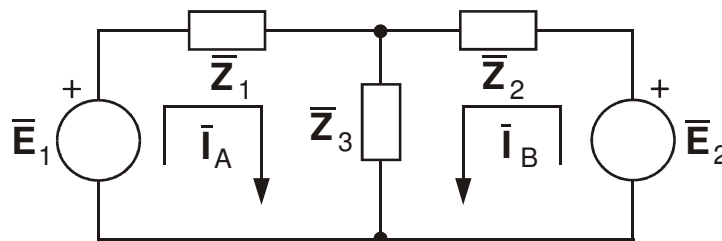


Figura 5.2. Circuito de comparación.

$$\begin{bmatrix} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_3 & \bar{Z}_3 \\ \bar{Z}_3 & \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_A \\ \bar{I}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix}$$

Si se verifica:

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_3 = R_1 + j\omega L_1 \\ \bar{\mathbf{Z}}_3 = j\omega M \\ \bar{\mathbf{Z}}_2 + \bar{\mathbf{Z}}_3 = R_2 + j\omega L_2 \end{pmatrix}$$

Los dos circuitos serán equivalentes, ya que las ecuaciones que los definen son las mismas. Por tanto, el circuito de la figura 5.1 puede ponerse como muestra la figura 5.3:

$$R_1 + j\omega L_1 - j\omega M \quad R_2 + j\omega L_2 - j\omega M.$$

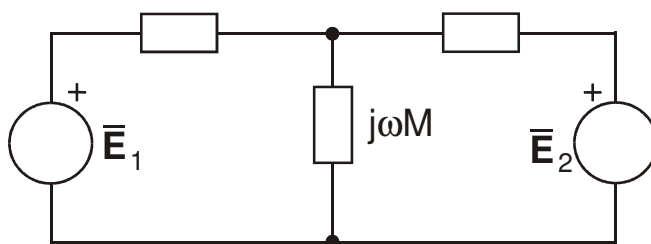


Figura 5.3. Circuito equivalente.

6. EL TRANSFORMADOR COMO ELEMENTO DEL CIRCUITO

Aquí se presentará el transformador como un elemento de circuitos. Un transformador es un dispositivo magnético que utiliza el fenómeno de la inducción mutua.

6.1 TRANSFORMADORES LINEALES

En general un transformador es un dispositivo de cuatro terminales que comprende dos (o más) bobinas magnéticamente acopladas, como se observa en la figura 6.1.1. La bobina más directamente conectada a la fuente se llama devanado primario y la bobina más directamente conectada a la carga se llama devanado secundario. Las resistencias R_1 y R_2 se incluyen para tener en cuenta las pérdidas (disipación de potencia) en las bobinas.

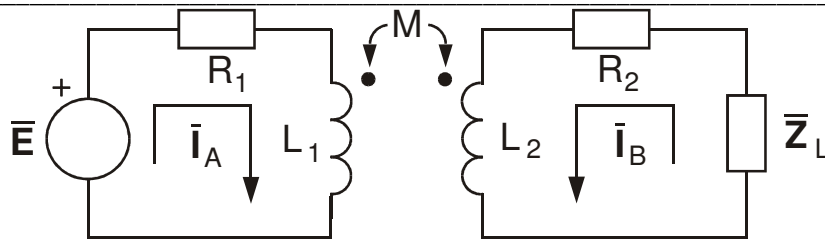


Figura 6.1.1. Transformador lineal

Se dice que el **transformador es lineal** si las bobinas están devanadas en un material lineal magnéticamente, en el que la permeabilidad magnética es constante. Entre estos materiales están aire, plástico, baquelita y madera, siendo la mayoría de los materiales lineales magnéticamente y se les llama en general **transformadores de núcleo de aire**.

Se llama **transformador perfecto** a un circuito acoplado en el que las **resistencias de las bobinas son nulas** y el coeficiente de acoplamiento **$K = 1$** .

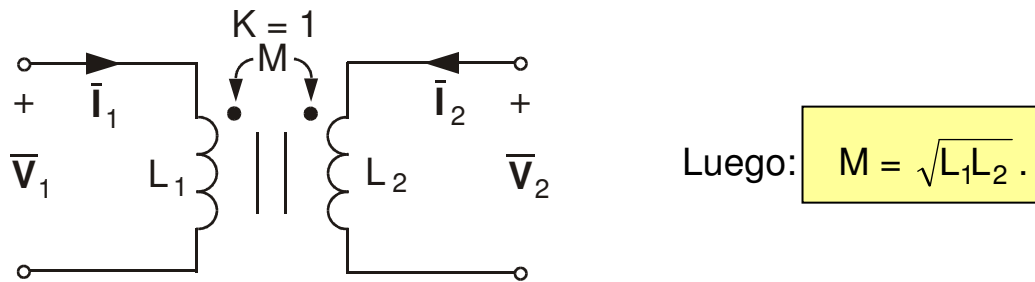


Figura 6.1.3. Esquema del transformador perfecto.

