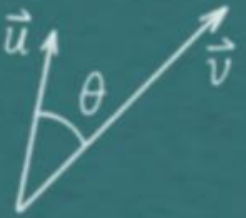


$$D = P^{-1}AP$$

$$\det(D) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

$$\text{rg}(A) = 2$$



Tema 2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\dim(S \cup T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

Sara Pérez Carabaza (sara.perezcarabaza@unican.es).

Valvanuz Fernández Quiruelas (valvanuz.fernandez@unican.es).

Dpto. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación.

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales.

Este material se publica bajo Licencia: [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



ÍNDICE

1. Matrices

2. Sistemas lineales de ecuaciones ➔

3. Espacios vectoriales

4. Espacio vectorial euclídeo

5. Aplicaciones lineales.

6. Diagonalización.

- [Introducción y clasificación.](#)
- [Sistemas equivalentes.](#)
- [Interpretación geométrica.](#)
- [Teorema Rouché-Fröbenius.](#)
- [Resolución mediante el cálculo de la inversa.](#)
- [Método de Cramer.](#)
- [Método de Gauss y Gauss-Jordan.](#)
- [Factorización LU.](#)
- [Representación números y errores de redondeo.](#)

Guía de colores

Texto = ejemplo/ejercicio

Texto = error común

Texto = hipervínculo

Texto /  = memorizar

 = definición/teorema

 = recordatorio

Texto /  = código MATLAB

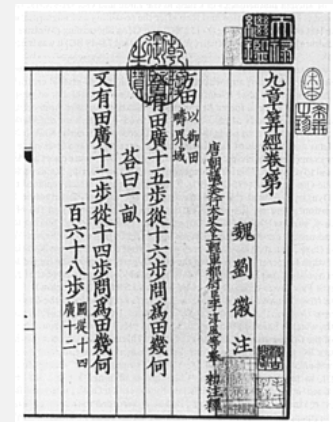
MOTIVACIÓN.

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en múltiples áreas de la Ingeniería, desde el diseño de estructuras complejas hasta el análisis de redes eléctricas a través de las Leyes de Kirchhoff y la optimización de procesos.

Uno de los primeros registros en los que se plantea un problema de sistemas lineales proviene del influyente libro chino “Nueve capítulos de la aritmética”.

Tres gavillas o manojos de una buena cosecha, dos gavillas de una cosecha mediocre y una gavilla de una mala cosecha se venden por 39 dou. Dos gavillas de buena cosecha, tres mediocres y una mala se venden por 34 dou; y una buena, dos mediocres y tres malas se venden por 26 dou. ¿Cuál es el precio recibido por cada gavilla de una buena cosecha, cada gavilla de una cosecha mediocre y cada gavilla de una mala cosecha?

Capítulo 8 del libro Nueve capítulos de aritmética, siglo I-II a.C.



INTRODUCCIÓN.

Una **ecuación lineal** se trata de una ecuación polinómica de grado 1: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

donde $a_i, b \in \mathbb{R}$, y donde las incógnitas $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ aparecen elevadas a la primera potencia (no multiplicadas entre sí, y sin funciones trascendentes).

A menudo se necesita resolver varias ecuaciones lineales que han de cumplirse a la vez (**sistema lineal de ecuaciones**). Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene la forma:

$$\begin{array}{l} \text{coeficientes:} \\ a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R} \\ \text{incógnitas: } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots + \dots + \dots + \dots + \dots = \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{términos} \\ \text{independientes:} \\ b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R} \end{array}$$

Una **solución** de un sistema es un conjunto de valores para las n incógnitas que satisfacen simultáneamente las m ecuaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Solución:} \\ (x, y) = (1, 2) \end{array}$$

CLASIFICACIÓN.

Los sistemas de ecuaciones se clasifican en **sistemas lineales** (formados únicamente por ecuaciones lineales) y **sistemas no lineales**.

Si todos los términos independientes son nulos $b_i = 0 \forall i$ se denomina **sistema lineal homogéneo**, en caso contrario **sistema lineal completo** o no homogéneo.

Ejercicio 1. Clasifica los siguientes sistemas de ecuaciones en lineales o no lineales, y los sistemas lineales en homogéneos o completos.

$$\begin{array}{lll} a) \begin{cases} 3x - \ln(y) &= & 1 \\ -2x + 4e^y &= & -2 \end{cases} & b) \begin{cases} 3x + 2y - 5z &= & -4 \\ -x - 2y + 5z &= & 2 \end{cases} & c) \begin{cases} x - y + 2z &= & 0 \\ 3x + y - 3z &= & 0 \\ -2x + 3y - 4z &= & 0 \end{cases} \\ d) \begin{cases} 3x + 2y + 2 &= & 0 \\ -x - 2y - 1 &= & 0 \end{cases} & e) \begin{cases} 2x - y + 3z &= & 2 \\ -3x + \frac{2}{y} - z &= & 1 \\ y + 2z &= & 4 \end{cases} & f) \begin{cases} 2x - y + 3z &= & 0 \\ -3x + y - z^2 &= & 1 \\ 2x + 2z &= & 0 \end{cases} \end{array}$$

FORMA MATRICIAL.

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden representarse en forma matricial $A\vec{x} = \vec{b}$, donde A es la matriz de coeficientes, $\vec{x}$ el vector de incógnitas y $\vec{b}$ el vector de términos independientes.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots + \dots\dots\dots = \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

m: número de filas de A (número de ecuaciones lineales)

n: número de columnas de A (número de incógnitas)

Es habitual representar un sistema lineal mediante su **matriz ampliada** A^* , que contiene toda la información y puede ser manipulada cómodamente.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS SEGÚN SU SOLUCIÓN.

Teorema. Un sistema lineal puede tener cero, una o infinitas soluciones.

Definiciones. Un sistema lineal se clasifica según su número de soluciones en:

- Sistema **incompatible** si no tiene solución.
- Sistema compatible si tiene solución.
 - Si tiene una única solución se denomina sistema **compatible determinado**.
 - Si tiene infinitas soluciones se denomina sistema **compatible indeterminado**.

