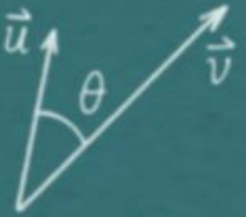


$$D = P^{-1}AP$$

$$\det(D) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

$$\text{rg}(A) = 2$$



Tema 1. Matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\dim(S \cup T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

Sara Pérez Carabaza (sara.perezcarabaza@unican.es)

Valvanuz Fernández Quiruelas (valvanuz.fernandez@unican.es).

Dpto. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación.

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales.

Este material se publica bajo Licencia: [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



ÍNDICE.

1. **Matrices**

2. Sistemas lineales de ecuaciones
3. Espacios vectoriales
4. Espacio vectorial euclídeo
5. Aplicaciones lineales.
6. Diagonalización.

- [Repaso: Lenguaje matemático.](#)
- [Introducción y clasificación de matrices.](#)
- [Operaciones con matrices.](#)
- [Matriz traspuesta. Propiedades y teoremas.](#)
- [Determinantes.](#)
- [Matriz inversa. Matrices ortogonales.](#)
- [Operaciones y matrices elementales.](#)
- [Matrices escalonadas \(reducidas\).](#)
- [Escalonamiento de matrices.](#)
- [Rango.](#)
- [Cálculo de la inversa por Gauss-Jordan.](#)

Guía de colores

Texto = ejemplo/ejercicio

Texto = error común

Texto = hipervínculo

Texto /  = memorizar

 = definición/teorema

 = recordatorio

Texto /  = código MATLAB

LENGUAJE MATEMÁTICO.

Un **conjunto** es una colección de elementos. Podemos definir un conjunto listando sus elementos entre llaves.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

símbolos matemáticos

- $x \in A$ significa que x es un elemento del conjunto A , es decir, x **pertenece** al conjunto A . Por el contrario, $x \notin A$ indica que x **no pertenece** al conjunto A .
- $B \subset A$ significa que B es un **subconjunto** de A , es decir, todos los elementos de B pertenecen también a A .
- El símbolo (cuantificador) " **$\forall$** " es una forma abreviada de escribir **para todo** o para cualesquiera de los elementos que vienen a continuación. $\forall x \geq 1, x^2 \geq x$

- El símbolo " **$\sum$** " denota sumatorio y se utiliza para expresar de forma abreviada sumas. El símbolo " **$\prod$** " denota productorio y se utiliza para expresar de forma abreviada productos.

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

$$det(D) = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

$$n! = \prod_{i=1}^n i$$

- El símbolo " **$\Rightarrow$** " es una fórmula abreviada de escribir **implica**, es decir si la afirmación (proposición) que se escribe a su izquierda se verifica entonces se verifica la que escribe a su derecha. El símbolo " **$\Leftrightarrow$** " es una fórmula abreviada de escribir **"si, y sólo si"**.

LENGUAJE MATEMÁTICO.

Tanto el símbolo "|" como los dos puntos ":" se usan para expresar matemáticamente "tal que".

Conjuntos numéricos

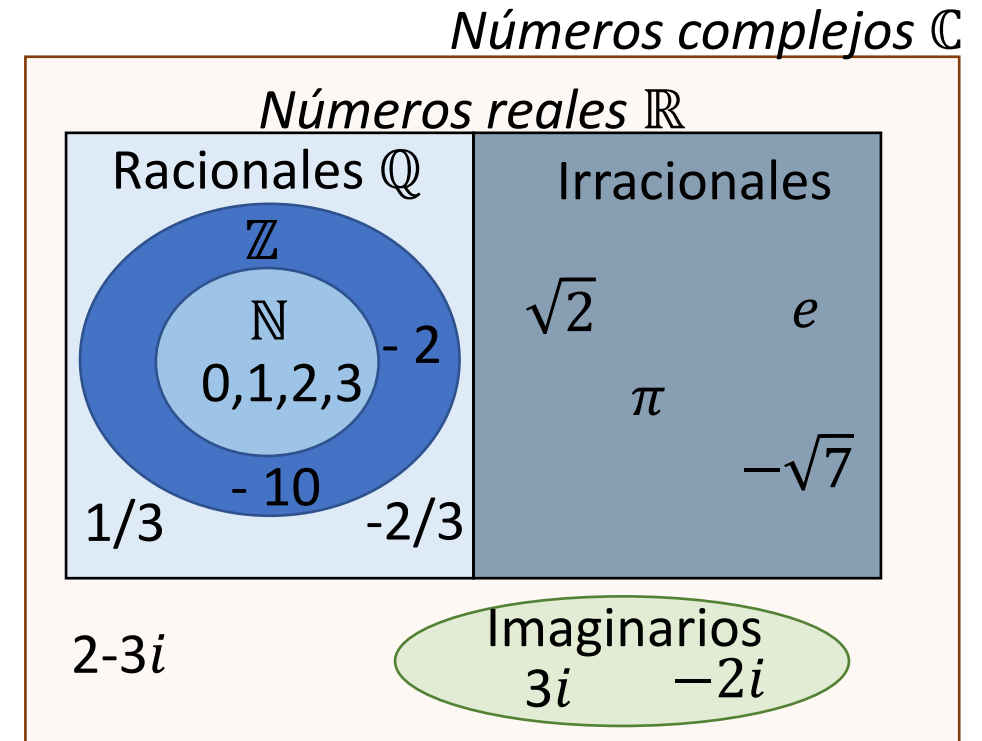
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ números naturales

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ números enteros

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ números racionales

Los números irracionales no se pueden expresar como una fracción y tienen infinitos decimales no periódicos.