Van a deducirse las relaciones entre las tensiones e intensidades de entrada y salida de la figura 6.1.3:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_1 &= j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 &= j\omega L_2 \bar{I}_2 + j\omega M \bar{I}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1 - j\omega M \bar{I}_2}{j\omega L_1}$$

Sustituyendo:

$$\bar{V}_2 = j\omega L_2 \bar{I}_2 + \frac{\bar{V}_1 M - j\omega M^2 \bar{I}_2}{L_1} \quad \text{con} \quad M = \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{y} \quad M^2 = L_1 L_2$$

$$\bar{V}_2 = j\omega L_2 \bar{I}_2 + \frac{\bar{V}_1 \sqrt{L_1 L_2}}{L_1} - j\omega L_2 \bar{I}_2$$

Simplificando: $\bar{V}_2 = \bar{V}_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$

Como para un solenoide se verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = \frac{\mu N_1^2 S}{l} \\ L_2 = \frac{\mu N_2^2 S}{l} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Puesto que, en general, los transformadores se construyen con bobinados del mismo material (μ), de la misma longitud (l) y de la misma sección (S), puede admitirse la simplificación realizada en las expresiones anteriores.

Entonces:

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_1 \frac{N_2}{N_1} = n \bar{V}_1$$

Siendo n la **relación de transformación** o **relación de vueltas**.

Por otro lado, volviendo a la expresión de $\bar{I}_1$:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} - \frac{\bar{I}_2 \sqrt{L_1 L_2}}{L_1} \Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} - \bar{I}_2 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

- **Circuito equivalente de un transformador perfecto**, se representa en la figura 6.1.3

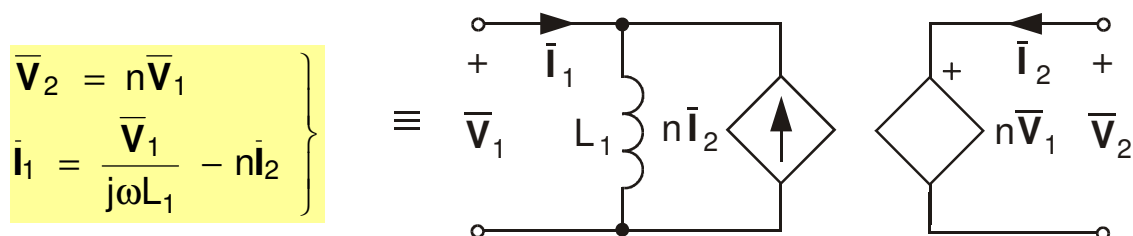


Figura 6.1.3. Circuito equivalente del transformador perfecto.

NOTA: La notación n , se refiere siempre a la relación que existe entre las tensiones:

Transformador ideal 1:n $\Rightarrow$ tensión de salida n veces mayor que a la entrada.

Transformador ideal n:1 $\Rightarrow$ tensión de entrada n veces mayor que a la salida.

6.2 TRANSFORMADORES IDEALES

Si en el caso anterior, se verifica que $L_1, L_2, M \rightarrow \infty$ de modo que la relación entre vueltas n permanece constante, el transformador se llama **transformador ideal, de 1:n**. Se emplean en sistemas de potencia y en electrónica.

Un transformador es ideal si posee las siguientes propiedades:

1. Las bobinas tienen reactancias muy grandes ($L_1, L_2, M \rightarrow \infty$).
2. El coeficiente de acoplamiento es igual a la unidad ($K = 1$).
3. Las bobinas primaria y secundaria no tienen pérdidas ($R_1 = 0 = R_2$).

Los transformadores de núcleo de hierro son una aproximación muy cercana de transformadores ideales.

Las ecuaciones que le definen, quedarán:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{V}_2 = n\bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 = -n\bar{I}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{V}_2 = n\bar{V}_1 \\ \bar{I}_2 = -\frac{\bar{I}_1}{n} \end{array} \right\}$$

pudiéndose usar dichas ecuaciones con valores fasoriales o con valores instantáneos.

El esquema del transformador ideal se representa en la Figura 6.2.1:

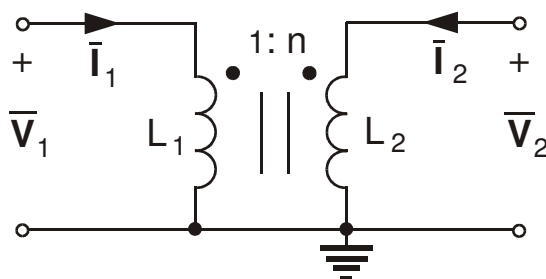


Figura 6.2.1.

Esquema del transformador ideal

Cuando $n = 1$, el transformador se llama por lo general transformador de aislamiento.

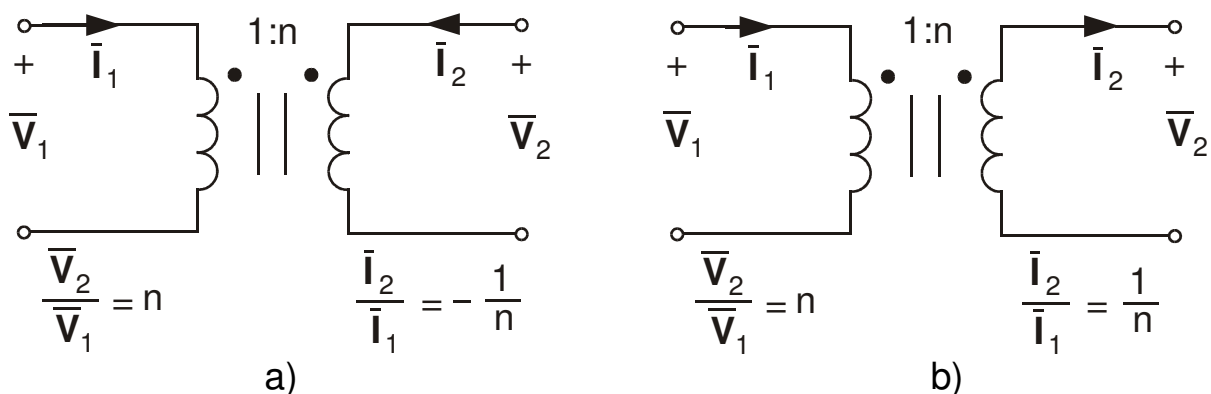
Si $n > 1$, se tiene un **transformador elevador**, pues la tensión aumenta de primaria a secundaria ($\bar{V}_2 > \bar{V}_1$).