Observación. Todo sistema lineal homogéneo es compatible, ya que tiene, como mínimo la solución trivial $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Ejercicio 2. Clasifica los siguientes sistemas lineales.

$$a) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

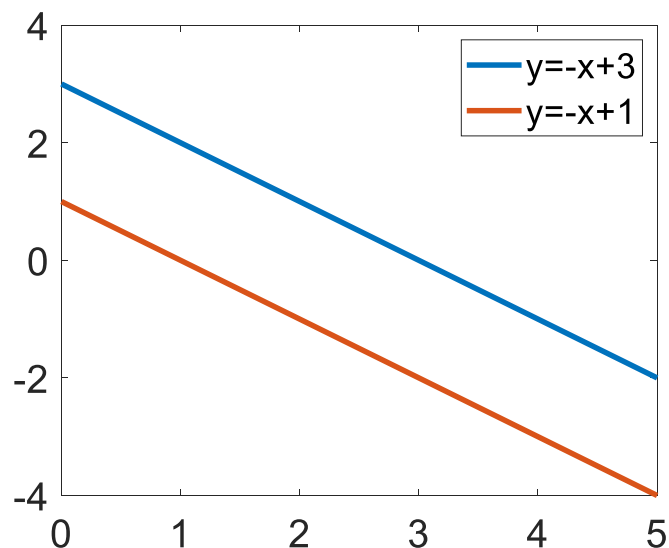
$$b) \begin{cases} x - 3y = -2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

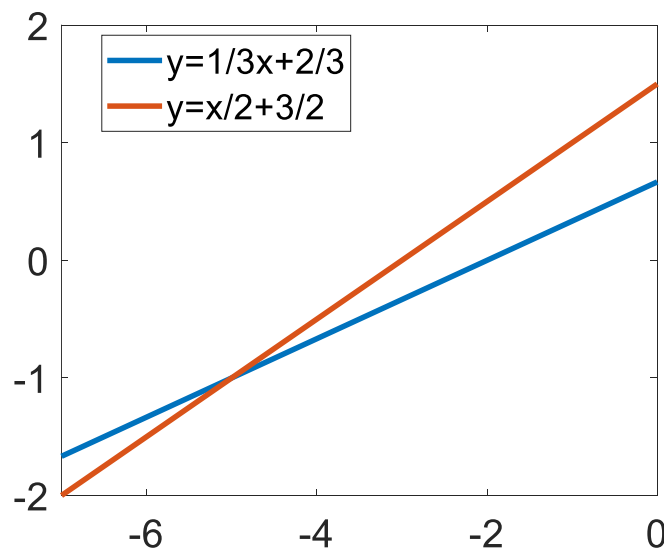
Interpretación geométrica en $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$



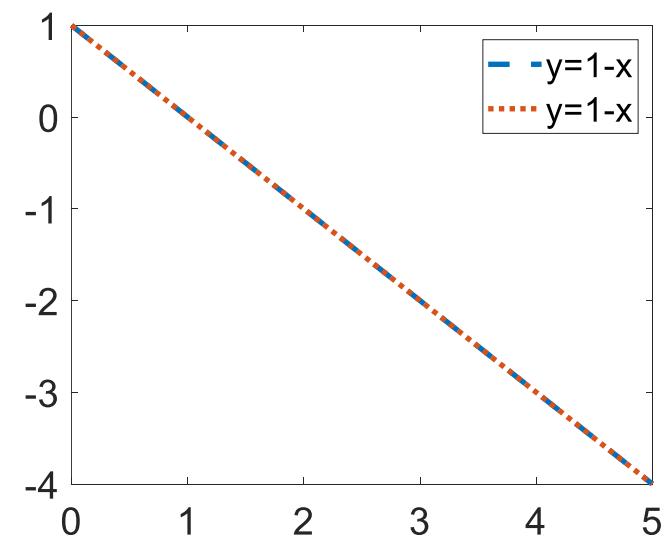
Sistema incompatible

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$



Sistema compatible determinado

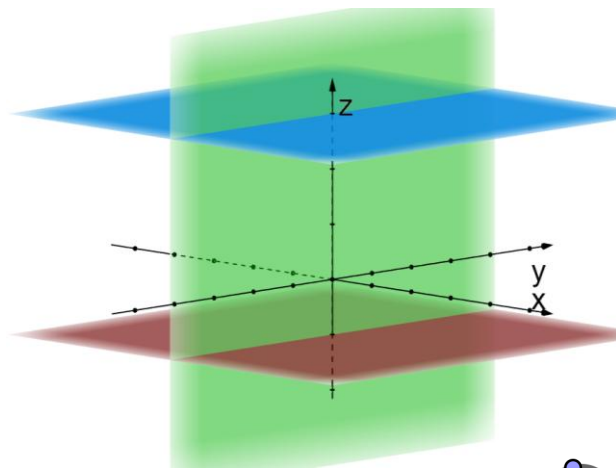
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$



Sistema compatible indeterminado

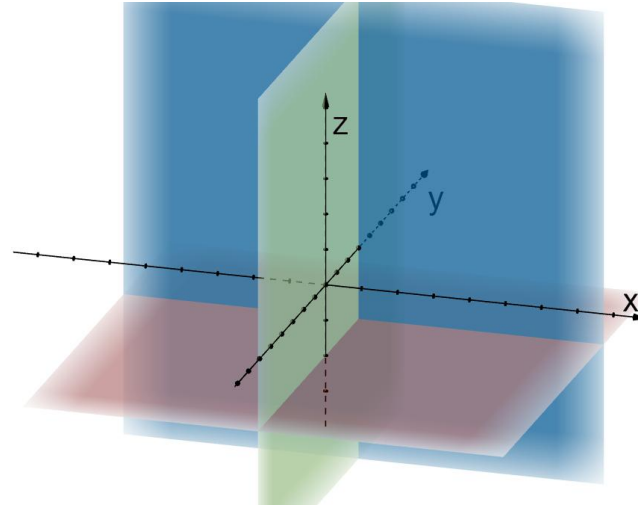
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

Interpretación geométrica en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$


