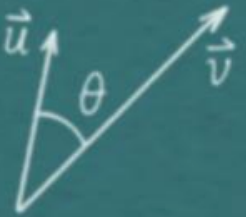


$$D = P^{-1}AP$$

$$\det(D) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

$$\text{rg}(A) = 2$$



Tema 3. Espacios Vectoriales

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\dim(S \cup T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

Sara Pérez Carabaza (sara.perezcarabaza@unican.es).

Valvanuz Fernández Quiruelas (valvanuz.fernandez@unican.es).

Dpto. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación.

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales.

Este material se publica bajo Licencia: [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



ÍNDICE

1. Matrices

2. Sistemas lineales de ecuaciones

3. Espacios vectoriales



4. Espacio vectorial euclídeo

5. Aplicaciones lineales.

6. Diagonalización.

- [Introducción espacios vectoriales. Subespacios vectoriales.](#)
- [Combinación lineal. Dependencia e independencia lineal. Rango.](#)
- [Sistemas generadores: Base, dimensión y coordenadas. Sistema generador \$\rightarrow\$ base. Cambio de base.](#)
- [Subespacios de \$\mathbb{R}^n\$. Forma implícita y paramétrica. Paso a forma implícita.](#)
- [Operaciones con subespacios: Subespacio intersección y subespacio suma. Subespacios complementarios. Ejemplos en \$\mathbb{R}^3\$](#)

Guía de colores

Texto = ejemplo/ejercicio

Texto = error común

Texto = hipervínculo

Texto /  = memorizar

 = definición/teorema

 = recordatorio

Texto /  = código MATLAB

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS VECTORIALES.

Definición. Un **vector** es un elemento de un espacio vectorial.

Antes de ver la definición de espacio vectorial, veamos un ejemplo ya conocido.

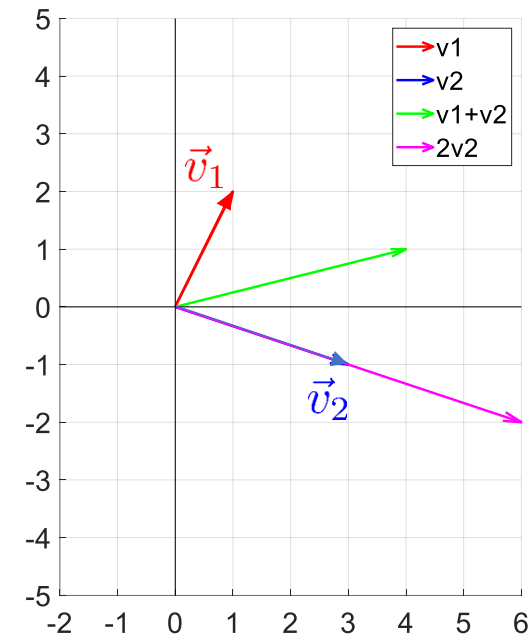
Ejemplo de espacio vectorial: $\mathbb{R}^2$. Sea $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Propiedades de la suma de vectores:

- 1) $\vec{v} + \vec{u} \in \mathbb{R}^2$
- 2) $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ conmutativa
- 3) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ asociativa
- 4) $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ elemento neutro de la suma
- 5) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ elemento opuesto o simétrico

Propiedades de la multiplicación vector por un escalar:

- 6) $\alpha \vec{u} \in \mathbb{R}^2$
- 7) $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$ asociativa
- 8) $1\vec{u} = \vec{u}$ elemento neutro $1 \in \mathbb{R}$
- 9) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, distributiva del producto respecto a la suma de vectores
- 10) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ distributiva del producto respecto a la suma de escalares



DEFINICIÓN DE LOS ESPACIOS VECTORIALES.

Definición. Cualquier conjunto V que posea unas operaciones suma y producto por escalares $\alpha \in \mathbb{K}$, cumpliendo todas las propiedades listadas a continuación es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ diremos que V es un **espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$** , mientras que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, diremos que V es un **espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$** .

Notación: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ para vectores, mientras que las letras griegas $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ designarán escalares.

Propiedades de la suma de vectores:

- 1) $\vec{u} + \vec{v} \in V$ la suma de dos vectores es un vector
- 2) $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$ conmutativa
- 3) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ asociativa
- 4) $\vec{0} \in V$ tal que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ existencia elemento neutro de la suma
- 5) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ existencia elemento opuesto o simétrico de la suma

Propiedades del producto de un vector por un escalar:

- 6) $\alpha \vec{u} \in V$ el producto de un escalar por un vector es un vector
- 7) $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$ asociativa
- 8) $1\vec{u} = \vec{u}$ existencia elemento neutro de la multiplicación por un escalar $1 \in \mathbb{K}$
- 9) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ distributivas
- 10) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS VECTORIALES.

Ejemplo 1. El conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2 dado por $\mathbb{P}_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Definición de la suma de polinomios:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

La suma de polinomios cumple las propiedades 1), 2), 3), 4) y 5).

Definición sobre el producto por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2$$

El producto de un polinomio por un escalar cumple las propiedades 6), 7), 8), 9) y 10).

Ejercicio 1. Razona si el conjunto de polinomios de grado (estrictamente) 2 con coeficientes reales es o no un espacio vectorial.

Ejercicio 2. Razona si el conjunto $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ de matrices reales cuadradas de orden 2 es un espacio vectorial real.

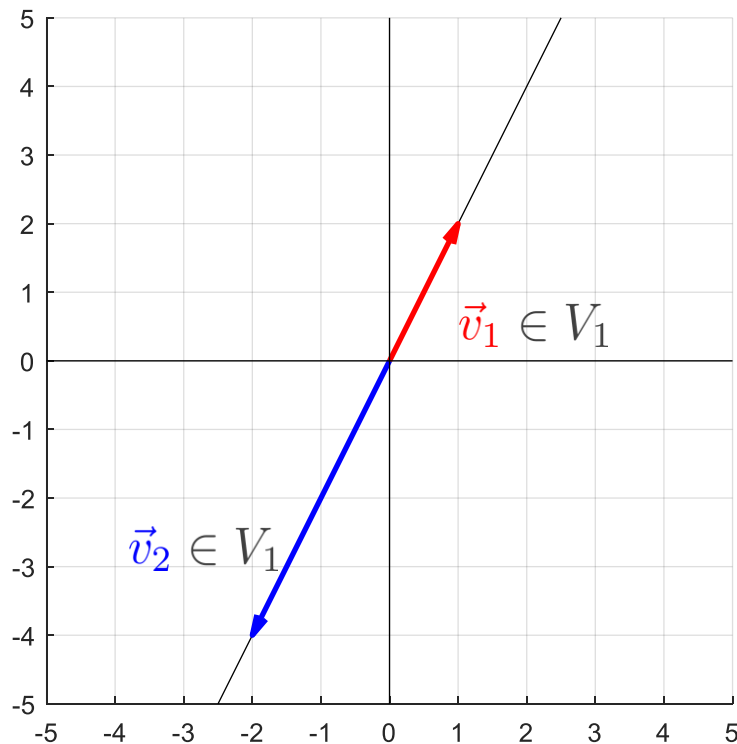
Nota: En adelante nos centraremos en el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS VECTORIALES.