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$



Ejercicio 1. Determina la veracidad de las siguientes afirmaciones.

- a) $44 \in \mathbb{Z}$ b) $\frac{2}{3}$ es irracional c) $2\pi \in \mathbb{R}$ d) $-10 \notin \mathbb{N}$ e) $11,23 \in \mathbb{Q}$

Ejercicio 2. Da 2 elementos de cada conjunto y determina qué lugar geométrico representan los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ o $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 1\},$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 1\}$$

Utiliza la herramienta GeoGebra 2D y 3D para representar dichos conjuntos.

Un conjunto es equivalente a otro si ambos contienen los mismos elementos, aunque estos puedan estar expresados o escritos de diferentes maneras.

Ejercicio 3. Empareja los siguientes conjuntos con sus equivalentes.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 25\}$$

$$E = \{0, 1, 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} | x < 3\}$$

$$F = [2, 4]$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 4\}$$

$$G = [2, 4)$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x < 4\}$$

H: círculo de radio 5 centrado en el origen

INTRODUCCIÓN A LAS MATRICES.

Una matriz es un conjunto de elementos (normalmente números) dispuestos en m filas y n columnas.

El **tamaño** de la matriz es $m \times n$.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las matrices se denotan con letras mayúsculas A,B,C... y sus elementos a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} con la misma letra en minúscula y subíndices que indican la fila i y columna j del elemento.

Ejercicio 4. Determina:

a) tamaño de A, elemento a_{12} , tercera fila de A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$A = [2 \ 1; 4 \ 5; 6 \ 2]$
 $[m,n] = \text{size}(A)$
 $A(1,2)$
 $A(3,:)$

b) tamaño de B, elemento b_{23} , primera columna de B.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$B = [2 \ 2 \ 1; 1 \ -1 \ 3; 3 \ -2 \ 5]$
 $[m,n] = \text{size}(B)$
 $B(2,3)$
 $B(:,1)$

TIPOS DE MATRICES.

Atendiendo a sus elementos:

- **Matriz compleja** $a_{ij} \in \mathbb{C} \forall i, j$
- **Matriz real** $a_{ij} \in \mathbb{R} \forall i, j$
- **Matriz nula o matriz cero** $a_{ij} = 0 \forall i, j$

$$\begin{pmatrix} 2 + 2i & 3 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \pi/2 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Atendiendo al tamaño:

- Si $m = n$ **matriz cuadrada de orden n**

En una matriz cuadrada la **diagonal principal** es el conjunto de elementos donde la fila y columna coinciden.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- Si $m = 1$ **matriz fila**, tamaño $1 \times n$
- Si $n = 1$ **matriz columna**, tamaño $m \times 1$

$$(1 \quad -1 \quad 0 \quad 7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

TIPOS DE MATRICES.

- **Matriz triangular superior** $a_{ij} = 0 \forall i > j$
 - **Matriz estrictamente triangular superior** $a_{ij} = 0 \forall i \geq j$
- **Matriz triangular inferior** $a_{ij} = 0 \forall j > i$
 - **Matriz estrictamente triangular inferior** $a_{ij} = 0 \forall j \geq i$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal** $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$

Una matriz diagonal es una matriz triangular superior e inferior

- **Matriz identidad** $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$ y $a_{ij} = 1 \forall i = j$

Una matriz diagonal es una matriz diagonal con unos en su diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diag([5 -1 2]) eye(3)

- **Matriz simétrica** $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz antisimétrica** $a_{ij} = -a_{ji} \forall i \neq j$ y $a_{ij} = 0 \forall i = j$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

MATRICES CUADRADAS.

En las matrices cuadradas, se llama **traza** a la suma de los elementos de la diagonal principal.

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

trace(A)

Ejercicio 5. Clasifica las siguientes matrices según los tipos vistos anteriormente: real, compleja, nula, cuadrada, matriz fila, matriz columna, triangular (estrictamente) superior/inferior, diagonal, identidad, simétrica o antisimétrica. Identifica el tamaño, y si corresponde la traza de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5i \\ 4 & 0 & -2 \\ 5i & -2 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES BÁSICAS CON MATRICES.

- La **suma de matrices** A y B del mismo tamaño $m \times n$ es igual a una matriz C de tamaño $m \times n$ donde: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i,j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

La suma de dos matrices reales del mismo tamaño $m \times n$ es otra matriz real del mismo tamaño. Por tanto, el conjunto de matrices reales de tamaño $m \times n$ es cerrado bajo la suma.