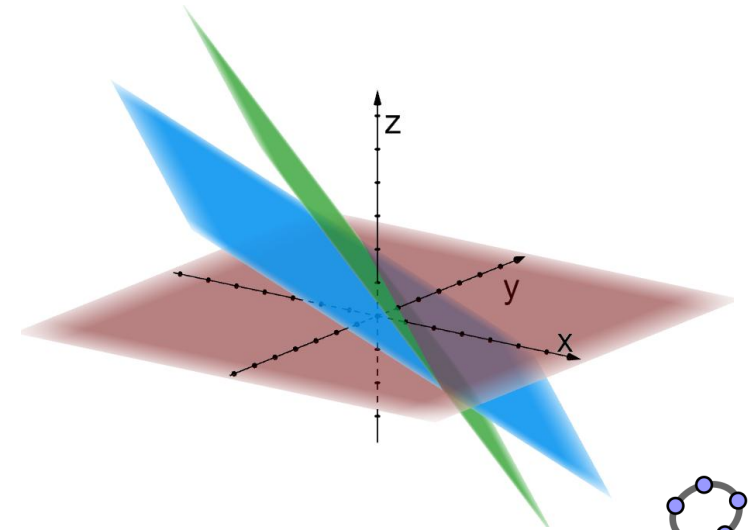
$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 6 \\ z = -2 \end{cases}$$

Sistema incompatible



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Sistema compatible determinado



$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sistema compatible indeterminado

SISTEMAS EQUIVALENTES.

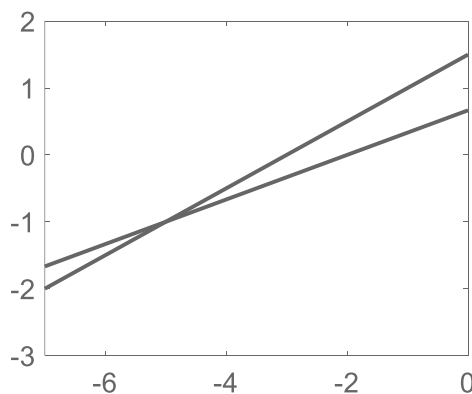
Definición. Se dice que dos **sistemas** son **equivalentes** si coincide su solución general (conjunto de todas las soluciones del sistema).

Ejercicio 3. Determina si los sistemas b), c) y d) son equivalentes al sistema a).

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x - 3y = -2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Solución:

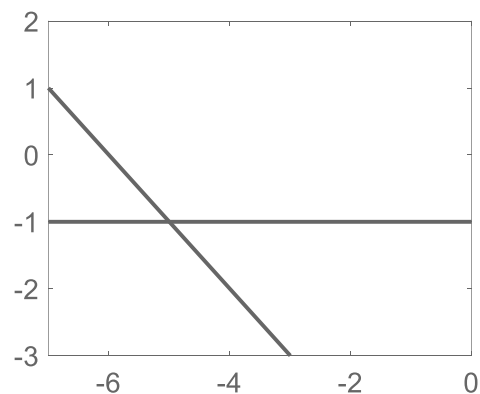
$$(x, y) = (-5, -1)$$



$$\text{b)} \quad \begin{cases} -y = 1 \\ x + y = -6 \end{cases}$$

Solución:

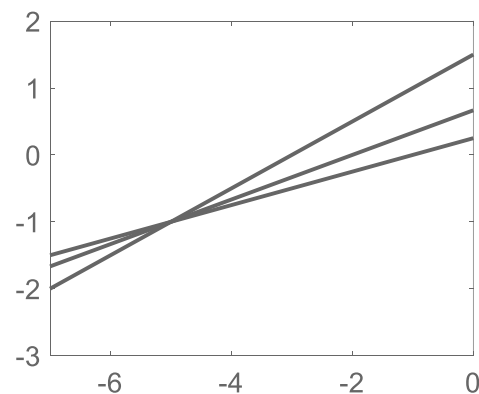
$$(x, y) = (-5, -1)$$



$$\text{c)} \quad \begin{cases} x - 3y = -2 \\ -x + 2y = 3 \\ x - 4y = -1 \end{cases}$$

Solución:

$$(x, y) = (-5, -1)$$



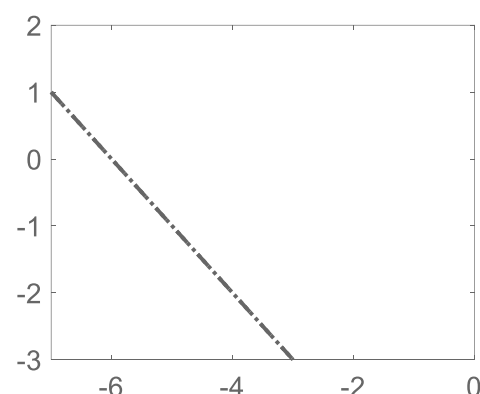
$$\text{d)} \quad \begin{cases} x + y = -6 \\ 2x + 2y = -12 \end{cases}$$

Solución:

$$(x, y) = (-5, -1)$$

$$(x, y) = (-7, 1)$$

$\vdots$



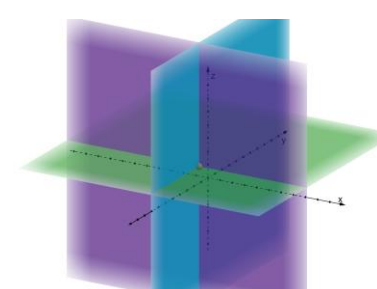
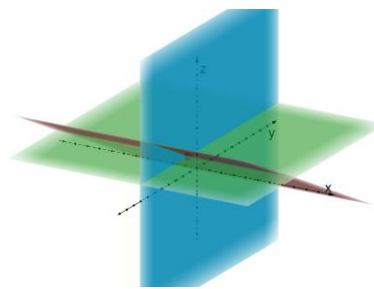
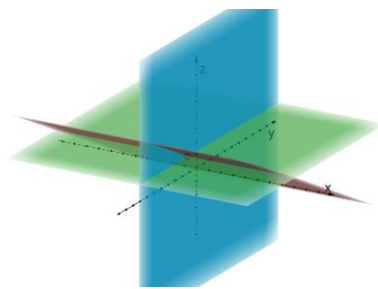
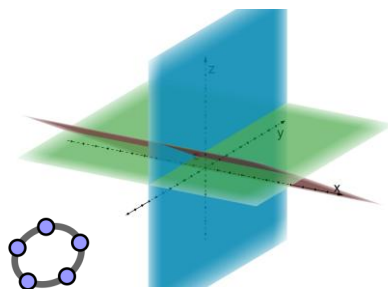
SISTEMAS EQUIVALENTES.