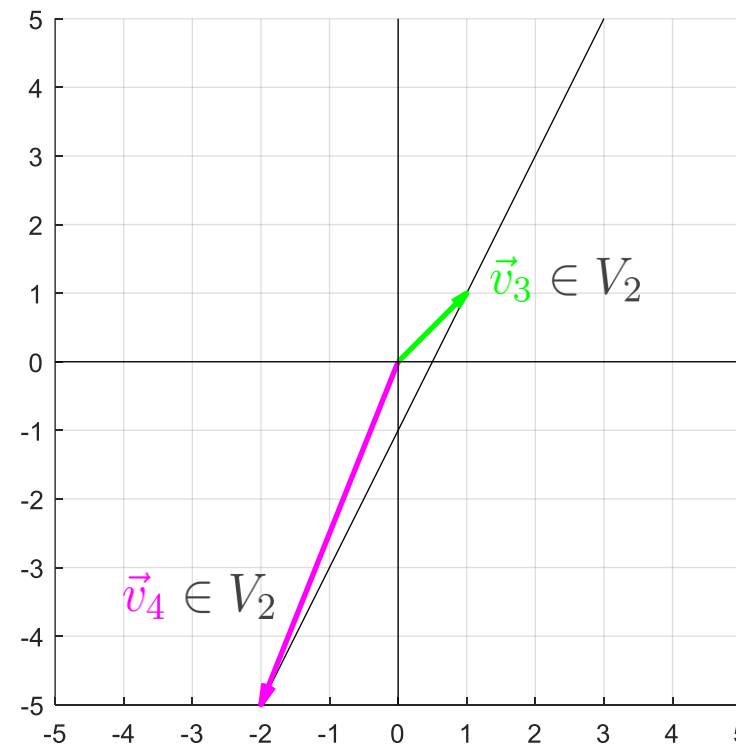
Ejercicio 3. Determinar si V_1 es un espacio vectorial.

Ejercicio 4. Determinar si V_2 es un espacio vectorial.

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$$



$$V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x - 1\}$$



SUBESPACIOS VECTORIALES.

Definición. Un **subespacio** S de un espacio vectorial V es un espacio vectorial que es un subconjunto de V .

□ Para determinar si S es subespacio de V bastará con comprobar si se cumplen las propiedades 1), 6) y 4):

- Si $\vec{u}, \vec{v} \in S$ entonces $\vec{u} + \vec{v} \in S$
- Si $\vec{u} \in S, \alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\vec{u} \in S$
- $\vec{0} \in S$



De manera equivalente a $\vec{u} + \vec{v} \in S$ y $\alpha\vec{u} \in S$ podemos comprobar que la combinación lineal de vectores pertenece al subconjunto, es decir, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in S$.

Nota: No hace falta comprobar el resto de las propiedades (asociativa, conmutativa, etc.) porque al cumplirse estas en V (por ser espacio vectorial), también se cumplirán en cualquier subconjunto S .

Definición. Si $S = \{\vec{0}\}$, entonces S se denomina **subespacio trivial** de V .

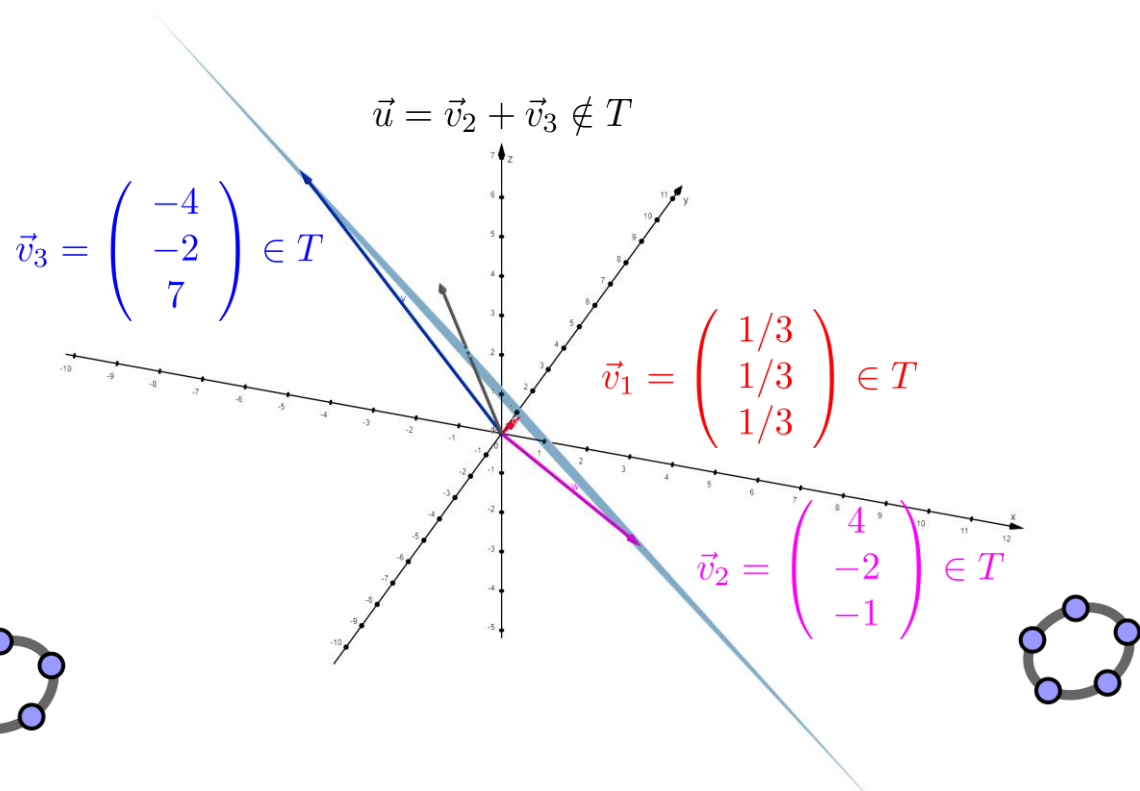
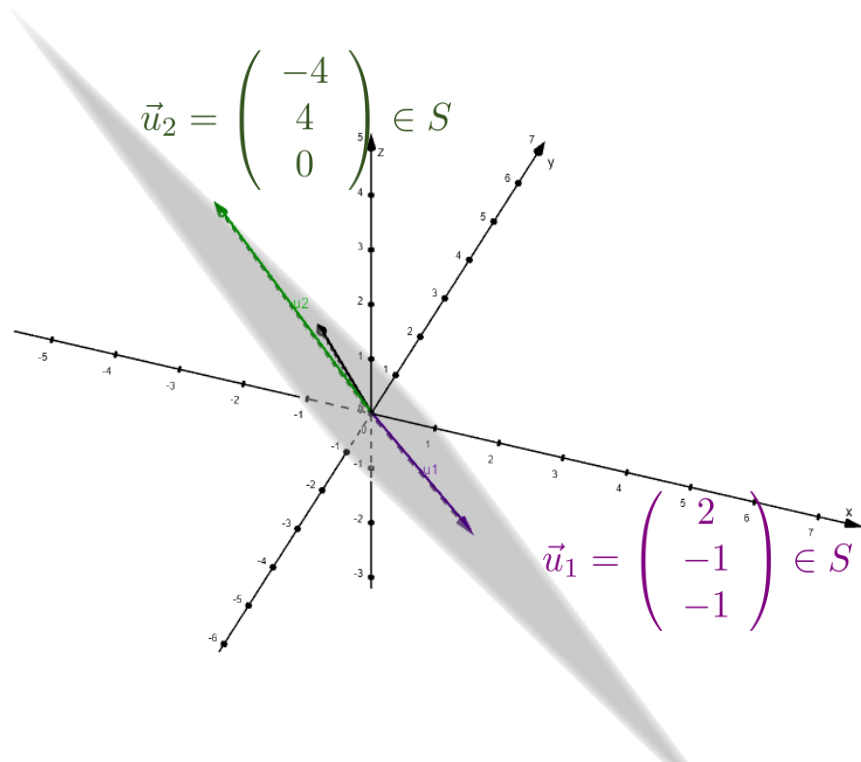
EJERCICIOS.

Ejercicio 5. Determinar si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 6. Determinar si T es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$$



COMBINACIÓN LINEAL.

A continuación, veremos los conceptos de combinación lineal, dependencia lineal y rango de conjuntos de vectores, necesarios para definir los sistemas generadores de espacios vectoriales.