- El **producto de un escalar** $\lambda \in \mathbb{R}$ **por una matriz** A es igual a la matriz $C = \lambda A$ donde cada elemento de la matriz queda A multiplicado por el escalar: $c_{ij} = \lambda a_{ij}$

$$-4 \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 8 \\ -8 & -16 & 0 \end{pmatrix}$$

El resultado de una matriz real multiplicada por un escalar es una matriz real del mismo tamaño. Por tanto, el conjunto de matrices reales de tamaño $m \times n$ es cerrado bajo la multiplicación por un escalar.

Nota: Se dice que un **conjunto es cerrado bajo una operación** si, al aplicarla a los elementos del conjunto el resultado pertenece al conjunto

OPERACIONES BÁSICAS CON MATRICES: PROPIEDADES

Sean A, B, C matrices y λ, β escalares:

Propiedades de la suma de matrices:

- Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Conmutativa: $A + B = B + A$
- Elemento neutro de la suma de matrices

$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$ $\mathbf{0}$: matriz nula

- Elemento opuesto: $A - A = \mathbf{0}$

Propiedades del producto por un escalar:

- Asociativa respecto del producto de escalares:

$$(\lambda\beta)A = \lambda(\beta A)$$

- Distributiva respecto a la suma de matrices

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

- Distributiva respecto a la suma de escalares

$$(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$$

- $1A = A$

Recordatorio. Propiedades de la suma y el producto de escalares.

Propiedad asociativa

$$\lambda + (\beta + \gamma) = (\lambda + \beta) + \gamma \quad (\lambda \cdot \beta) \cdot \gamma = \lambda \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

Propiedad conmutativa

$$\lambda + \beta = \beta + \lambda \quad \lambda \cdot \beta = \beta \cdot \lambda$$

Propiedad distributiva

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\beta + \gamma) &= \lambda \cdot \beta + \lambda \cdot \gamma \\ (\beta + \gamma)\lambda &= \beta \cdot \lambda + \gamma \cdot \lambda \end{aligned}$$

Elemento neutro

$$\mathbf{0} + \lambda = \lambda \quad 1\lambda = \lambda$$

Elemento opuesto (o inverso para el producto)

$$\lambda - \lambda = 0 \quad \lambda \frac{1}{\lambda} = 1 \text{ con } \lambda \neq 0$$

EJERCICIO. RESOLUCIÓN ECUACIÓN MATRICIAL.

Ejercicio 6. Halla el valor de la matriz X dada la siguiente ecuación matricial:

$$3X + A = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES.

El **producto de dos matrices** se define para el caso en el que el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda.

$$\underbrace{(m \times n)}_{\text{tamaño de } A} \cdot \underbrace{(n \times p)}_{\text{tamaño de } B} = \underbrace{(m \times p)}_{\text{tamaño de } C}$$

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y B una matriz de tamaño $n \times p$, la matriz C resultante del producto de A y B es una matriz de tamaño $m \times p$, cuyos elementos se obtienen multiplicando la fila i de A por la columna j de B según la regla:

$$c_{ij} = (a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{array}{c} \text{fila 2} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \color{blue}{-3} & \color{blue}{5} & \color{blue}{8} \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{columna 3} \\ \color{blue}{5} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{2} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 8 & \color{blue}{5} & 3 \\ -6 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 20 & \color{blue}{10} & 2 \\ -71 & -84 & \color{blue}{1} & 19 \\ -74 & -68 & 16 & 36 \end{pmatrix} \rightarrow c_{23} = (-3)(5) + (5)(0) + (8)(2) = 1$$

$3 \times 3 \qquad \qquad 3 \times 4 \qquad \qquad 3 \times 4$

PRODUCTO DE MATRICES.

Veamos otras formas de ver el producto de matrices que nos serán útiles en la asignatura.

Cada columna de la matriz producto AB se obtiene multiplicando A por la columna correspondiente de B .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 8 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 & \vec{c}_4 \\ 3 & 8 & 5 & 3 \\ -6 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{c}_1 & A\vec{c}_2 & A\vec{c}_3 & A\vec{c}_4 \\ 12 & 20 & 10 & 2 \\ -71 & -84 & 1 & 19 \\ -74 & -68 & 16 & 36 \end{pmatrix}$$

El producto de una matriz por un vector columna es igual a la suma del producto de cada elemento del vector por su columna correspondiente de la matriz (es decir, la combinación lineal de las columnas de la matriz con coeficientes iguales a los elementos del vector).

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 8 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES.

Sean $A, B, C \in \mathbb{M}$ y λ, β escalares:

- **Asociativa** del producto de matrices

$$A(BC) = (AB)C$$

- El producto de matrices **no es conmutativo** $AB \neq BA$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 30 & 14 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

Si $AB = BA$ se dice que A y B son **matrices conmutativas**. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- **Distributivas** respecto a la suma de matrices

$$A(B + C) = AB + AC \quad (\text{por la derecha})$$

$$(B + C)D = BD + CD \quad (\text{por la izquierda})$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES.