Teorema. Si las matrices ampliadas de dos sistemas lineales son equivalentes por filas, entonces los sistemas son equivalentes.

Si aplicamos las operaciones elementales por filas a la matriz ampliada la solución del sistema no cambia.

Ejemplo 1. Los siguientes sistemas lineales de ecuaciones son equivalentes:

$$\begin{cases} y + 2z = 1 \\ 2x = 2 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2 \\ y + 2z = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y + 2z = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{1,2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1(1/2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,3}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$



Aunque las OE pueden modificar las ecuaciones y los planos asociados, la solución (punto de corte) no cambia

SISTEMAS ESCALONADOS.

Ejercicio 4. Determina si los siguientes sistemas son equivalentes.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 8 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ x + y + z = 3 \\ -2x + 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Definición. Un sistema lineal es un **sistema escalonado** si su matriz ampliada A^* es escalonada y **esalonado reducido** si su matriz ampliada A^* es escalonada reducida

Propiedad. Si dos sistemas lineales son equivalentes al mismo sistema escalonado reducido, entonces son sistemas equivalentes entre sí (misma solución).

SISTEMAS ESCALONADOS.

Dos observaciones interesantes sobre las matrices ampliadas de los sistemas escalonados.

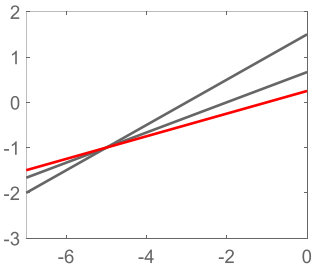
Observación 1. Si A^* es escalonada y tiene un **pivote en la última columna** entonces se trata de un **sistema incompatible**. Una ecuación $0 = b$ con b no nulo no tiene solución.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ \textcolor{red}{0} = \textcolor{red}{-4} \end{cases}$$

Observación 2. Si A^* es escalonada y tiene **filas nulas** (correspondientes a ecuaciones $0 = 0$), indica **ecuaciones redundantes** que podremos eliminar al no aportar ninguna información.

$$S_1 : \begin{cases} x - 3y = -2 \\ -x + 2y = 3 \\ \textcolor{red}{x - 4y = -1} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(1)} \xrightarrow[\text{Gauss}]{F_{3,1}(-1)} \xrightarrow{F_{3,2}(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} \end{array} \right)$$

Solución:
 $(x, y) = (-5, -1)$


$$S_2 : \begin{cases} x - 3y = -2 \\ -y = 1 \end{cases}$$

Nota: En este ejemplo podemos eliminar cualquiera de las tres ecuaciones del sistema S_1 sin modificar su solución, pero ojo no siempre es posible eliminar cualquiera. Lo más sencillo para obtener un sistema equivalente sin ecuaciones redundantes es quedarnos con un sistema escalonado equivalente como S_2 .

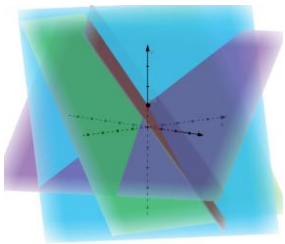
EJERCICIO.

nº de ecuaciones de un sistema lineal $\equiv$ nº de ecuaciones linealmente independientes $rg(A^*)$ $+$ nº de ecuaciones redundantes

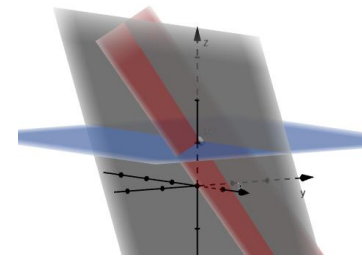
Ejemplo 2. Obtén un sistema equivalente sin ecuaciones redundantes.

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2z = 1 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{sistemas equivalentes} \\ \Leftrightarrow \end{array} \quad S_2 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y - z = -2 \\ 3z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \xrightarrow{F_{3,1}(-3)} \xrightarrow{F_{4,1}(-1)} \xrightarrow{F_{3,2}(-1)} \xrightarrow{F_{4,2}(-1)} \xrightarrow{F_{3,4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



sistemas compatibles determinados con solución:
 $(x, y, z) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$



Pregunta. ¿Es el sistema formado por las tres primeras ecuaciones equivalente?

TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS.

Teorema de Rouché-Fröbenius. Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas y A^* su matriz ampliada, y B^* un sistema lineal escalonado equivalente.

- Si $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$ entonces $A\vec{x} = \vec{b}$ es un sistema incompatible.
 B^* tendrá pivotes en la última columna.
- Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$ entonces $A\vec{x} = \vec{b}$ es un sistema compatible.
 B^* no tendrá pivotes en la última columna.
 - Si $\text{rango}(A) = n$ entonces es compatible determinado.
 B^* tendrá tantos pivotes como incógnitas.
 - Si $\text{rango}(A) < n$ entonces es compatible indeterminado
 B^* tendrá menos pivotes que incógnitas.

Ejercicio 5. Clasifica los siguientes sistemas lineales utilizando el teorema anterior.

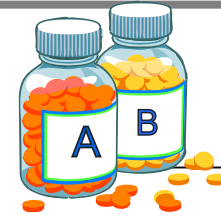
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

EJERCICIO.

Ejercicio 6. Dos clases de suplementos, a los que denominaremos A y B, presentan las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla. Las cantidades corresponden a miligramos por unidad de suplemento.



	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

Demuestra que combinando las dos clases de suplementos no podemos obtener el siguiente aporte exacto: 17 mg de vitamina C, 54 mg de calcio y 31 mg de magnesio.

MÉTODO INVERSA. SISTEMAS COMPATIBLES DETERMINADOS.

Un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ con matriz de coeficientes A cuadrada de orden n , es compatible determinado si y solo si A es regular.