Si $n < 1$, se tiene un **transformador reductor**, pues la tensión se reduce de primaria a secundaria ($\bar{V}_2 < \bar{V}_1$).

La capacidad nominal de los transformadores suele especificarse como V_1/V_2 . Por ejemplo, un transformador con capacidad nominal 2400/120 (se expresan en valores eficaces) tiene 2400 V en el devanado primario y 120 V en el secundario, tratándose de un transformador reductor.

Las compañías eléctricas generan a menudo cierta tensión conveniente y se sirven de un transformador elevador para aumentar la tensión a fin de que la energía eléctrica pueda transmitirse a muy alta tensión y baja corriente por las líneas de transmisión, lo cual permite ahorros significativos. Cerca de las residencias de los consumidores, se emplean transformadores reductores para disminuir la tensión a 120 V.

Es importante saber como obtener la **polaridad apropiada de las tensiones y la dirección de las corrientes del transformador**, esto se muestra en los cuatro circuitos de la Figura 6.2.2.



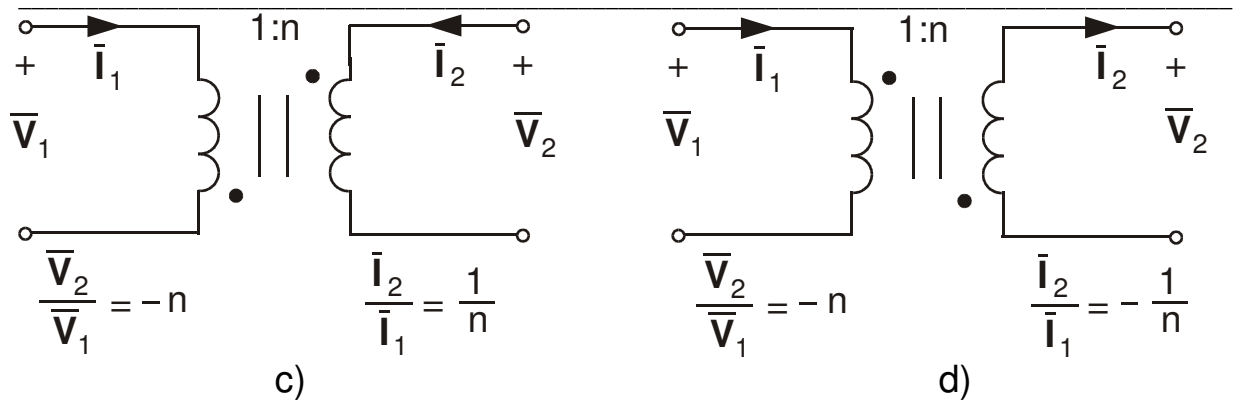


Figura 6.2.2. Circuitos usuales que ilustran las polaridades de tensiones y direcciones de corrientes en un transformador ideal.

La potencia aparente compleja en el devanado primario para la Figura 6.2.2. b) es:

$$\bar{S}_1 = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* = \frac{\bar{V}_2}{n} (n \bar{I}_2)^* = \bar{V}_2 \bar{I}_2^* = \bar{S}_2$$

Lo que indica que la potencia aparente compleja que se provee al devanado primario se entrega al devanado secundario sin pérdidas. El transformador no absorbe potencia, lo cual era lógico de esperar puesto que es ideal.

- **Circuito equivalente de un transformador ideal**, se representa en la figura 6.2.3.

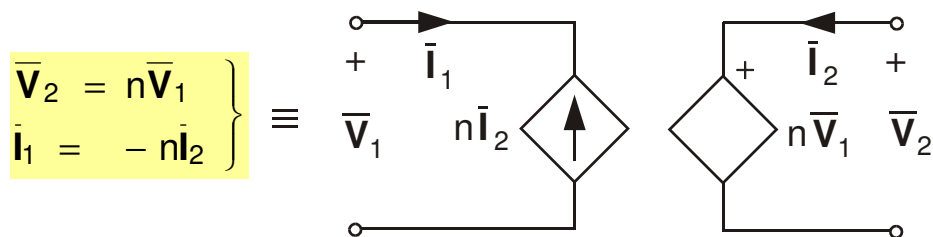


Figura 6.2.3. Circuito equivalente del transformador ideal.

NOTA: Siempre puede hacerse que L_1 y L_2 tiendan a ∞ , sin modificar N_1 y N_2 , simplemente haciendo que la permeabilidad μ tienda a ∞ , es decir que la reluctancia del material:

$R = \frac{1}{\mu S}$ tienda a cero $\rightarrow$ materiales buenos conductores del flujo magnético.