Definición. Dado un vector $\vec{u} \in V$ se dice que es **combinación lineal** (C.L.) de un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_k\}$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ se denominan **coeficientes** de la combinación lineal.

Ejemplo 2. Dados los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ donde $\vec{v}_1=(1,0,0)$, $\vec{v}_2=(0,2,0)$, $\vec{v}_3=(0,0,4)$. El vector $\vec{u}=(3,2,0)$ es una combinación lineal con coeficientes $\alpha_1=3$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=0$.

Observación 1. La C.L. de vectores de un espacio vectorial V está en V .

Observación 2. La C.L. de vectores de un subespacio vectorial S está en S .

Observación 3. El vector $\vec{0}$ es siempre C.L. de cualquier conjunto de vectores.

COMBINACIÓN LINEAL.

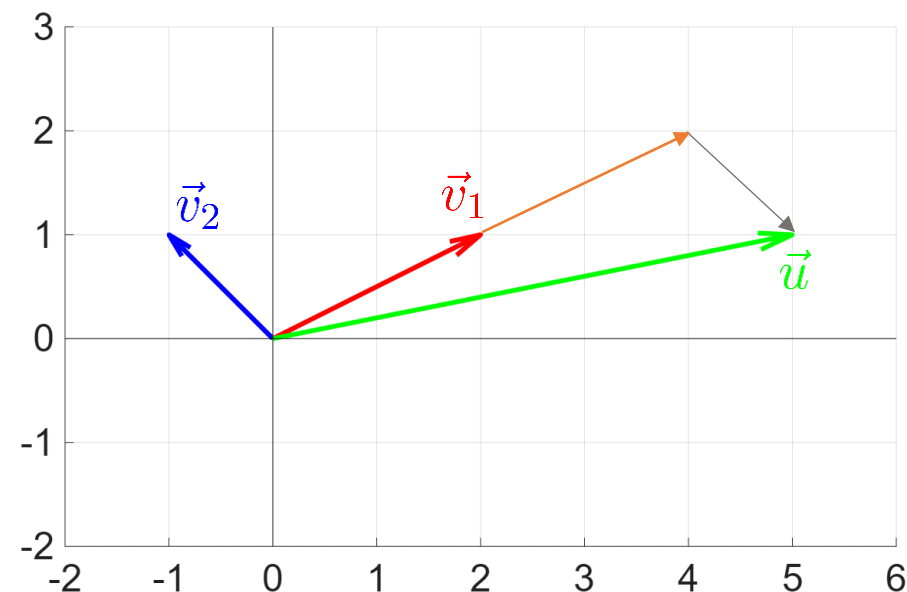
Ejemplo 3. Dado $\vec{v}_1 = (2,1)$ y $\vec{v}_2 = (-1,1)$. Determinar si $\vec{u} = (5,1)$ se puede expresar como C.L., y de ser así obtén los coeficientes de la combinación lineal.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(-1/2)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 5 \\ 3/2\alpha_2 = -3/2 \end{cases} \quad \text{S.C.D} \quad (\alpha_1, \alpha_2) = (2, -1)$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$



Ejercicio 7. Determinar si $\vec{v}_2 = (-1,1)$ puede expresarse como C.L. de $\vec{v}_1 = (2,1)$ y $\vec{v}_4 = (4,2)$.

COMBINACIÓN LINEAL.

Ejemplo 4. Dado $\vec{v}_1=(2,1)$ y $\vec{v}_2 = (-1,1)$, $\vec{v}_3 = (2,-2)$. Determinar si $\vec{u} = (5,1)$ se puede expresar como C.L. de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, y de ser así obtén los coeficientes.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

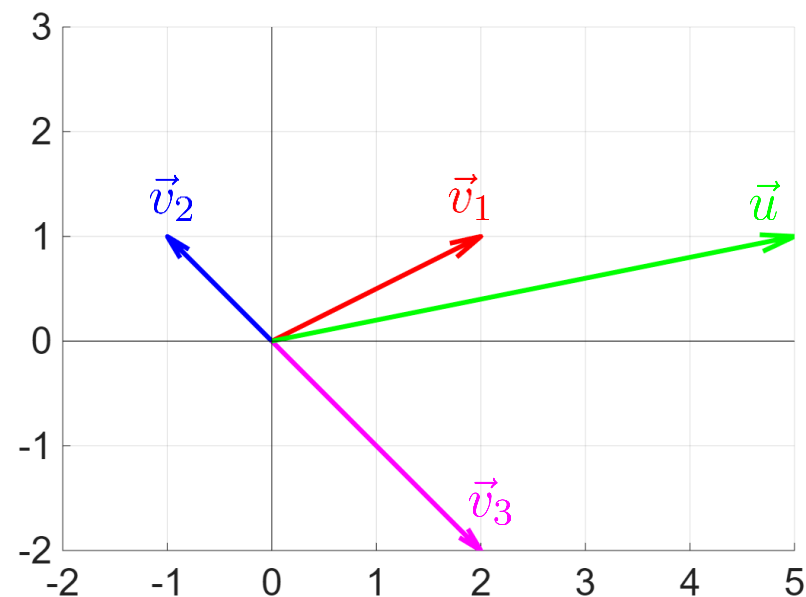
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(-1/2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3/2 & -3 & -3/2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 5 \\ 3/2\alpha_2 - 3\alpha_3 = -3/2 \end{cases} \quad \text{S.C.I} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 2t - 1, t)$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

⋮



DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

❑ Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ es **linealmente independiente o libre** si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal del resto.

O equivalentemente, si la única C.L. de $\vec{0}$ es aquella que tiene todos los coeficientes nulos.

Es decir, el siguiente sistema homogéneo es compatible determinado:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \quad (\text{SCD})$$

El **rango** de la matriz de coeficientes (vectores en columnas) es **igual al número de vectores**.

❑ Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ es **linealmente dependiente o ligado** si alguno de ellos es combinación lineal del resto.

O equivalentemente, si existe alguna C.L. de $\vec{0}$ en la que no todos los coeficientes son nulos.

Es decir, el siguiente sistema homogéneo es compatible indeterminado:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \text{ no todos nulos } (\text{SCI})$$

El **rango** de la matriz de coeficientes es **menor que el número de vectores**.

Ejercicio 8. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes.

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

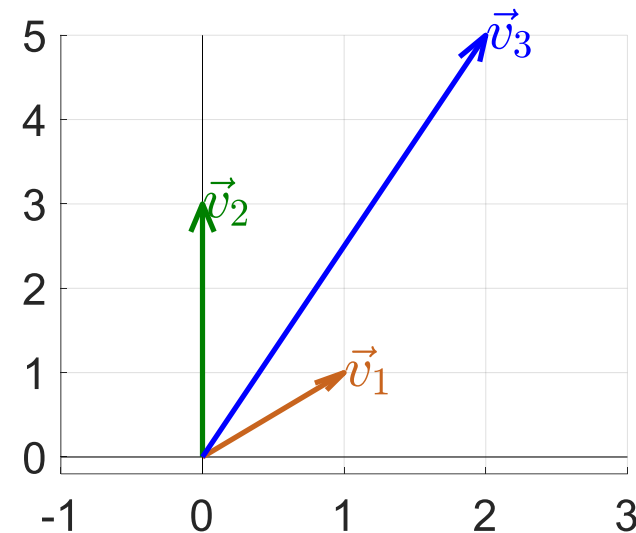
DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

Ejemplo 5. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ forman un conjunto linealmente dependiente.

$\vec{v}_3$ es combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$: $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0} \quad \text{SCI,}$$

una de las soluciones es $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 1, -1)$



Ejercicio 9. Determinar si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto libre.