Observación. Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ con A cuadrada y regular la solución del sistema es $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Ejemplo 3. Resolución sistema compatible determinado mediante método de la inversa.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = 2 \\ -2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \left(\begin{array}{c|c|c} \left| \begin{array}{cc} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{array} \right| \end{array} \right)^t = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -6 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 3/10 \end{pmatrix}$$

$A=[1 \ 3 \ 0; 1 \ 0 \ -2; 0 \ -2 \ 2];$
 $b=[1 \ 2 \ 3]'$
 $\det(A)\% \text{ sist. regular}$
 $x=\text{inv}(A)*b$
 $A*x-b\% \text{ comprobación}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 3/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/5 \\ -4/5 \\ 7/10 \end{pmatrix} \quad \text{Comprobación:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17/5 \\ -4/5 \\ 7/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

MÉTODO DE CRAMER.

El método o **regla de Cramer** nos permite calcular la solución de un sistema compatible determinado con n ecuaciones y n incógnitas como:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

donde A_i es la matriz resultante de sustituir en A la columna i por el vector de términos independientes.

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE CRAMER.

Ejemplo 4. Resolución de un sistema lineal compatible determinado mediante el método de Cramer.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ -9 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 58 \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 32 \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{58}{2} = 29$$

Comprobación:

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{32}{2} = 16$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\begin{aligned} 29 - 2 \cdot 16 + 3 &= 0 \quad \checkmark \\ 2 \cdot 16 - 8 \cdot 3 &= 8 \quad \checkmark \\ -4 \cdot 29 + 5 \cdot 16 + 9 \cdot 3 &= -9 \quad \checkmark \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

MÉTODO DE GAUSS O ELIMINACIÓN GAUSSIANA.

El **método de Gauss** consiste en transformar un sistema lineal mediante operaciones elementales en otro escalonado, para después resolverlo por sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Paso 1
(escalonar)



$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a^{(n-1)}_{nn}x_n &= b^{(n-1)}_n \end{aligned}$$



Paso 2
(resolver mediante
sustitución regresiva)

Ejemplo 5.

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Sistema compatible determinado

$$rg(A) = rg(A^*) = n = 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -2 \\ -y = 1 \end{cases} \uparrow \begin{cases} x = -2 - 3 = -5 \\ y = -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x = -2 - 3 = -5 \\ y = -1 \end{cases}$$

MÉTODO DE GAUSS O ELIMINACIÓN GAUSSIANA.

Ejemplo 6.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sistema incompatible} \\ rg(A) \neq rg(A^*) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{3,1}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{3,2}(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

El **número de parámetros libres** en los sistemas compatibles es igual a $n - rg(A)$.

Convenio: asignamos valores genéricos o parámetros a las incógnitas asociadas a columnas no pivotaes, expresando el conjunto de soluciones en forma paramétrica.

Ejemplo 7.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{SCI} \\ rg(A) = rg(A^*) \\ n - rg(A) = 1 \end{array}$$
$$\rightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = -1 \\ z = \alpha \end{cases} \quad \text{Solución: } \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \alpha \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

MÉTODO DE GAUSS O ELIMINACIÓN GAUSSIANA.

Ejemplo 8.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_4 + x_5 = -2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{3} & 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{SCI} \\ rg(A) = rg(A^*) \\ n - rg(A) = 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_4 + x_5 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \\ x_2 = \beta \\ 2x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_4 + x_5 = -2 \\ x_5 = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} x_1 = -\beta - \frac{2}{3}\alpha - 2 \\ x_2 = \beta \\ \uparrow x_3 = 3 \\ x_4 = -\alpha - 2 \\ x_5 = \alpha \end{array}$$

$$\text{Solución: } \{\vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha - \frac{2}{3}\beta - 2 \\ \alpha \\ 3 \\ -\beta - 2 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Comprobación: Podríamos sustituir la sol. general en forma paramétrica en las ecuaciones para comprobar su validez. Es recomendable verificar al menos una sol. particular (obtenida al dar valores a los parámetros).

$$\alpha = 1, \beta = 3 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-5, 1, 3, -5, 3)$$

$$\begin{array}{l} 3(-5) + 3(1) + 3 - (-5) + 3 = -1, \\ 2 \cdot 3 + (-5) + 3 = 4, \\ (-5) + 3 = -2. \end{array}$$



MÉTODO DE GAUSS O ELIMINACIÓN GAUSSIANA.

Ejercicio 9. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de Gauss.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Sol : } \{\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - \beta - \alpha/2 \\ -\alpha/2 - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

El **método de Gauss-Jordan** consiste en obtener el sistema equivalente reducido, obteniendo directamente la solución.

Ejemplo 9.
$$\begin{cases} 4x + 16y + 64z = 100 \\ 2x + 4y + 8z = 6 \\ x + y + z = -2 \end{cases} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 16 & 64 & 100 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$



Gauss
1777-1855

Jordan
1838-1922

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{F_1(1/4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[F_{3,1}(-1)]{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -4 & -24 & -44 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2(-1/4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & -3 & -15 & -27 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[F_{1,2}(-4)]{F_{3,2}(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & -19 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3(1/3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & -19 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[F_{2,3}(-6)]{F_{1,3}(8)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

```
A=[ 4 16 64; 2 4 8; 1 1 1 ];  
b=[100 6 -2 ]';  
Aamp=[A b];  
rref(Aamp)
```

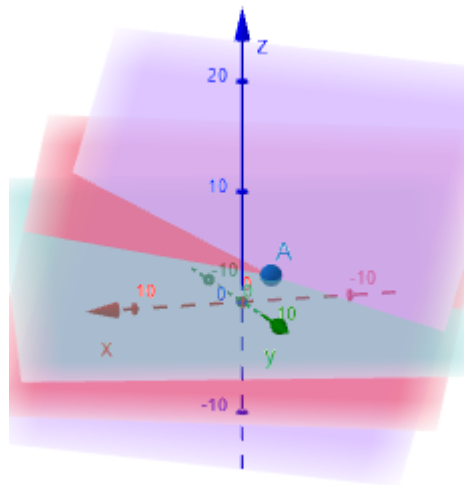
Observación. Dado un SCD $A\vec{x} = \vec{b}$ con A cuadrada, puesto que la matriz de coeficientes A será regular su matriz escalonada reducida será la matriz identidad.