- El **elemento neutro** del producto matricial es la matriz identidad I .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \qquad \qquad = \qquad \qquad I \qquad \qquad A \qquad \qquad = \qquad \qquad A \qquad \qquad I$

- En general, no se cumple la propiedad de cancelación. Es decir, **$AB=AC$ no implica $B=C$**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \qquad \qquad B \qquad \qquad A \qquad \qquad C$

Recordatorio. Cuando trabajamos con escalares
 $xy = xz \rightarrow y = z \quad \text{si } (x \neq 0)$

- En general, **$AB=0$ no implica que A o B sean matrices nulas.**

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES CUADRADAS.

Sean $A, B, C \in \mathbb{M}_n$ matrices cuadradas de orden n .

El producto de dos **matrices triangulares**, ambas superiores (inferiores), es otra matriz triangular superior (inferior).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

El producto de dos **matrices diagonales** es otra matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los productos de los elementos diagonales de las matrices originales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$$

Definición. La **potencia k-ésima de una matriz cuadrada A** es el producto de A por sí misma, k veces, con k positivo y entero.

Por convenio, $A^0 = I$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ veces}}$$

Ejercicio 7. Indica si las siguientes operaciones están definidas y de ser así calcúlalas.

a) AB , b) BC , c) A^3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. Siendo A y B matrices cuadradas determina si las siguientes igualdades se cumplen.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(AB)^2 = A^2 B^2$$

MATRIZ TRASPUESTA.

La **matriz traspuesta** A^t de una matriz A se obtiene intercambiando las filas por las columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \boxed{A'}$$

tamaño 2×4 tamaño 4×2

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = (1 \quad 2 \quad 3 \quad -2)$$

tamaño 4×1 tamaño 1×4

Propiedades:

I. $(A^t)^t = A$

II. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

III. $(A + B)^t = A^t + B^t$

IV. $(AB)^t = B^t A^t$

V. A simétrica $\leftrightarrow A^t = A$

VI. A antisimétrica $\leftrightarrow A^t = -A$

MATRIZ TRASPUESTA: TEOREMAS.

Tres teoremas para matrices cuadradas

Teorema. Dada una matriz cuadrada A , $A+A^t$ es una matriz **simétrica**.

Demostración. Sea $S = A+A^t$ comprobemos que S es simétrica.
 $S^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = S$, y puesto que $S = S^t$, S es simétrica.

Teorema. Dada una matriz cuadrada A , $A-A^t$ es una matriz **antisimétrica**.

Demostración. Sea $T = A - A^t$ comprobemos que T es antisimétrica.
 $T^t = (A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -T$, y puesto que $-T = T^t$, T es antisimétrica.



Teorema. Toda matriz cuadrada A puede escribirse como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^t)}_{\text{matriz simétrica } S} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^t)}_{\text{matriz antisimétrica } T}$$

MATRIZ TRASPUESTA: TEOREMAS.

Teorema. Sea una matriz A , entonces tanto AA^t como A^tA son **simétricas**.

Demostración. Sea $S = AA^t$ comprobemos que $S^t = S$

$$S^t = (AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t = S$$

Ejercicio 9. Dadas las matrices A y B

a) Expresar A como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Obtener una matriz simétrica a partir de B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTES.

El determinante es un valor numérico asociado a una matriz cuadrada. Para una matriz A , el determinante se denota $\det(A)$ o $|A|$ (no confundir con valor absoluto de un escalar).

Cálculo de determinante de matrices de orden 2:

$\det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1(-1)$$

Regla de Sarrus: Cálculo de determinante de matrices cuadradas de orden 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - (2 \cdot (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1) = -1$$

DETERMINANTES DE MATRICES CUADRADAS.

Definiciones. Se denomina **menor del elemento** $a_{i,j}$ de una matriz al determinante de la matriz de orden $n - 1$ resultante al eliminar la fila i y la columna j . Se denota $m_{i,j}$

El **cofactor** (o adjunto) **del elemento** $a_{i,j}$ viene dado por $A_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j}$

Método de expansión por cofactores: El determinante de una matriz A se define como la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos cofactores:

desarrollo por cofactores de la fila i : $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$

desarrollo por cofactores de la columna j : $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{ejemplo de desarrollo por cofactores de la primera fila} \\ = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^2 m_{11} + a_{12}(-1)^3 m_{12} + a_{13}(-1)^4 m_{13} \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \text{ejemplo de desarrollo por cofactores de la segunda columna} \\ = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{12}(-1)^{1+2} m_{12} + a_{22}(-1)^{2+2} m_{22} + a_{32}(-1)^{3+2} m_{32} \\ = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \end{array}$$

DETERMINANTES DE MATRICES CUADRADAS.