Teorema. Si un conjunto contiene más vectores que componentes tiene cada vector, entonces el conjunto es linealmente dependiente.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

Ejemplo 6. Determinar si el siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ es ligado: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(0, -3, 3), (5, -2, -2), (15, -15, 3)\}$. En caso de afirmativo, hallar una relación de dependencia.

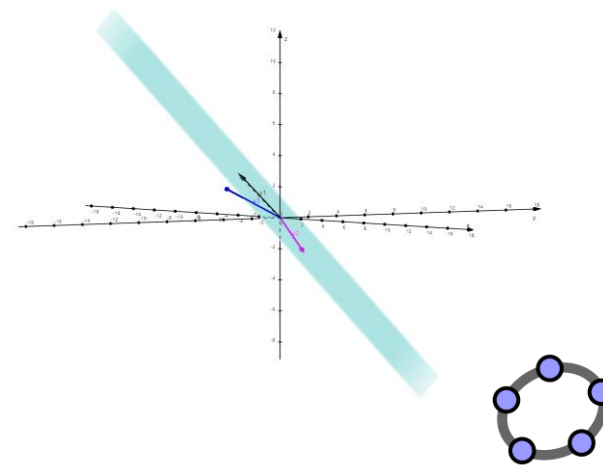
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & 15 \\ -3 & -2 & -15 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 15 & 0 \\ -3 & -2 & -15 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & -15 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{rg}(A) = 2 < k = 3 \rightarrow \text{SCI} \rightarrow \text{conjunto linealmente dependiente}$$

$$\text{Resolvemos: } \begin{cases} -3\alpha_1 - 2\alpha_2 = -15 \\ 5\alpha_2 = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda \\ -3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-3, -3, 1) \rightarrow -3\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$-3 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$



DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

Ejemplo 7. ¿Es el siguiente conjunto de vectores linealmente independiente?

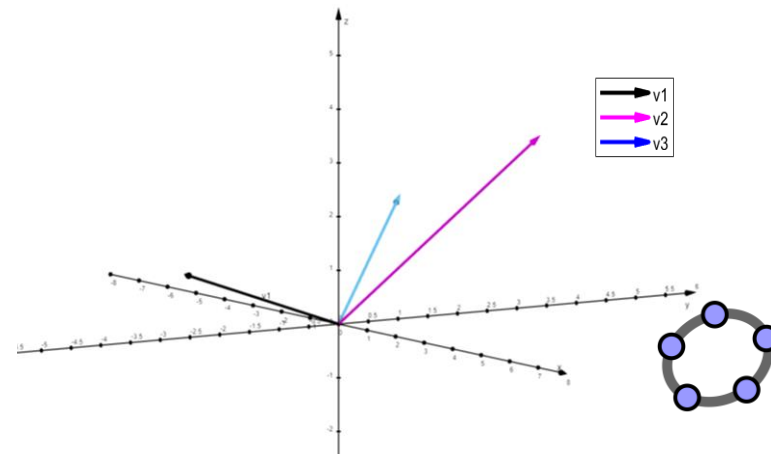
$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{3,1}(-2/5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6/5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{3,2}(-1/3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6/5 & 0 \end{array} \right)$$

Solución sist. homogéneo: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$

El conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es linealmente independiente



$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4/5 \end{bmatrix}$$

rank(A)

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

A continuación, se recogen algunas observaciones básicas sobre la dependencia e independencia lineal:

Observación 1. Si el vector nulo pertenece a un conjunto de vectores, el conjunto es linealmente dependiente.

Observación 2. Si un conjunto solo tiene un vector, el conjunto es linealmente dependiente si y sólo si se trata del vector nulo.

Observación 3. Dos vectores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ son linealmente dependientes si y solo si uno es múltiplo de otro, $\vec{u} = \alpha \vec{v}$.

Observación 4. Un conjunto con vectores repetidos es un conjunto linealmente dependiente.

Observación 5. Un conjunto que contiene un vector múltiplo de otro es linealmente dependiente.

Observación 6. Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, entonces cualquier subconjunto de él también será linealmente independiente.

Definición. El **rango de un conjunto de vectores** es el máximo número de vectores linealmente independientes dentro de ese conjunto.

Propiedades.

- El rango de un conjunto de vectores es el rango de la matriz que forman. Trabajaremos habitualmente con los vectores por columnas.
- Dados k vectores, si su rango es k son linealmente independientes.
- Si al añadir un vector a un conjunto se conserva el rango, entonces el nuevo vector es C.L. de los restantes. Si por el contrario el rango aumenta, entonces el nuevo vector no es C.L. del resto.
- Si al eliminar uno de los vectores se conserva el rango del conjunto, dicho vector es C.L. de los restantes. Si por el contrario disminuye el rango del conjunto, dicho vector no es C.L. del resto.

Ejemplo 8. Dado el conjunto: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 21 \end{pmatrix} \right\}.$

$$G = \begin{matrix} & \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 0 & 15 \\ 7 & 14 & 1 & 21 \end{pmatrix} & rg(G) = 2 < 4 \rightarrow \text{los vectores } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \text{ son linealmente dependientes} \\ & \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \alpha_4 \vec{v}_4 = \vec{0} \quad \text{SCI} \end{matrix}$$

$rg(G) = 2$ indica que el número máximo de vectores libres que podemos obtener de dicho conjunto es 2. Existen distintas elecciones posibles de subconjuntos libres, **pero no todos los subconjuntos de 2 vectores lo son:**

$$\begin{matrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_3 & & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 & & \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & & \vec{v}_2 & \vec{v}_4 & & \vec{v}_1 & \vec{v}_4 \\ rg \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 0 \\ 14 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 15 \\ 1 & 21 \end{pmatrix} = 2 & rg \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 10 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 15 \\ 14 & 21 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 15 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} = 1 \end{matrix}$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ l.i. $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ l.i. $\{\vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ l.i. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ l.d. $\{\vec{v}_2, \vec{v}_4\}$ l.d. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_4\}$ l.d.

RANGO: RELACIONES DE DEPENDENCIA.

Al aplicar operaciones elementales por filas a una matriz, las relaciones de dependencia entre sus **vectores columna** no se modifican.

$$\begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 0 & 15 \\ 7 & 14 & 1 & 21 \end{array} \right) & \xrightarrow[\text{OE tipo I}]{F_{1,2}} & \left(\begin{array}{cccc} 5 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 14 & 1 & 21 \end{array} \right) & \xrightarrow[\text{OE tipo II}]{F_1(1/5)} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 14 & 1 & 21 \end{array} \right) & \xrightarrow[\text{OE tipo III}]{F_{3,1}(-7)} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$\times 2$ $\times 3$ $\times 2$ $\times 3$ $\times 2$ $\times 3$ $\times 2$ $\times 3$

Obtención de conjunto l.i. a partir de un conjunto l.d.: Los vectores correspondientes a las columnas pivotaes forman un conjunto libre.

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ l.i.}$$

La matriz escalonada reducida equivalente permite identificar fácilmente los vectores de columnas no pivotaes como C.L. de las columnas no pivotaes:

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 0 & 15 \\ 7 & 14 & 1 & 21 \end{array} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 \\ \vec{v}_4 = 3\vec{v}_1 \end{array}$$

Ejemplo 9. Obtén un subconjunto libre y determina las relaciones de dependencia de los vectores $\{(1,8,4), (1,2,-2), (-4,8,2), (2,6,3), (-1,1,2)\}$.

$$G = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 & \vec{v}_5 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & -1 \\ 8 & 2 & 8 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{Gauss} \\ F_{2,1}(-8) \rightarrow F_{3,1}(-4) \rightarrow F_{3,2}(-1)}}{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & \mathbf{-6} & 40 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & \mathbf{-22} & 5 & -3 \end{pmatrix}}$$

$rg(G) = 3 \rightarrow$ el conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ es linealmente dependiente

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es un conjunto libre

$$\xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 31/33 & 3/22 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 5/33 & -13/22 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -5/22 & 3/22 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \vec{v}_4 &= 31/33\vec{v}_1 + 5/33\vec{v}_2 - 5/22\vec{v}_3 \\ \vec{v}_5 &= 3/22\vec{v}_1 - 13/22\vec{v}_2 + 3/22\vec{v}_3 \end{aligned}$$

$v1=[1 \ 8 \ 4]'; v2=[1 \ 2 \ -2]'; v3=[-4 \ 8 \ 2]'; v4=[2 \ 6 \ 3]'; v5=[-1 \ 1 \ 2]';$
 $G=[v1 \ v2 \ v3 \ v4 \ v5]$
 $rref(G)$

SISTEMA GENERADOR.