- Impedancia de entrada de un transformador ideal

Sea el circuito de la figura 6.2.4:

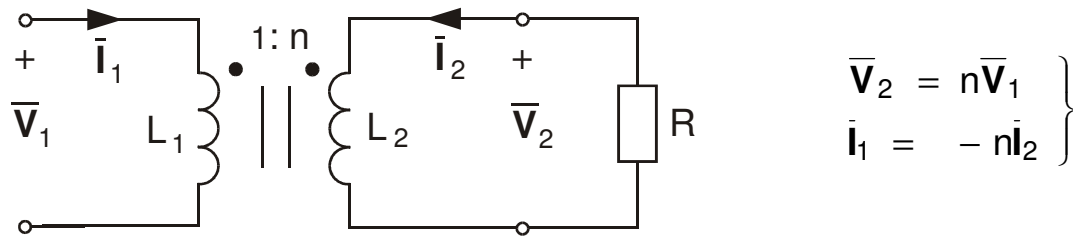


Figura 6.2.4. Transformador ideal con carga.

Sustituyendo el circuito de la figura 6.2.4 por su circuito equivalente y calculando la impedancia en la entrada $\bar{Z}_i$ vista por la fuente (como muestra la Figura 6.2.5):

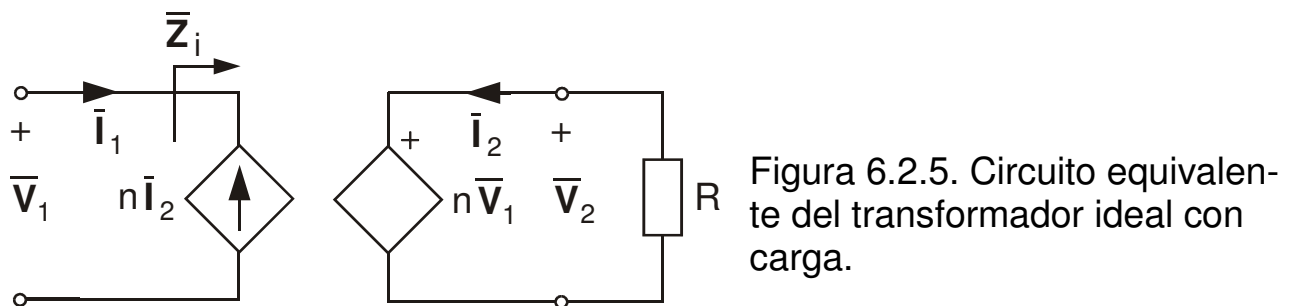


Figura 6.2.5. Circuito equivalente del transformador ideal con carga.

$$\bar{Z}_i = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{\bar{V}_1}{-n\bar{I}_2} = \frac{\bar{V}_1}{-n\left(\frac{-n\bar{V}_1}{R}\right)} = \frac{R}{n^2}$$

NOTA: Se cierra el circuito con una R ó $\bar{Z}$ para que haya circulación de intensidad a la salida $\bar{I}_2$. Se advierte, por tanto, que un transformador ideal refleja una impedancia como el cuadrado de la relación de transformación.

La impedancia de entrada también se llama impedancia reflejada, puesto que parecería que la impedancia de carga se reflejara en el lado primario. Esto hace que el transformador se comporte como un acoplador de impedancias que garantiza la transferencia de potencia máxima.

- Al analizar un circuito que contiene un transformador ideal, es práctica común eliminar el transformador reflejando impedancias y fuentes de un lado del transformador al otro. Si en el circuito de la figura 6.2.6, se desea

reflejar el lado secundario del circuito en el lado primario, se halla el equivalente de Thévenin del circuito a la derecha de los terminales a-b.

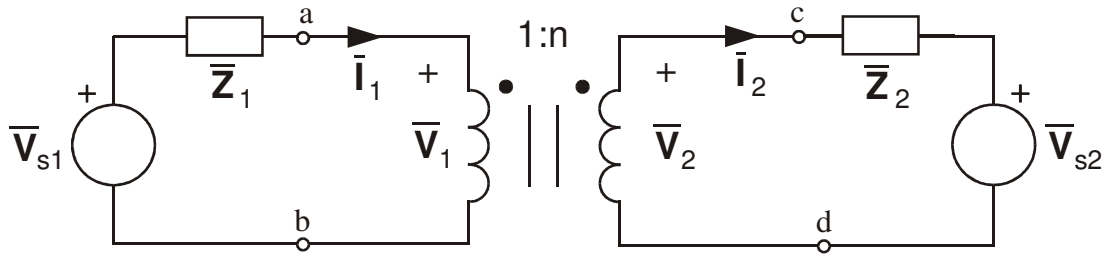


Figura 6.2.6. Circuito con transformador ideal del que se quiere hallar los circuitos equivalentes.