Al aplicar el método de cofactores a una matriz de orden 3 llegamos a la regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{desarrollo por cofactores de la primera columna} \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \quad n!=3!=6 \text{ sumandos} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{23}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{13}a_{22} \end{array}$$

El método de cofactores tiene un coste computacional elevado ya que el determinante se obtiene como suma de $n!$ términos. Aunque este se simplifica en el cálculo de determinantes de matrices con muchos ceros. Más adelante veremos un método más eficiente.

Ejercicio 11. Dada la siguiente matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Determina los menores y cofactores de los elementos a_{23} , a_{32} .
- Calcula el determinante desarrollando por cofactores la primera fila.
- Calcula el determinante desarrollando por cofactores la segunda columna.

DETERMINANTES: PROPIEDADES.

Efecto de las operaciones elementales por filas (o columnas) en el determinante:

1. Si se intercambian dos filas (o columnas) el valor del determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad \begin{matrix} F_2 \leftrightarrow F_3 \\ \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \quad \begin{matrix} C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5$$

2. Si se multiplica una fila (o columna) por un escalar λ el determinante de la matriz queda multiplicado por λ (también se verifica para $\lambda = 0$ aunque no sea OE).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad \begin{matrix} F_2 \times 2 \\ \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \quad \begin{matrix} C_3 \times 1/2 \\ \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ 2 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} = 5$$

3. Si se suma a una fila (o columna) otra multiplicada por un escalar el determinante no se modifica.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \\ = \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_1 \rightarrow C_1 + 2C_2 \\ = \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

DETERMINANTES.

Podemos aprovechar la propiedad de que el determinante no cambia al sumarle a una fila otra fila multiplicada por un escalar para hacer ceros todos los elementos de una fila salvo uno y después calcular fácilmente el determinante mediante el método de cofactores por dicha fila. Este mismo procedimiento es válido también para columnas.

Ejercicio 12. Calcula el siguiente determinante de A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTES: PROPIEDADES.

4. $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ siendo n el orden de la matriz cuadrada A y $\lambda \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left| 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2^3 5 = 40$$

5. $|A| = |A^t|$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

6. Si A es triangular $|A|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

7. $|AB| = |A||B|$

8. Si $|A| \neq 0$ $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ siendo A^{-1} la matriz inversa de A .

DETERMINANTES: PROPIEDADES.

9. Si todos los elementos de una fila o columna son nulos, el determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & 5 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = 0$$

10. Si hay dos filas o columnas iguales, el determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{7} & \mathbf{7} \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

11. Si una fila o columna es combinación lineal de las demás, el determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

MATRIZ INVERSA.

Dada una matriz cuadrada A decimos que es una **matriz regular o invertible** si existe otra matriz, que denotamos A^{-1} que verifique:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

A las matrices cuadradas que no tienen inversa se las denomina **matrices singulares**.

Una matriz es singular si y solo si su determinante es cero.

$$\begin{aligned} A \text{ singular} &\Leftrightarrow |A| = 0 \\ A \text{ regular} &\Leftrightarrow |A| \neq 0 \end{aligned}$$

Propiedades. Sean A y B matrices regulares:

- i.* A^{-1} es única (si existe)
- ii.* $(A^{-1})^{-1} = A$
- iii.* $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$

Ejercicio 13. Demuestra la propiedad $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

MATRIZ INVERSA.

Definición. La **matriz de cofactores** (o matriz adjunta) es la matriz formada por los cofactores de los elementos de la matriz A . Se denota $Adj(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La inversa de una matriz regular A se obtiene como la traspuesta de la matriz adjunta dividida entre $|A|$:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{|A|} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 15 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 15 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -12 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 4/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 4/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

EJERCICIO: ECUACIONES MATRICIALES.

Ejercicio 14. Resolver la siguiente ecuación matricial $AX + B = C$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRICES ORTOGONALES.

Una matriz cuadrada se define como **matriz ortogonal** si su inversa es igual a su matriz traspuesta. De manera que $AA^t = A^tA = I$.

$$A^t = A^{-1}$$

Propiedad. El determinante de una matriz ortogonal es 1 o -1 .

$$\text{Si } A^t = A^{-1} \Rightarrow |A| = \pm 1$$

Ejercicio 15. Demuestra que si $A^t = A^{-1} \Rightarrow |A| = \pm 1$

Ejercicio 16. Determinar si la matriz A es ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES Y MATRICES ELEMENTALES.

Se definen tres tipos de **operaciones elementales por filas**:

Tipo I. Intercambiar dos filas. $F_{i,j}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,3}} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Tipo II. Multiplicar una fila i por un escalar $\lambda \neq 0$. $F_i(\lambda)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -12 & -15 & 3 \end{pmatrix}$$

Tipo III. Sumar a una fila i otra fila j multiplicada por un escalar λ . $F_{i,j}(\lambda)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,3}(2)} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(2)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES Y MATRICES ELEMENTALES.