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$, el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de estos vectores, denotado $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. A este subespacio se le denomina espacio generado por los vectores, y el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ se denomina sistema generador del subespacio.

Definición. Un **sistema generador** de un espacio (o subespacio) vectorial V es un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ pertenecientes a V tal que cualquier vector de V se puede expresar como combinación lineal de los vectores del conjunto.

Ejemplo 9. Los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ forman un sistema generador del plano XY . Es decir, podemos generar cualquier vector del plano XY como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\{\vec{u}, \vec{v}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{plano } XY = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera el subespacio vectorial (plano XY) queda expresado a partir del sistema generador $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Pregunta. ¿Es el conjunto de vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sistema generador del plano XY ?

SISTEMA GENERADOR.

Ejemplo 10. Los conjuntos $\{(1,0), (0,1)\}$ y $\{(2,0), (1,3), (2,1)\}$ son sistemas generadores de $\mathbb{R}^2$. Puesto que podemos expresar cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los vectores de dichos conjuntos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{sistema compatible para cualquier } (x,y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{sistema compatible para cualquier } (x,y)$$

Ejercicio 9. ¿Son los vectores $(1,1)$ y $(2,2)$ un sistema generador de $\mathbb{R}^2$? En caso negativo, ¿qué subespacio generan?

Ejercicio 10. En $\mathbb{R}^3$, ¿pertenece $\vec{u}=(1,2,3)$ al espacio generado por $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$?

Definición. Se llama **base** de un espacio vectorial a un sistema generador de dicho espacio en el que todos los vectores son linealmente independientes.

- Un espacio (o subespacio) vectorial S tiene infinitas bases, todas con el mismo número de vectores.
- Una base de S es un sistema generador lo más pequeño posible (con el mínimo número de vectores necesario).
- Una base de S es un conjunto de vectores libres lo más grande posible en S . Por ejemplo, si una base de S tiene 2 vectores el máximo número de vectores libres pertenecientes a S es 2.

Ejemplo 11. El conjunto de vectores $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ a la que se le denomina **base canónica**. Es una base de $\mathbb{R}^3$ ya que es un sistema generador formado por vectores libres.

DIMENSIÓN.

Definición. La **dimensión** de un espacio vectorial V es igual al número de vectores de cualquier base de V .

Pregunta. El siguiente conjunto de vectores forma una base del subespacio S de $\mathbb{R}^4$, ¿Cuál es la dimensión de S ? $B_S = \{(1,2,3,4), (1,0,0,1), (1,2,1,1)\}$

El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3, todas sus posibles bases son conjuntos de 3 vectores libres. Generalizando, el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n , y todas sus bases son conjuntos de n vectores libres.

Propiedades.

- Si S es un subespacio vectorial de V entonces $\dim(S) \leq \dim(V)$.
- Dado un **sistema generador** $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle$ de un subespacio vectorial S , la dimensión de S es igual al rango del conjunto de vectores $\dim(S) = \text{rg}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\})$. En caso de que el conjunto sea libre (base de S), el rango coincidirá con el número de vectores.
- La dimensión de un espacio vectorial coincide con el **número de parámetros libres** en su [forma paramétrica](#).

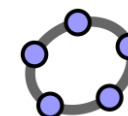
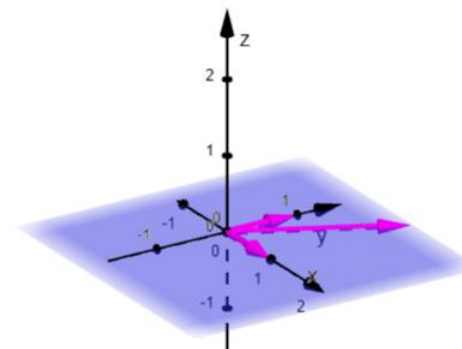
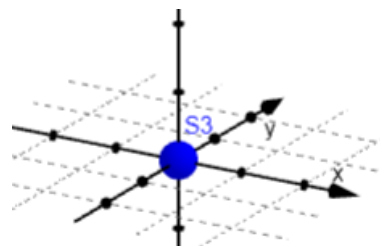
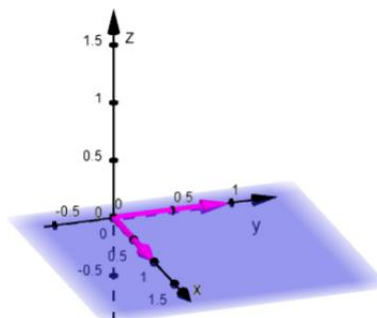
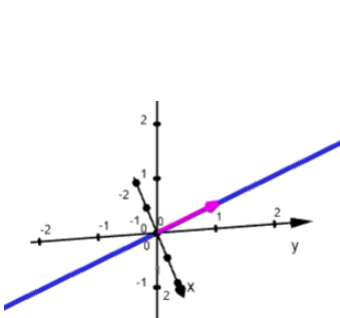
EJERCICIO.

En $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, dado un subespacio vectorial S :

- si $\dim(S) = 0 \Rightarrow$ el subespacio es solo el vector nulo (un punto).
- si $\dim(S) = 1 \Rightarrow$ el subespacio es una recta que pasa por el origen.
- si $\dim(S) = 2 \Rightarrow$ el subespacio es plano que pasa por el origen.

Ejercicio 13. Dados los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$, ¿Son dichos sistemas generadores bases? ¿Cuál su dimensión? ¿A qué lugar geométrico corresponde cada subespacio?

$$S_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad S_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad S_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad S_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$



SISTEMA GENERADOR → BASE

¿Cómo obtener una base de un subespacio S a partir de un sistema generador de S ?

Dado un sistema generador de un espacio vectorial podemos eliminar vectores hasta quedarnos con una base, pero con cuidado de que el rango no disminuya. Un [método para escoger un subconjunto libre](#) es formar una matriz cuyas **columnas** sean los vectores del sistema generador y escalonarla mediante el método de Gauss o Gauss-Jordan. Las columnas **de la matriz original** que corresponden a las columnas pivotaes de la matriz escalonada forman un conjunto linealmente independiente y constituyen una base del subespacio generado.

Ejemplo 13. Determinar una base de $S = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \dim(S) = 3$$

$$G = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

```
G=[1 0 1 2; -1 0 3 4; -1 0 1 1; 4 -1 -2 0]'  
[Ge,p]=rref(G) %Gauss-Jordan  
B=G(:,p) %base de S
```

Teorema. Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de un espacio vectorial V es una base de V , si y solo si, cada vector de V se expresa de forma única como combinación lineal de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$.

Ejercicio 14. En $\mathbb{R}^3$, consideramos los vectores: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
¿Forman los siguientes conjuntos de vectores un sistema generador de $\mathbb{R}^3$? ¿y una base?

a) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ b) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ c) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$

COORDENADAS.

Definición. Dada una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de un (sub)espacio vectorial S , denominamos **coordenadas de $\vec{u}$ respecto a la base B** a los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ que permiten expresar el vector $\vec{u}$ como C.L. de los vectores de la base. Es decir: $\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$

Usaremos la siguiente notación $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}_B$

Nota: si no se indica base se supondrá la base canónica.