Se obtiene $\bar{V}_{Th}$ como la tensión de circuito abierto en los terminales a-b, como se observa en la figura 6.2.7a)

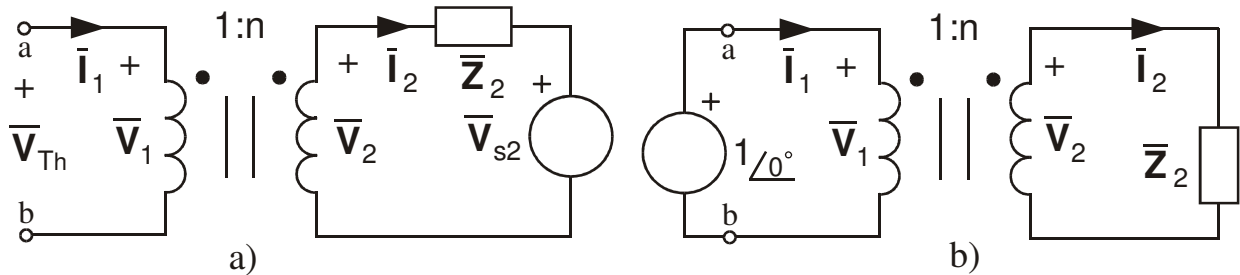


Figura 6.2.7. a) Obtención de $\bar{V}_{Th}$ para el circuito de la figura 6.2.6, b) Obtención de $\bar{Z}_{Th}$ para el circuito de la figura 6.2.6.

Dado que los terminales a-b están abiertos:

$$\bar{i}_1 = 0 = \bar{i}_2 \Rightarrow \bar{V}_2 = \bar{V}_{s2}.$$

Por tanto:

$$\bar{V}_{Th} = \bar{V}_1 = \frac{\bar{V}_2}{n} = \frac{\bar{V}_{s2}}{n}$$

Para obtener $\bar{Z}_{Th}$, se elimina la fuente de tensión del bobinado secundario y se inserta una fuente de prueba (por ejemplo $1_{/0^\circ}$) entre los terminales a-b, como se indica en la figura 6.2.7b):

$$\bar{Z}_{Th} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{i}_1} = \frac{\bar{V}_2 / n}{n \bar{i}_2} = \frac{\bar{Z}_2}{n^2}$$

Una vez que se tiene $\bar{V}_{Th}$ y $\bar{Z}_{Th}$, se añade el equivalente de Thévenin a la parte del circuito de la figura 6.2.6 a la izquierda de los terminales a-b. La figura 6.2.8, muestra el resultado.

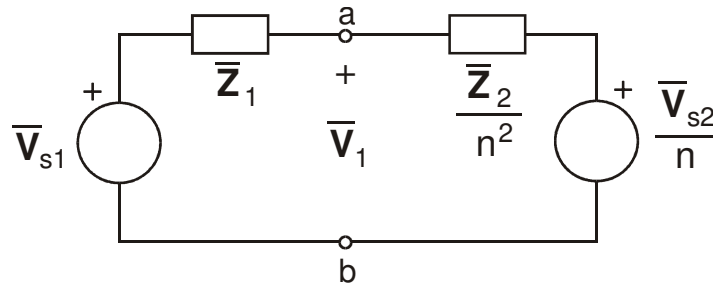


Figura 6.2.8. Circuito equivalente al de la figura 6.2.6 obtenido reflejando el circuito secundario en el lado primario.

“La regla general para eliminar el transformador y reflejar el circuito secundario en el lado primario es: dividir la impedancia secundaria entre n^2 , dividir la tensión secundaria entre n y multiplicar la corriente secundaria por n .”

También es posible **reflejar el lado primario del circuito de la figura 6.2.6 en el lado secundario**. La figura 6.2.10 ilustra el resultado.

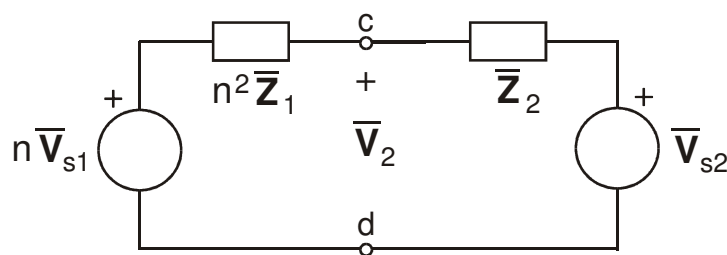


Figura 6.2.10. Circuito equivalente al de la figura 6.2.6 obtenido reflejando el circuito primario en el lado secundario.

“La regla general para eliminar el transformador y reflejar el circuito primario en el lado secundario es: multiplicar la impedancia primaria por n^2 , multiplicar la tensión primaria por n y dividir la corriente primaria entre n .”

Debe tenerse en cuenta que este método de reflexión solo se aplica si no hay conexiones externas entre los devanados primario y secundario. Si las hubiera, se aplica simplemente el análisis de lazos o nudos.

También puede hablarse del **transformador ideal de $n:1$** , se representa en la figura 6.2.12.

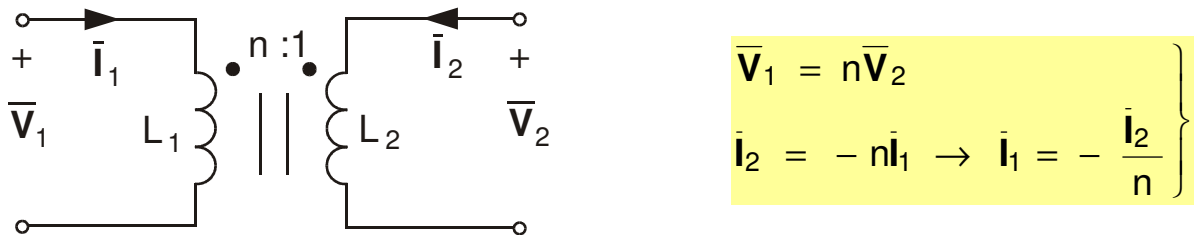


Figura 6.2.12. Esquema del transformador ideal.