Definición. Se denomina **matriz elemental** E a una matriz cuadrada que resulta de efectuar una operación elemental en la matriz identidad I_n . Por tanto, definiremos tres tipos de matrices elementales asociadas a cada tipo de operación elemental: $E_{i,j}$, $E_i(\lambda)$, $E_{i,j}(\lambda)$.

$$\begin{array}{c} F_{i,j} \\ \text{Tipo I. } I_n \rightarrow E_{i,j} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} F_i(\lambda) \quad (\lambda \neq 0) \\ \text{Tipo II. } I_n \rightarrow E_i(\lambda) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} F_{i,j}(\lambda) \\ \text{Tipo III. } I_n \rightarrow E_{i,j}(\lambda) \end{array}$$

Ejercicio 17. Determina si las siguientes matrices son elementales, y de ser así qué operación elemental tienen asociada.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES Y MATRICES ELEMENTALES.

Realizar una operación elemental en las filas de una matriz A es equivalente a multiplicar A por la izquierda por la matriz elemental que corresponde a dicha operación elemental.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{2,1}(-2)} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A$$

Ejercicio 18. Dadas las matrices A y B , realiza las siguientes operaciones.

- a) $E_{1,3}A$ b) $E_3(2)A$ c) $E_{1,2}B$
d) $E_{1,3}E_3(2)A$ e) $AE_{1,3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES Y MATRICES ELEMENTALES.

Observación. Todas las matrices elementales tienen inversa.

Definición. Se denomina **matriz elemental inversa** E^{-1} a la matriz que revierte la operación elemental E . $E^{-1}E = EE^{-1} = I_n$

Tipo I. $F_{i,j}$ es la operación inversa de $F_{i,j}$.

Tipo II. $F_i(1/\lambda)$ es la operación inversa de $F_i(\lambda)$.

Tipo III. $F_{i,j}(-\lambda)$ es la operación inversa de $F_{i,j}(\lambda)$.

Ejercicio 19. Escribe las siguientes matrices considerando orden 3.

a) $E_{1,3}^{-1}$ b) $E_2^{-1}(2)$ c) $E_{2,3}^{-1}(-3)$

Ejercicio 20. Determina los siguientes determinantes a) $|E_{1,3}|$ b) $|E_2(5)|$ c) $|E_{2,3}(-5)|$

Ejercicio 21. Calcula $E_{1,3}E_2(4)E_2(1/4)E_{1,3}E_{2,3}A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

EQUIVALENCIA POR FILAS.

Definición. Se dice que dos matrices A y B son **matrices equivalentes por filas** $A \sim_f B$ si se puede transformar A en B mediante una sucesión de operaciones elementales por filas $E_1, E_2, \dots, E_k$:

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = B \Leftrightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} B$$

Ejercicio 22. Dado $B = E_3 E_2 E_1 A$ con $E_1 = E_1 \left(\frac{1}{2} \right)$, $E_2 = E_{3,2}(-1)$, y $E_3 = E_{1,3}$

- a) Obtén la matriz B .
- b) Expresa la matriz A en función de B .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

MÉTODOS DE ESCALONAMIENTO DE MATRICES.

De entre las infinitas matrices equivalentes por filas nos interesan dos tipos de matrices equivalentes: las matrices escalonadas y la matriz escalonada reducida (está última es única).

Los métodos de escalonamiento de matrices nos permiten obtener dichas matrices equivalentes mediante operaciones elementales por filas:

- ❑ **Método de Gauss:** permite obtener **una matriz escalonada equivalente**.
- ❑ **Método de Gauss-Jordan:** permite obtener **la matriz escalonada reducida equivalente**.

Algunas de las **aplicaciones** del escalonamiento de matrices son: la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (lo veremos en el tema 2), determinar el rango de una matriz y el cálculo de la inversa (lo veremos al final del tema).

MATRICES ESCALONADAS.

Definición. Se denomina **matriz escalonada** (o escalonada por filas) a una matriz que cumpla las siguientes propiedades:

- Si A tiene filas nulas, estas son las filas inferiores.
- Todo **pivote** (primer elemento no nulo de una fila) está más a la derecha que el de la fila anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si además de las propiedades anteriores la matriz cumple las siguientes dos esta será **una matriz escalonada reducida**:

- Todos los pivotes son 1.
- El resto de los elementos de las **columnas pivotaes** son 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 23. Determina si las siguientes matrices son escalonadas o escalonadas reducidas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & i & 0 & 4+i & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE GAUSS.

Los pasos del **método de Gauss o eliminación gaussiana**:

1 Comenzando por la primera columna no nula necesitamos un **pivote** en la primera fila.

Para ello intercambiamos filas si es necesario (**OE tipo I**)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Hacemos ceros por debajo del pivote mediante **OE tipo III**.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(-1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{4,1}(-2/2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

El nuevo pivote lo obtenemos avanzando una fila y columna más. Mediante intercambio con filas inferiores conseguimos un pivote y hacemos ceros por debajo de él.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{4,2}(-3/1.5) = F_{4,2}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{4,3}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

llegamos a una matriz escalonada y equivalente por filas a la matriz A

MÉTODO DE GAUSS.