Ejemplo 15. El vector $\vec{v}$ expresado en la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}_{BC} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{coordenadas de } \vec{v} \text{ respecto a } BC = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 16. El vector $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}$ expresado en la base canónica de $\mathbb{M}_{2 \times 2}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad BC = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

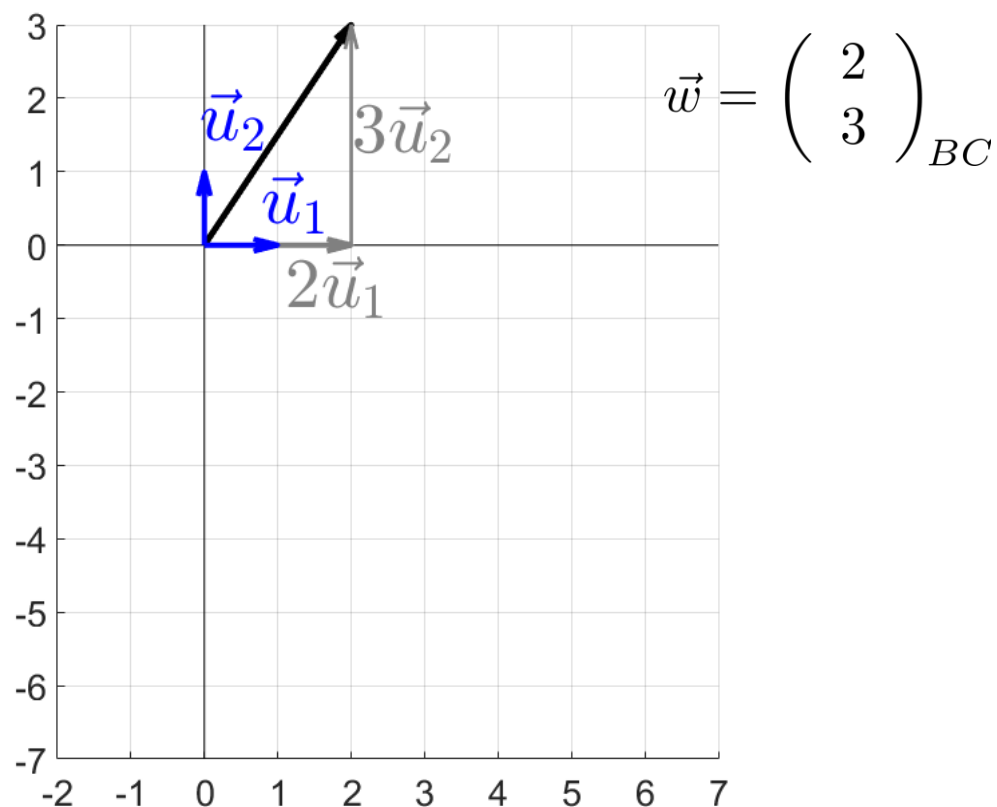
coordenadas de A respecto a BC

COORDENADAS.

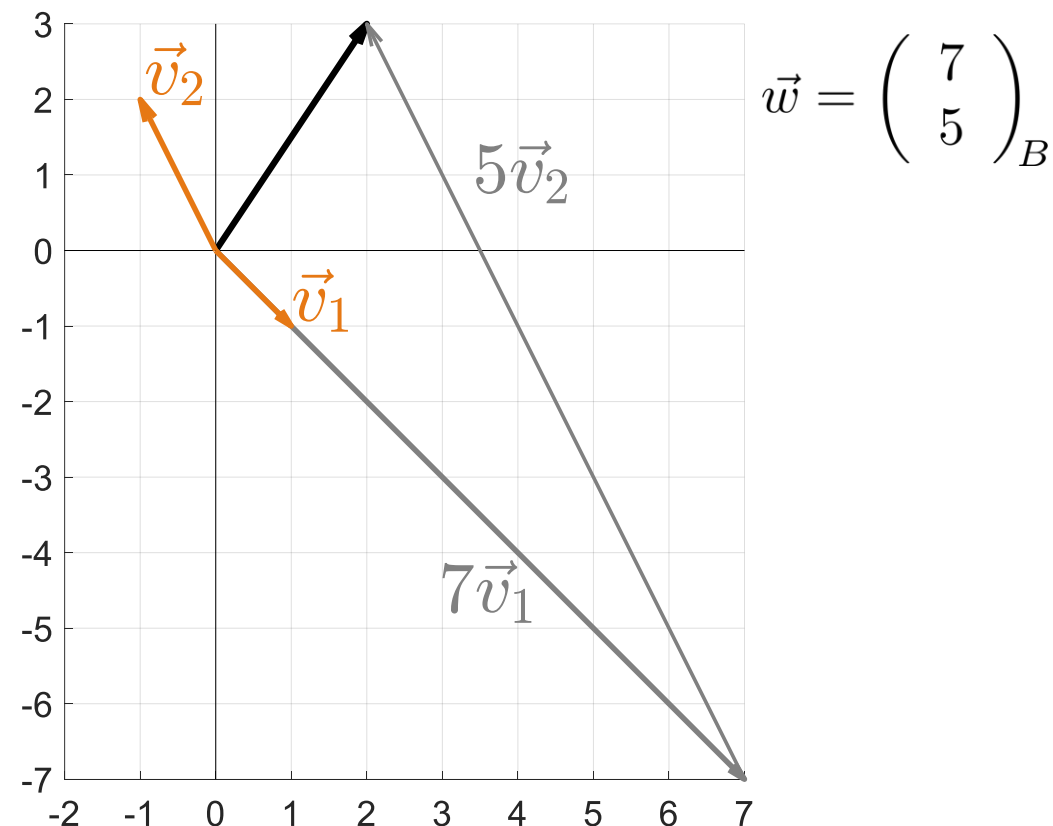
Un mismo vector expresado en distintas bases tendrá distintas coordenadas.

Ejemplo 17.

$$BC = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



CAMBIO DE BASE.

Un vector puede expresarse como combinación lineal de los vectores de distintas bases. Igualar esas expresiones permite relacionar sus coordenadas en cada base.

Ejemplo 18. En este ejemplo trabajaremos con el vector $\vec{v}$ y las siguientes tres bases de $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_1} \quad BC = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Caso 1. De la base no canónica B_1 a la base canónica BC .

$$2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Esta es una matriz de cambio de base } B_1 \rightarrow BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_{BC}$$
$$2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{BC}$$

Comprobación: $2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$

CAMBIO DE BASE.

Caso 2. De la base canónica BC a la base no canónica B_1 .

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{BC} \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_{B_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de cambio de base}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{BC}$$

Esta es una matriz de cambio de base $BC \rightarrow B_1$

Caso 3. De base no canónica B_1 a base no canónica B_2 .

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_1} \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_{B_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de cambio de base}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_1}$$

Esta es una matriz de cambio de base $B_1 \rightarrow B_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha_1 = -5, \alpha_2 = 5, \alpha_3 = 2$$

CAMBIO DE BASE.

Definición. Dadas dos bases de un mismo (sub)espacio vectorial, $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ y $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$, la **matriz de cambio de base de B_1 a B_2** nos permite obtener las coordenadas del vector en la base B_2 a partir de sus coordenadas en la base B_1 :

$$\vec{v}_{B_2} = M_{B_1 \rightarrow B_2} \vec{v}_{B_1}$$

Esta matriz contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base de partida B_1 expresados en función de la base de llegada B_2 :

$$M_{B_1 \rightarrow B_2} = ((\vec{v}_1)_{B_2} \ (\vec{v}_2)_{B_2} \ \dots \ (\vec{v}_n)_{B_2})$$

- Toda matriz de cambio de base es cuadrada $n \times n$, siendo n la dimensión del espacio/subespacio al que se refieren las bases.
- Toda matriz de cambio de base es invertible.

$$(M_{B_1 \rightarrow B_2})^{-1} = M_{B_2 \rightarrow B_1}$$

CAMBIO DE BASE.