Su equivalente, se observa en la Figura 6.2.13:

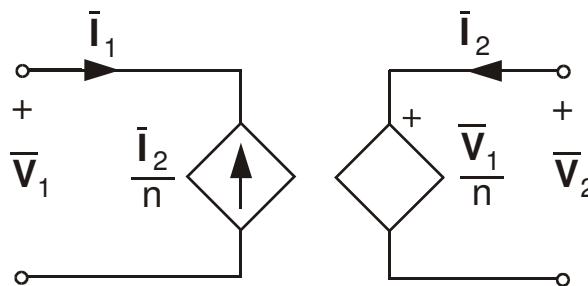


Figura 6.2.13. Circuito equivalente del transformador ideal.

Y con carga, viene representado en la figura 6.2.14:

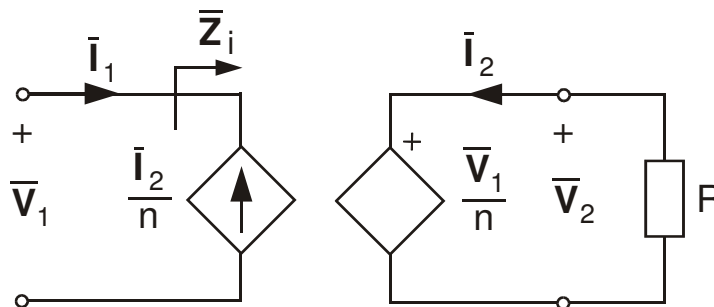


Figura 6.2.14. Circuito equivalente del transformador ideal con carga.

$$\bar{Z}_i = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{\bar{V}_1}{-\frac{\bar{I}_2}{n}} = \frac{\bar{V}_1}{-\left(-\frac{\bar{V}_1/nR}{n}\right)} = n^2 R.$$

ó bien tomando el de la figura 6.2.15:

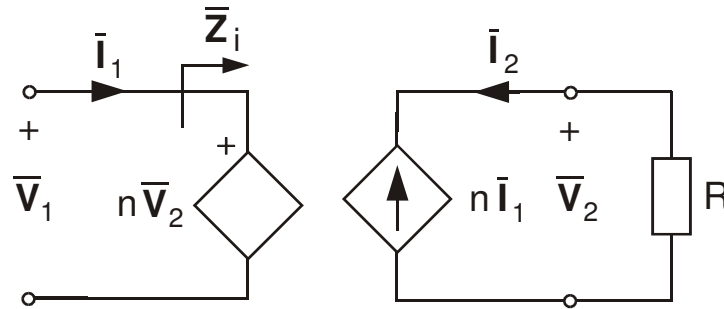


Figura 6.2.15. Circuito equivalente del transformador ideal con carga.

$$\bar{Z}_i = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{n\bar{V}_2}{\bar{I}_1} = \frac{n(-\bar{I}_2 R)}{\bar{I}_1} = \frac{-R(-n\bar{I}_1)n}{\bar{I}_1} = n^2 R.$$

6.3. EL AUTOTRANSFORMADOR

A diferencia del transformador convencional de dos devanados, un **autotransformador** tiene un devanado único continuo con un punto de conexión llamado *toma* entre los lados primario y secundario. La toma suele ser **ajustable**, para brindar la razón de vueltas deseada a fin de aumentar o reducir la tensión. De este modo, se proporciona una tensión variable a la carga conectada al autotransformador.

Como **definición** podría enunciarse: **un autotransformador es un transformador en donde el primario y el secundario se encuentran en el mismo devanado**.

Como se advierte en la figura 6.3.1, el autotransformador puede operar en el modo reductor o elevador. El autotransformador es un tipo de transformador de potencia, su mayor ventaja respecto al de dos devanados es su capacidad para transferir mayor potencia aparente. Otra ventaja es que es más pequeño y ligero que un transformador equivalente de dos devanados. Sin embargo, dado que los devanados primario y secundario están en el mismo devanado, se pierde el aislamiento

eléctrico (ahora habrá conexión eléctrica directa con la fuente); esta es precisamente una de las **principales desventajas** del autotransformador.

Algunas de las fórmulas que se derivaron para los transformadores ideales se aplican también a los autotransformadores ideales. En el caso del circuito con autotransformador reductor de la figura 6.3.1 a) da lugar a la ecuación:

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = 1 + \frac{N_1}{N_2}$$

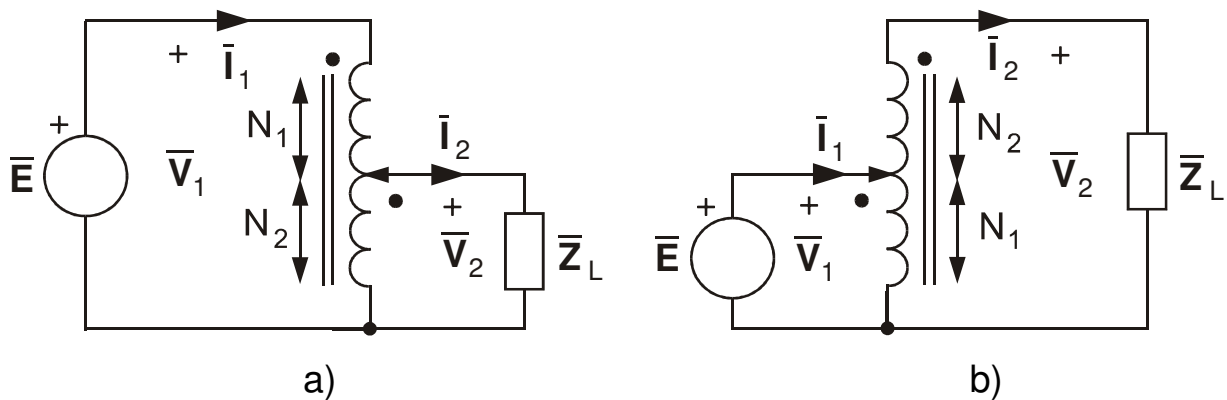


Figura 6.3.1.a) Autotransformador reductor. b) Autotransformador elevador.