Ejemplo 1. Obtén una matriz escalonada equivalente por filas a A mediante el método de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 $A = \begin{pmatrix} 0 & \textcolor{red}{0} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 0 & \textcolor{blue}{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 $\xrightarrow{F_{3,1}(-2)} \begin{pmatrix} 0 & \textcolor{blue}{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{4,1}(-3)} \begin{pmatrix} 0 & \textcolor{blue}{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

1 $\begin{pmatrix} 0 & \textbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \textcolor{blue}{2} & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

2 $\xrightarrow{F_{3,2}(3/2)} \begin{pmatrix} 0 & \textbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \textbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F_{4,2}(3)}$

Por simplificar escribimos el resultado de las dos OE para anular los elementos bajo el pivote 2.

1 $\begin{pmatrix} 0 & \textbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \textbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \textcolor{blue}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

2 $\xrightarrow{F_{4,3}(-2)} \begin{pmatrix} 0 & \textbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \textbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \textbf{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si en vez $F_{1,2}$ en la primera OE hubiéramos realizado $F_{1,3}$ o $F_{1,4}$ hubiéramos llegado a otra matriz equivalente por filas diferente.

MÉTODO DE GAUSS.

Ejemplo 2. Obtén una matriz escalonada C equivalente a B mediante el método de Gauss. Obtén $|B|$ a partir de $|C|$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \textcircled{1} \\ B = \end{matrix} \begin{pmatrix} \textcolor{red}{0} & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{3} & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} F_{3,1}(-1)} \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{3} & 6 & -1 & 2 \\ 0 & \textcolor{red}{0} & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Como no hay pivotes no nulos en filas inferiores avanzamos 1 columna

$$\begin{matrix} \textcircled{1} \\ \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{3} & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \textcolor{blue}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{F_{3,2}(-1/2)} \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{3} & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \textcolor{blue}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{4,2}(-1/2)}$$

$$C = \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{3} & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \textcolor{blue}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si la matriz es cuadrada llegaremos siempre a una matriz triangular superior

$$|B| = -|C| = 0$$

MÉTODO DE GAUSS.

El método de Gauss nos devuelve una matriz escalonada equivalente por filas a A . Pero podemos llegar a una matriz escalonada mediante otras sucesiones de operaciones elementales, luego **una matriz no es equivalente por filas a una única matriz escalonada**.

Ejemplo 3. Vamos a convertir la matriz A en escalonada utilizando dos sucesiones distintas de operaciones elementales por filas.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Siguiendo el método de eliminación Gaussiana simple:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-2/6)} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 1/3 & 11/3 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(-8/6)} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 1/3 & 11/3 \\ 0 & 4/3 & 23/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,2}(-4)} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 1/3 & 11/3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = B \quad B \sim_f A$$

Siguiendo otra sucesión de operaciones elementales por filas:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -11 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(-4)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = C \quad C \sim_f A$$

Tanto B como C son equivalentes por filas a A .

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

Pasos del **método de Gauss-Jordan** para obtener la escalonada reducida equivalente por filas:

1 Comenzando por la primera columna no nula necesitamos un pivote en la primera fila. Para ello intercambiamos filas si este es nulo (**OE tipo I**), y conseguimos pivote unitario mediante **OE tipo II**.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Hacemos **ceros por debajo y por encima** del pivote mediante **OE tipo III**.

$$\xrightarrow[\substack{F_{3,1}(-1) \\ F_{4,1}(-2)}}{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

 Avanzamos una fila y columna. Mediante OE tipo I y II con filas inferiores conseguimos un pivote igual a 1 y mediante OE tipo III hacemos ceros por debajo y por encima de él.

1 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(2/3)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *llegamos a la matriz escalonada reducida equivalente por filas a la matriz A*

2 $\xrightarrow{F_{4,2}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{hago ceros por encima}]{F_{1,2}(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \dots$

hago ceros por debajo

repetimos para columnas 3 y 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

Teorema. Toda matriz es equivalente por filas a una única matriz escalonada reducida.

Ejemplo 4. Aplicamos el método de Gauss-Jordan a la matriz A .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{4,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3(-\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{4,3}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,3}(-\frac{5}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,3}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

La función de MATLAB **rref** (*reduced row echelon form*) nos devuelve la forma escalonada reducida de una matriz, es decir, implementa Gauss-Jordan.

Ejemplo 6. Obtén las escalonadas reducidas equivalentes de A y B y determina si A y B son matrices equivalentes por filas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Aplicamos Gauss-Jordan a ambas matrices:

$$E_{1,2}(-2)E_2(-1/2)E_{2,1}(-3)A = I$$

$$E_{1,2}(-2)E_2(-1/2)B = I$$

Ambas son equivalentes a la matriz I resultante de aplicar Gauss-Jordan.