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

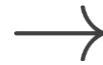
Recordemos que los sistemas escalonados que obtenemos tanto con los métodos de Gauss como Gauss-Jordan son sistemas equivalentes, ya que las operaciones elementales por filas aplicadas a la matriz ampliada no modifican la solución del sistema.

$$\begin{cases} 4x + 16y + 64z = 100 \\ 2x + 4y + 8z = 6 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$$

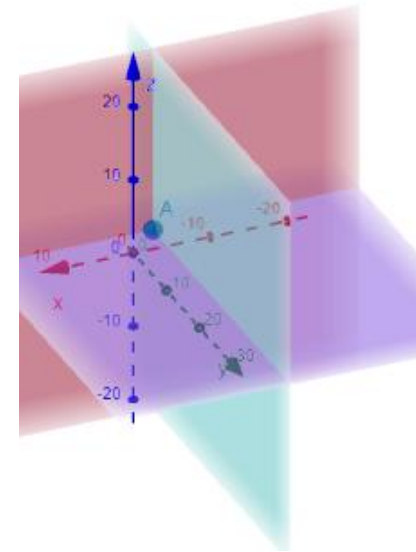
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$



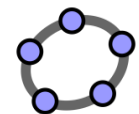
Gauss-Jordan



```
A=[ 4 16 64; 2 4 8; 1 1 1 ];  
b=[100 6 -2 ]';  
Aamp=[A b];  
rref(Aamp)
```



Pregunta. Aunque los planos de los sistemas son diferentes, el punto en común (solución) no cambia. ¿Cómo modifican las operaciones elementales por filas la representación geométrica del sistema de ecuaciones?



MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

Ejercicio 10. Resuelve el siguiente sistema mediante el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ -x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 &= 5 \end{cases}$$

Bamp=[1 2 0 0 4;0 0 -1 1 1;0 0 1 0 5]
rref(Bamp)

Solución:

$$\vec{x} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - 2\alpha \\ \alpha \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

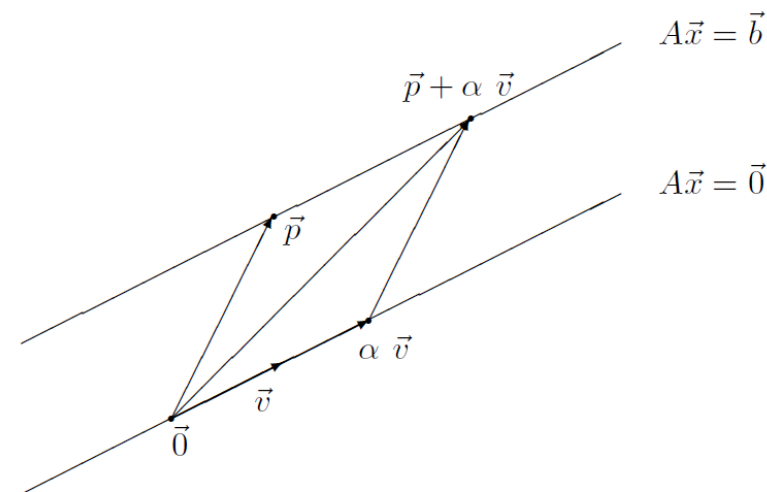
TEOREMA DE LA DESCOMPOSICIÓN DE LA SOLUCIÓN.

Teorema de la descomposición de la solución de un sistema lineal.

La solución general de un sistema no homogéneo compatible $A\vec{x} = \vec{b}$, se puede expresar como la suma de una solución particular de sistema no homogéneo más la solución general del sistema homogéneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{x} & = & \vec{x}_p & + & \vec{x}_h \\ \text{solución general} & & \text{solución particular del} & & \text{solución general del} \\ \text{sistema completo} & & \text{sistema completo} & & \text{homogéneo asociado} \end{array}$$

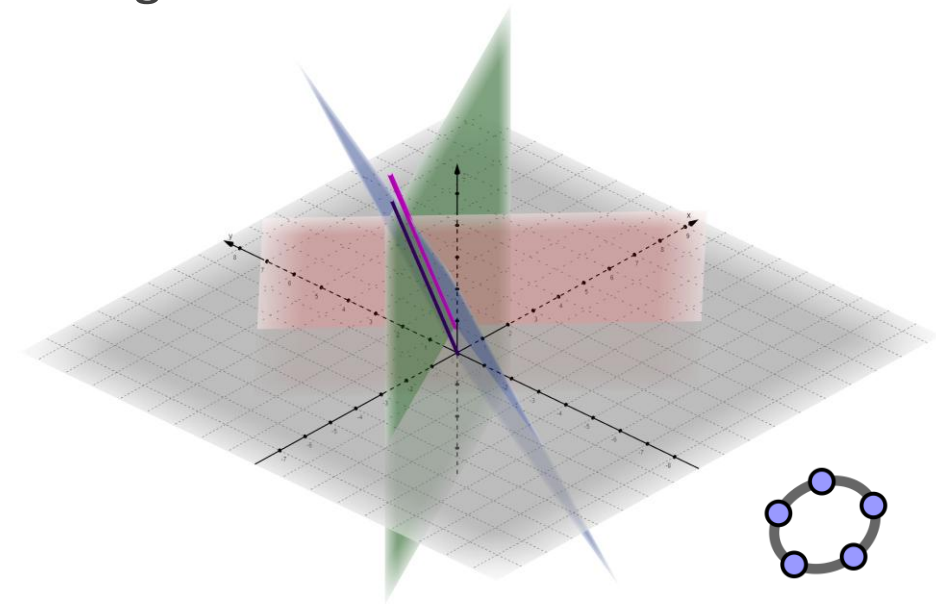
En $\mathbb{R}^3$, donde las soluciones de los SCI con un parámetro libre representan rectas en el espacio. La solución de $A\vec{x} = \vec{b}$ es igual a la recta solución de $A\vec{x} = \vec{0}$, trasladada por el vector $\vec{p}$, siendo $\vec{p}$ cualquier solución particular de $A\vec{x} = \vec{b}$.
No hay solución común a ambos sistemas.



EJERCICIO.