Ejemplo 19. $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Obtención $M_{B_1 \rightarrow B_2}$: necesito las coordenadas de los vectores de B_1 en la base B_2 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \end{matrix} \rightarrow (\vec{v}_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \beta_1 = 2 \\ \beta_2 = 1 \end{matrix} \rightarrow (\vec{v}_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} \end{aligned} \quad M_{B_1 \rightarrow B_2} = ((\vec{v}_1)_{B_2} (\vec{v}_2)_{B_2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtención $M_{B_2 \rightarrow B_1}$: necesito las coordenadas de los vectores de la base B_2 en la base B_1 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = -1/3 \\ \alpha_2 = 1/3 \end{matrix} \rightarrow (\vec{u}_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_{B_1} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \beta_1 = 2/3 \\ \beta_2 = 1/3 \end{matrix} \rightarrow (\vec{u}_2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_{B_1} \end{aligned} \quad M_{B_2 \rightarrow B_1} = ((\vec{u}_1)_{B_1} (\vec{u}_2)_{B_1}) = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

CAMBIO DE BASE.

Ejemplo 19 (continuación). $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

c) Obtener las coordenadas del vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1}$ en la base B_2 :

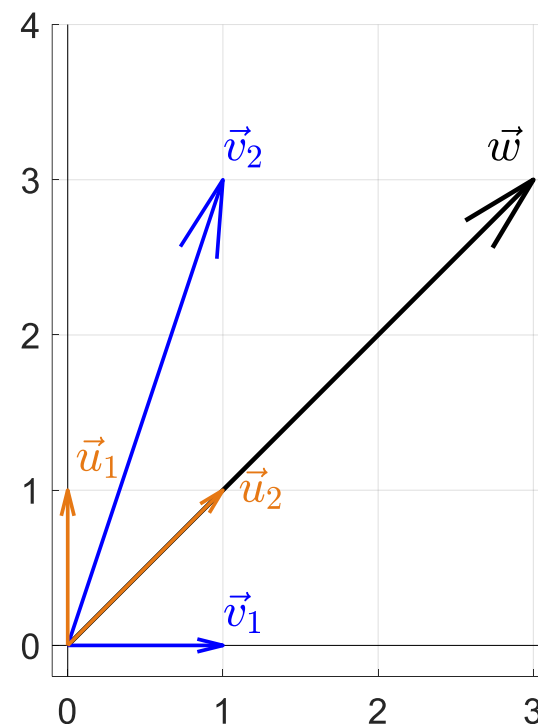
$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{B_1 \rightarrow B_2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_2}$$

Comprobación: $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$

d) Obtener las coordenadas de $\vec{w}$ en la base canónica:

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{M_{B_1 \rightarrow BC}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{BC}$$

Comprobación: $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$



CAMBIO DE BASE.

Ejemplo 20. $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad BC = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

a) Obtener $M_{B_1 \rightarrow BC}$

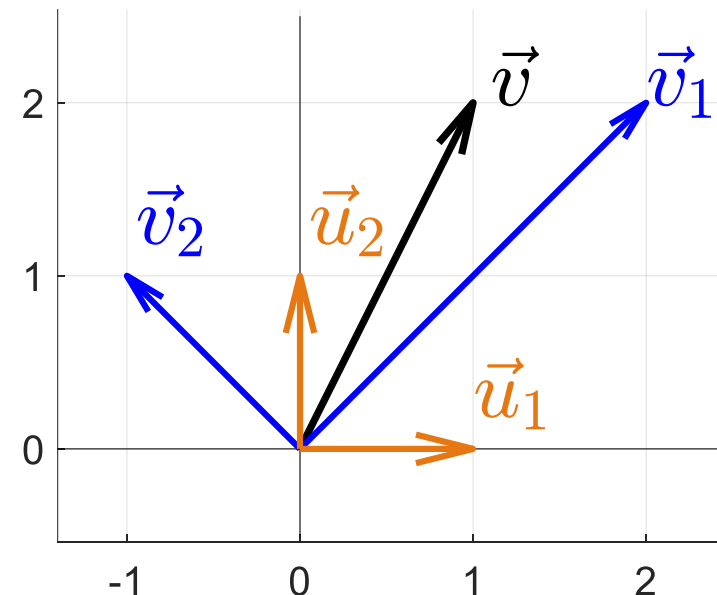
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad M_{B_1 \rightarrow BC} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Obtener $M_{BC \rightarrow B_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 1/4 \\ \alpha_2 = -1/2 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \beta_1 = 1/4 \\ \beta_2 = 1/2 \end{matrix} \quad M_{BC \rightarrow B_1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

c) Obtener el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en la base B_1 :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{B_1}$$



FORMAS PARAMÉTRICA E IMPLÍCITA DE UN SUBESPACIO.

Todo conjunto solución de un sistema lineal homogéneo es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Es decir, $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Dadas dos soluciones $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$.

1. Si $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in S$ entonces $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in S$. Cerrado bajo la suma:

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

2. Si $\vec{x}_1 \in S$ entonces $\alpha\vec{x}_1 \in S$. Cerrado bajo la multiplicación por un escalar:

$$A(\alpha\vec{x}_1) = \alpha A\vec{x}_1 = \alpha\vec{0} = \vec{0}$$

- Las soluciones de los sistemas no homogéneos no son un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Pregunta. ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

$$a) \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\} \qquad b) \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{array}\}$$

FORMAS PARAMÉTRICA E IMPLÍCITA DE UN SUBESPACIO.

Ejemplo 21. Las soluciones del siguiente sistema homogéneo forman el subespacio S de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in S, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$$

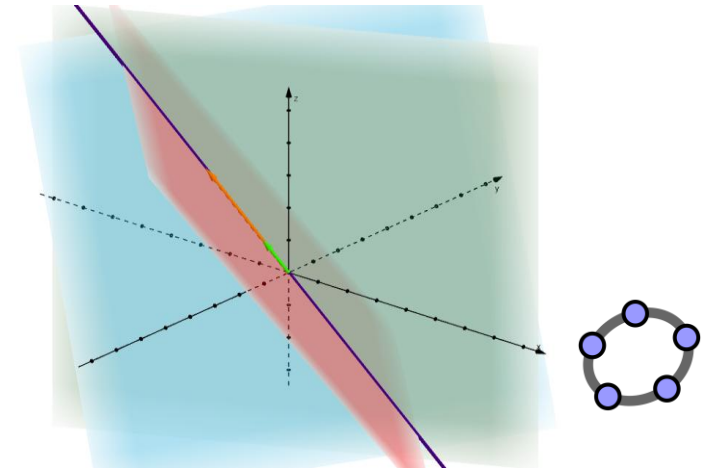
La suma de dos soluciones particulares es sol. del sistema:

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 \\ -4/3 \\ 4 \end{pmatrix} \in S$$

El producto de un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por una sol. particular es sol. del sistema: $2\vec{x}_1 = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \in S$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - z = 0 \end{cases} \text{ ecuaciones implícitas de } S$$

$$S = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0} \} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\alpha \\ -\frac{\alpha}{3} \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{forma paramétrica de } S$$



FORMAS PARAMÉTRICA E IMPLÍCITA DE UN SUBESPACIO.

Podemos describir los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ mediante:

- **Forma implícita:** $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{0}\}$: mediante ecuaciones implícitas (no redundantes) de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$. Los vectores que verifican estas ecuaciones (soluciones del sistema homogéneo) son los vectores que pertenecen al subespacio.

forma implícita del plano XY: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$

- **Forma paramétrica:** mediante una expresión con parámetros, que al tomar distintos valores producen todos los vectores del subespacio. El número de parámetros libres coincide con la dimensión del subespacio.

forma paramétrica del plano XY: $S = \{(\alpha, \beta, 0) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

- **Sistema generador:** mediante un conjunto de vectores cuya combinación lineal genera todos los vectores del subespacio. Si estos son libres será base.