Como en un autotransformador ideal no hay pérdidas, así la potencia aparente compleja se mantiene sin cambios en los devanados primario y secundario:

$$\bar{S}_1 = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* = \bar{S}_2 = \bar{V}_2 \bar{I}_2^*$$

Esta ecuación también puede expresarse como:

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

o sea

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

Así, la relación de corriente es:

$$\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{N_2}{N_1 + N_2}$$

En el caso del circuito con autotransformador elevador de la Fig. 6.3.1 b):

$$\frac{\bar{V}_1}{N_1} = \frac{\bar{V}_2}{N_1 + N_2}$$

o sea

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$

La potencia aparente compleja dada por la ecuación anterior también se aplica al autotransformador elevador. En consecuencia, la relación de corrientes es:

$$\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_1} = 1 + \frac{N_1}{N_2}$$

Una diferencia importante entre los transformadores convencionales y los autotransformadores es que los lados primario y secundario del autotransformador están acoplados no solo magnéticamente, sino también acoplados eléctricamente. El autotransformador puede usarse en lugar de un transformador convencional cuando no se requiere aislamiento eléctrico.

6.4. EL TRANSFORMADOR TRIFÁSICO

Para satisfacer la demanda de transmisión de potencia trifásica se necesitan conexiones de transformador que sean compatibles con las operaciones trifásicas. Estas conexiones del transformador pueden lograrse de dos maneras: conectando tres transformadores monofásicos, lo cual forma un **banco de transformadores**, o **usando un transformador trifásico especial**. Para la misma capacidad nominal en kVA, un transformador trifásico siempre es más pequeño y menos costoso que tres transformadores monofásicos. Cuando se emplean transformadores monofásicos, se debe garantizar que tengan la misma relación de vueltas n a fin de conseguir un sistema trifásico equilibrado. Existen **cuatro maneras estándar** de conectar tres transformadores monofásicos o un transformador trifásico para operaciones trifásicas: **Y-Y, Δ - Δ , Y- Δ y Δ -Y**.

En cualquiera de esas conexiones, la potencia aparente total S_T , la potencia activa P_T y la potencia reactiva Q_T se obtienen como:

$$S_T = \sqrt{3} V_L I_L$$

$$P_T = S_T \cos \varphi = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi$$

$$Q_T = S_T \sin \varphi = \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi$$

donde V_L e I_L son iguales a la tensión de línea V_{LP} y a la corriente de línea I_{LP} , respectivamente, del lado primario, o a la tensión de línea V_{LS} y a la corriente de línea I_{LS} , respectivamente, del lado secundario. Cabe indicar que para cada una de las cuatro conexiones, $V_{LS} I_{LS} = V_{LP} I_{LP}$, ya que la potencia debe conservarse en un transformador ideal.

- En lo que se refiere a la **conexión Y-Y** de la figura 6.4.1, la tensión de línea V_{LP} en el lado primario, la tensión de línea V_{LS} en el lado secundario, la corriente de línea I_{LP} en el lado primario y la corriente de línea I_{LS} en el

lado secundario se relacionan mediante la relación de vueltas n del transformador por fase de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$V_{Ls} = n V_{Lp}$$

$$I_{Ls} = \frac{I_{Lp}}{n}$$

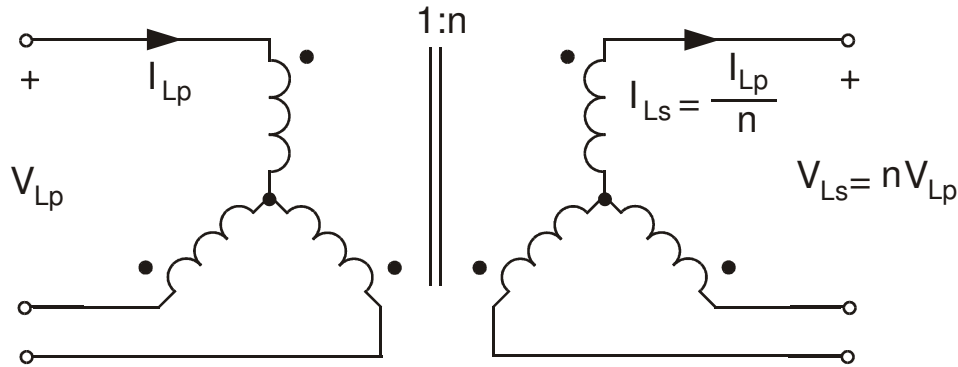


Figura 6.4.1. Conexión Y-Y del transformador trifásico.