Ejercicio 11. Resuelve el SCI mediante Gauss y utiliza el teorema de descomposición de soluciones para obtener la solución de su sistema homogéneo asociado.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$$



Solución:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3}\alpha \\ 1 - \frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
A=[ 1 1 1 ; 2 -1 1 ; 1 -2 0];  
b=[2 1 -1]'  
Aamp=[A b]  
rref(Aamp) %gauss-jordan
```

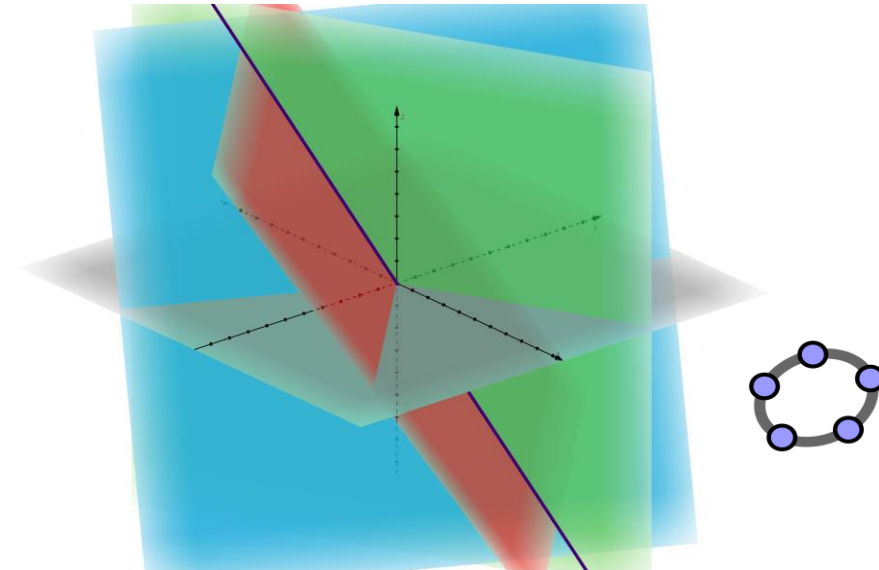
EJERCICIO.

Continuación. Resuelve el sistema homogéneo asociado mediante el método de Gauss y comprueba que llegas a la solución esperada.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