Igualando comprobamos que podemos obtener una matriz aplicando OE a la otra.

$$E_{1,2}(-2)E_2(-1/2)E_{2,1}(-3)A = E_{1,2}(-2)E_2(-1/2)B$$

$$\rightarrow A = E_{2,1}(-3)^{-1}E_2(-1/2)^{-1}(E_{1,2}(-2)^{-1}E_{1,2}(-2))E_2(-1/2)B$$

$$\rightarrow A = E_{2,1}(3)E_2(-2)E_2(-1/2)B$$

sí son matrices equivalentes por filas

```
A=[1 2; 3 4];  
B=[1 2; 0 -2]  
rref(A)  
rref(B)
```

Observación. Dos matrices son equivalentes por filas si y solo si sus matrices escalonadas reducidas coinciden.

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN: CÁLCULO INVERSA.

Teorema. Una matriz cuadrada A es invertible si y solo si es equivalente por filas a la matriz identidad.

Al ser las matrices regulares equivalentes por filas a la matriz identidad, la matriz inversa se puede obtener como producto de matrices elementales.

$$\underbrace{E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1}_{A^{-1}} A = I$$

Obtenemos A^{-1} al aplicar a la matriz identidad las operaciones elementales que permiten transformar A en su matriz escalonada reducida equivalente I .

$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{operaciones elementales por filas}]{\text{método de Gauss-Jordan}} (I \mid A^{-1})$$

Propiedad. Si A es regular podemos expresarla como producto de matrices elementales:

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = I \rightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$$

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN: CÁLCULO INVERSA.

Ejemplo 7. Obtén A^{-1} mediante el método de Gauss-Jordan y expresa A^{-1} como producto de matrices elementales.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{3,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{F_{3,2}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{1,2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3(1/4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{F_{1,3}(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,3}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{array} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad I \qquad \qquad \qquad A^{-1} \end{aligned}$$

$$\underbrace{E_{2,3}(-2)E_{1,3}(2)E_3(1/4)E_{1,2}(-1)E_{3,2}(1)E_{3,1}(-2)E_1(-1)}_{A^{-1}} A = I$$

Comprobación: $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$

RANGO DE UNA MATRIZ.

Definición. El **rango** de una matriz escalonada es el número de filas no nulas.

Teorema. Las matrices equivalentes por filas tienen igual rango.



El rango de una matriz A es el número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada equivalente por filas a A .

Otras definiciones posibles del rango de una matriz A :

- El orden de la mayor submatriz cuyo determinante sea distinto de cero.
- El número de columnas pivotaes (o número de pivotes) de cualquier matriz escalonada reducida por filas equivalente a A .
- El número de filas (o columnas) linealmente independientes de A (tema 3).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A) < 3$$

$\Downarrow$ Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2 \text{ (orden de la mayor submatriz con determinante no nulo)}$$

equivalente por filas a una matriz escalonada con 2 filas no nulas

rank(A)

RANGO DE UNA MATRIZ.

Pregunta. Dada una matriz regular de tamaño $n = 7$, ¿cuál será su rango?

En resumen, dada una matriz cuadrada A :

$$A \text{ regular} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A \sim_f I \Leftrightarrow A \text{ tiene rango igual al orden } n$$

Ejercicio 24. Determina el rango de las siguientes matrices.

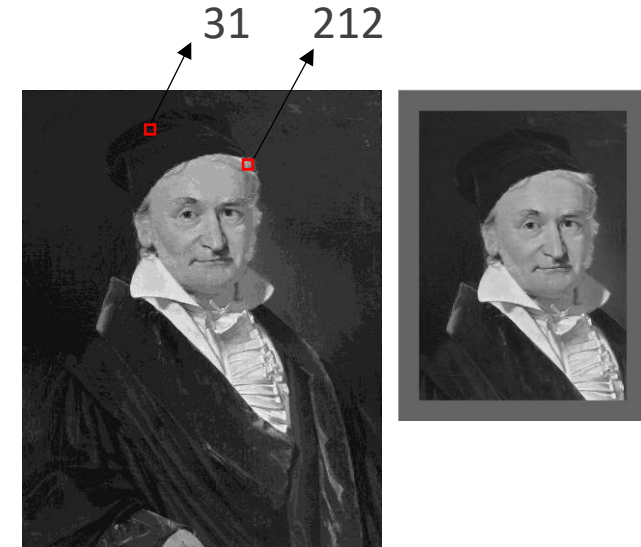
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

EJEMPLOS DE USO: PROCESAMIENTO DE IMÁGENES.

Las matrices son cruciales para representar imágenes digitales, donde cada elemento de la matriz corresponde a un píxel.

Imágenes en escala de grises

En las imágenes en escala de grises cada píxel toma valores entre 0 (negro) y 255 (blanco), con tonos de gris intermedios representando diferentes intensidades de luz.



Imágenes a color

Se suelen utilizar 3 matrices, correspondientes a los canales de color Rojo, Verde y Azul (RGB en inglés). Cada píxel en una imagen de color se representa como una combinación de estos tres colores, donde cada matriz controla la intensidad de cada color.