- En lo que se refiere a la **conexión Δ - Δ** de la figura 6.4.2, las ecuaciones anteriores también se aplican a las tensiones de línea y a las corrientes de línea. Esta conexión es excepcional en el sentido de que si uno de los transformadores se retira para efectos de reparación o mantenimiento, los otros dos forman un triángulo abierto, el cual puede proporcionar tensiones trifásicas en un nivel reducido respecto del transformador trifásico original.

$$V_{Ls} = n V_{Lp}$$

$$I_{Ls} = \frac{I_{Lp}}{n}$$

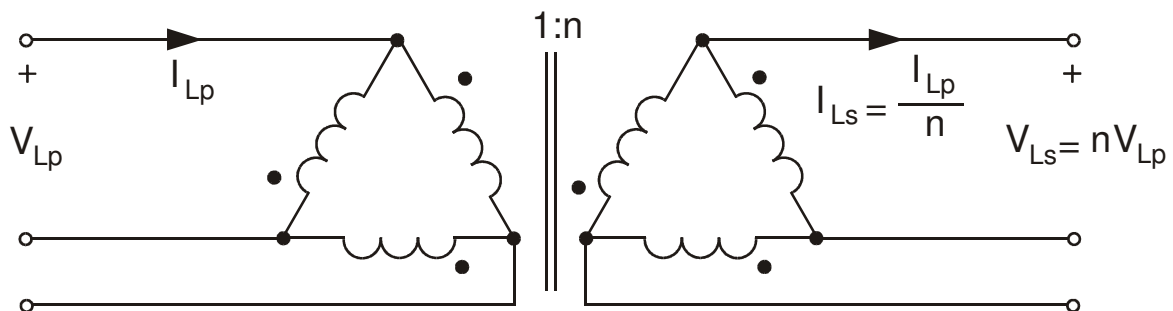


Figura 6.4.2. Conexión Δ - Δ del transformador trifásico.

- Respecto a la **conexión Y-Δ** de la figura 6.4.3, los valores de línea-fase originan un factor de $\sqrt{3}$ además de la razón de vueltas n del transformador por fase, de la forma:

$$V_{Ls} = \frac{nV_{Lp}}{\sqrt{3}}$$

$$I_{Ls} = \frac{\sqrt{3}I_{Lp}}{n}$$

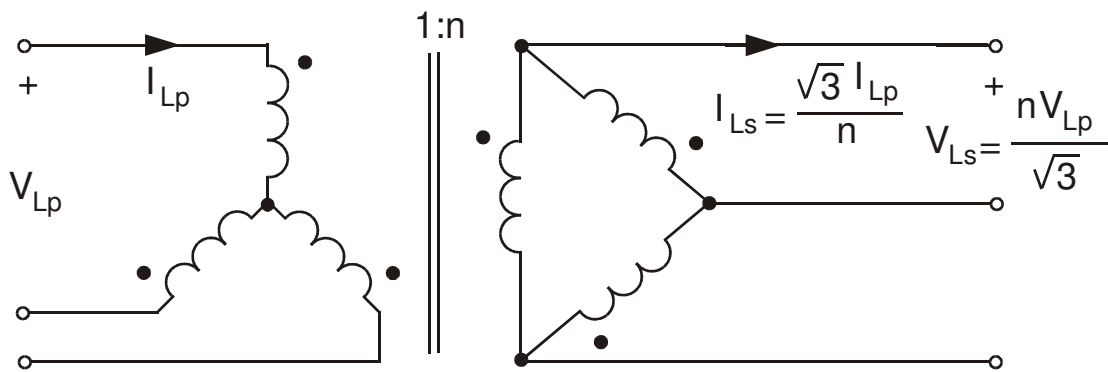


Figura 6.4.3. Conexión Y-Δ del transformador trifásico.

- De igual forma, respecto a la **conexión Δ-Y** de la figura 6.4.4, se tiene:

$$V_{Ls} = n\sqrt{3} V_{Lp}$$

$$I_{Ls} = \frac{I_{Lp}}{n\sqrt{3}}$$

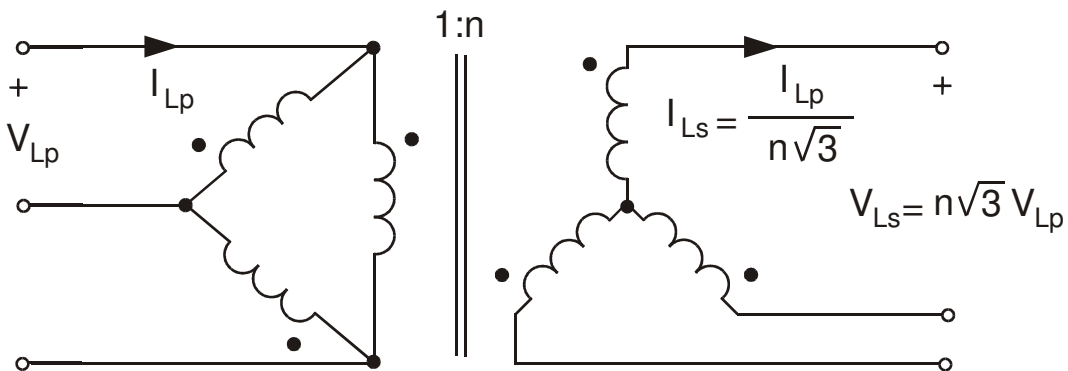


Figura 6.4.4. Conexión Δ-Y del transformador trifásico.