```
A=[ 1 1 1 ; 2 -1 1 ; 1 -2 0];  
b=[0 0 0]'  
Aamp=[A b]  
rref(Aamp) %Gauss-Jordan  
null(A,'r') % otra opción para homogéneos
```

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE SL: FACTORIZACIÓN LU.

Se llama **factorización LU** a la descomposición de una matriz **A regular** en el producto de una matriz triangular inferior con unos en su diagonal **L** y una matriz triangular superior **U**, es decir **A=LU**.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \underset{A}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{=} \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix} \underset{U}{=}$$

Esta factorización permite resolver SCD mediante la resolución de dos sistemas triangulares.

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow L \underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} L\vec{y} = \vec{b} \\ U\vec{x} = \vec{y} \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{=} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \underset{\vec{y}}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \underset{\vec{b}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix} \underset{U}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \underset{\vec{x}}{=} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \underset{\vec{y}}{=}$$

FACTORIZACIÓN LU.

Para realizar la factorización LU se utiliza el **algoritmo de los multiplicadores cambiados de signo** que se ilustra a continuación. Este aplica el método de Gauss (con OE tipo III exclusivamente) y tras realizar $F_{i,j}(\lambda)$ actualiza $l_{i,j} = -\lambda$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \\ -6 & -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \\ -6 & -9 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ -6 & -9 & 10 \end{pmatrix}$$

$I \qquad A$

$$\xrightarrow{F_{3,1}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,2}(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$L \qquad U$

Ejercicio 12. Obtén la factorización LU de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -8 & 5 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

FACTORIZACIÓN LU.

La factorización de la matriz de coeficientes A nos permite resolver el sistema regular fácilmente mediante la resolución de dos sistemas triangulares: i) $L\vec{y} = \vec{b}$ y ii) $U\vec{x} = \vec{y}$

Ejemplo 10.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -21 \\ -6x_1 - 9x_2 + 10x_3 = -24 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

L U

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ -24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 12 \\ 1/2 y_1 + y_2 = -21 \\ -3y_1 - 1/2 y_2 + y_3 = -24 \end{cases}$$

$y_1 = 12$
 $y_2 = -27$
 $y_3 = -\frac{3}{2}$

↓
sustitución
hacia adelante

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 12 \\ -6x_2 + 5x_3 = -27 \\ +1/2 x_3 = -3/2 \end{cases}$$

$x_1 = -4$
 $x_2 = 2$
 $x_3 = -3$

↑
sustitución
hacia atrás

FACTORIZACIÓN LU.

Únicamente podremos factorizar como $A = LU$ aquellas matrices regulares escalonables sin necesidad de intercambiar filas (es decir, usando solo OE tipo III). En ese caso, la factorización $A = LU$ con L triangular inferior con unos en la diagonal es única.

Para aquellas matrices donde es necesario intercambiar filas (OE tipo I) se introduce una **matriz de permutación P** , obteniéndose la factorización $PA=LU$. Esta factorización no es única (dependerá de las filas que intercambiamos).

ejemplo matriz de permutación P

$$P = E_{3,4}E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dicha factorización nos permite resolver el sistema regular mediante la resolución de dos sistemas triangulares: i) $A\vec{y} = P\vec{b}$ y ii) $U\vec{x} = \vec{y}$

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow PA\vec{x} = P\vec{b} \Rightarrow L \underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}} = P\vec{b} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} L\vec{y} = P\vec{b} \\ U\vec{x} = \vec{y} \end{array} \right\}$$

FACTORIZACIÓN LU.

Ejemplo 9. Factorización PA=LU.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{comenzamos escribiendo } IA=IA \\
 & \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{registro el intercambio de filas en la matriz P} \\
 & \quad \quad \quad \text{y en L (solo por debajo de la diagonal)} \\
 & \xrightarrow{F_{3,1}(-1/2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{registro el multiplicador} \\
 & \quad \quad \quad \text{cambiado de signo en } l_{3,1} \\
 & \xrightarrow{F_{3,2}(-2) \atop F_{4,2}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{registro los multiplicadores} \\
 & \quad \quad \quad \text{cambiados de signo en } l_{3,2}, l_{4,2} \\
 & \xrightarrow{F_{3,4}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -11/2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$[L, U, P] = lu(A)$$

FACTORIZACIÓN LU.

Este algoritmo podemos escribirlo también de la siguiente manera si nos es más cómodo.

Método Gauss: escalonamos la matriz A.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,1}(-1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_{3,2}(-2) \\ F_{4,2}(-1)}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,4}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -11/2 \end{pmatrix}$$

Matriz de permutación P: registra los cambios de filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{3,4}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz L: registra los multiplicadores cambiados de signo, y los cambios de fila por debajo de su diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE SL: FACTORIZACIÓN LU.

Ejemplo 10. Resolución sistema.

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -11/2 \end{pmatrix}$$

$P \qquad A \qquad L \qquad U$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \\ y_2 + y_3 = 0 \\ 1/2 y_1 + 2y_2 + y_4 = 1 \end{cases}$$

$L \qquad \vec{y} \qquad P\vec{b}$

$y_1 = 2$
 $y_2 = -2$
 $y_3 = 2$
 $y_4 = 4$

↓
sustitución
hacia adelante

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -11/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$U \qquad \vec{x}$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 = 2 \\ +x_2 + 3x_4 = -2 \\ +x_3 - 2x_4 = 2 \\ -11/2 x_4 = 4 \end{cases}$$

$x_1 = \frac{15}{11}$
 $x_2 = \frac{2}{11}$
 $x_3 = \frac{6}{11}$
 $x_4 = -\frac{8}{11}$

↑
sustitución
hacia atrás

FACTORIZACIÓN LU: CÁLCULO DEL DETERMINANTE.

Otra importante aplicación de la factorización LU es el cálculo de determinantes. El determinante de A se puede obtener de la siguiente manera:

$$|A| = (-1)^p \prod_{i=1}^n u_{ii}$$

donde p es el número de intercambios de filas realizados durante la factorización.

Ejercicio 13. Demuestra la expresión anterior.

Ejercicio 14. Obtén el determinante de las matrices factorizadas anteriormente.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \\ -6 & -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$A \qquad \qquad \qquad L \qquad \qquad \qquad U$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -11/2 \end{pmatrix}$$

$P \qquad \qquad \qquad A \qquad \qquad \qquad L \qquad \qquad \qquad U$

MÉTODOS DIRECTOS DE RESOLUCIÓN.

Métodos directos. Obtienen la solución en un número finito de pasos. Se usan principalmente para sistemas pequeños o medianos donde se busca precisión y garantía de solución (si existe).

- Método de Cramer

- 😊 conceptualmente simple

- 😞 muy costoso computacionalmente 😞 aplicable únicamente si A es regular.

- Método de Gauss

- 😊 eficiente para matrices bien condicionadas de tamaño moderado.

- 😞 sensible a errores de redondeo, puede ser ineficiente para sistemas grandes.

- Método de Gauss-Jordan

- 😞 mayor cantidad de operaciones que Gauss.

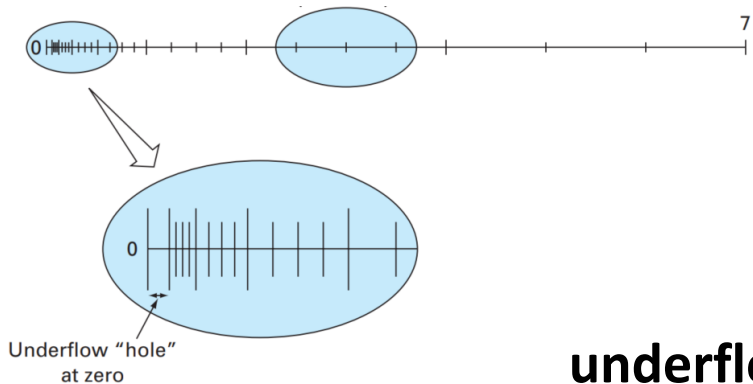
- Método de factorización LU

- 😊 eficiente para múltiples sistemas con la misma matriz de coeficientes.

- 😞 aplicable únicamente si A es regular.

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS EN EL ORDENADOR.

El ordenador representa los números en binario, utilizando una cantidad limitada de bits (1 o 0s). El formato de punto flotante "double" (doble precisión) utiliza 64 bits para representar números reales en computación.



overflow o desbordamiento: se excede el máximo valor representable

underflow o subdesbordamiento: cuando tenemos un número menor en valor absoluto al número más pequeño representable

Ejercicio 7. Define en MATLAB los siguientes números 2^{1023} , 2^{1024} , -2^{1023} , -2^{1024} , 10^{-323} , 10^{-324} . Explica los resultados obtenidos.

Ejercicio 8. Calcula con MATLAB 0.3-0.2-0.1

ERRORES DE REDONDEO.

Los **errores de redondeo** se producen cuando se usan números que tienen un límite de cifras significativas para representar números exactos. Esta representación limitada de los números ocurre en todo computador.

$\pi = 3.14159 \dots \rightarrow 3.1416$ redondeado a 5 cifras significativas

El problema del error de redondeo puede volverse particularmente importante cuando se deben resolver grandes sistemas de ecuaciones. Esto se debe al hecho de que cada resultado depende de los resultados anteriores. En consecuencia, un error en los primeros pasos tenderá a propagarse; es decir, causará errores en los pasos siguientes.



SISTEMAS MAL CONDICIONADOS.

Los errores de redondeo pueden tener un impacto significativo en los **sistemas lineales mal condicionados**. Un sistema mal condicionado es aquel que presenta una alta sensibilidad a cambios en los datos de entrada; es decir, pequeñas variaciones en los coeficientes pueden resultar en grandes cambios en las soluciones.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 1.1x_1 + 2x_2 = 10.4 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 1.05x_1 + 2x_2 = 10.4 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durante procesos como el método de eliminación de Gauss, los errores de redondeo se pueden acumular y propagar, resultando en una solución numérica que puede variar considerablemente de la solución exacta. En sistemas mal condicionados, esta variación es particularmente problemática ya que la solución puede ser muy sensible a dichos errores.