Un sistema generador del plano XY es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

Dado un subespacio $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{0}\}$, la suma del nº de ecuaciones implícitas más la dimensión de S es igual a la dimensión del espacio vectorial total $\mathbb{R}^n$.

$$\text{nº de ecuaciones implícitas (rango de } A) + \dim(S) = \dim(\mathbb{R}^n)$$

FORMAS PARAMÉTRICA E IMPLÍCITA DE UN SUBESPACIO.

Ejemplo 22. Subespacio S del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Forma implícita de S :

los vectores de S son aquellos
vectores que son solución del sistema

$$S : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

*resolvemos el
sistema*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Forma paramétrica de S :

Los vectores de S se obtienen al dar
distintos valores a los parámetros libres

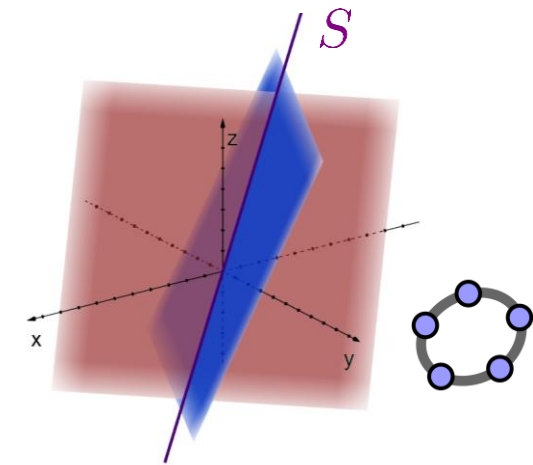
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\alpha \\ -\frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Sacamos factor común al p. libre

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Base de S :

Conjunto de vectores libres de S cuya
combinación lineal genera S



```
A=[ 1 1 1; 2 -1 1];  
Aamp=[ 1 1 1 0; 2 -1 1 0];  
%opción 1 - GJ  
rref(Aamp)  
%opcion 2  
baseS=null(A,'rational')
```

$$\begin{array}{ccccc} \text{número de ecuaciones} & + & \text{número parámetros libres} & = & \text{dimensión del espacio} \\ \text{implícitas (rango de A)} & & \text{(dimensión del subespacio S)} & & \text{vectorial } \mathbb{R}^3 \\ 2 & & 1 & & 3 \end{array}$$

FORMAS PARAMÉTRICA E IMPLÍCITA DE UN SUBESPACIO.

Ejemplo 23. Subespacio T del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Forma implícita de T :

los vectores de T son aquellos
vectores que son solución del sistema

$$T : \{ \textcolor{red}{x} + \textcolor{red}{y} + \textcolor{red}{z} = 0$$

*resolvemos el
sistema*

Forma paramétrica de T :

Los vectores de T se obtienen
dando valores a α y β

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

*sacamos factor común
a los p. libres*

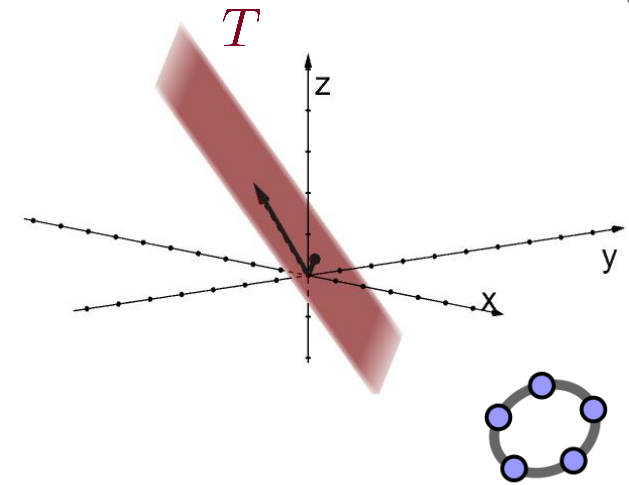
Base de T :

Los vectores de T se
obtienen como C.L de los
vectores de la base.

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

```
coefT=[ 1 1 1];  
baseT=null(coefT,'rational')
```

$$\begin{array}{ccccc} \text{número de ecuaciones} & & \text{número parámetros libres} & & \text{dimensión del espacio} \\ \text{implícitas (rango de A)} & + & \text{(dimensión del subespacio S)} & = & \text{vectorial } \mathbb{R}^3 \\ 1 & & 2 & & 3 \end{array}$$



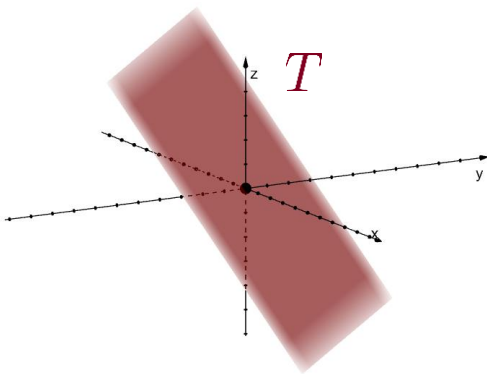
FORMAS PARAMÉTRICA E IMPLÍCITA DE UN SUBESPACIO.

- El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ tiene 3 parámetros libres y 0 ecuaciones implícitas, su forma paramétrica es $\mathbb{R}^3 = \{(\alpha, \beta, \gamma) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.
- En $\mathbb{R}^3$, el espacio trivial tiene 3 ecuaciones implícitas $\{x = 0, y = 0, z = 0\}$ y 0 p. libres.
- Cuantas más ecuaciones implícitas haya, menor será el subespacio (menor dimensión).

Ejemplo 24. Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

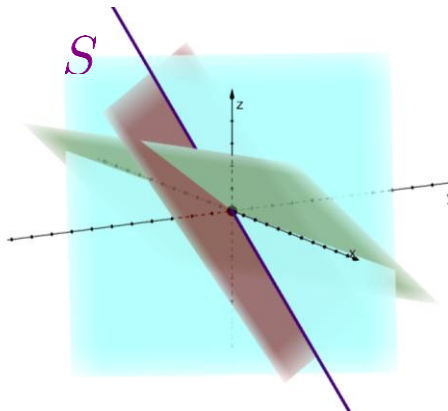
$$T : \begin{cases} x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (-\alpha - \beta, \alpha, \beta)$$



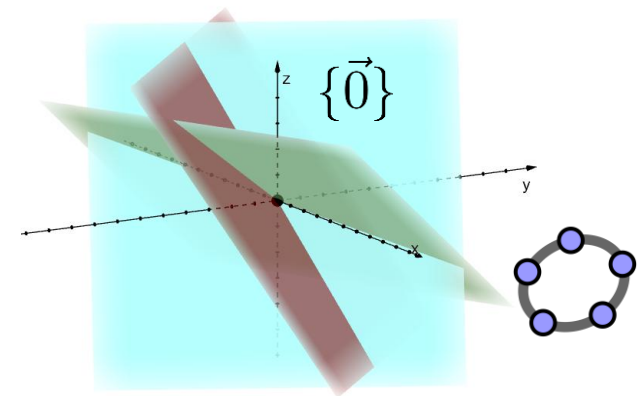
$$S : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{2}{3}\alpha, -\frac{1}{3}\alpha, \alpha\right)$$



$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

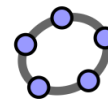
$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$



EJERCICIOS.

Ejercicio 13. ¿En qué forma está expresado el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$? ¿Cuál es su dimensión? ¿Qué lugar geométrico representa?

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0; y = 0; z = 0\}$$



Ejercicio 14. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^2$:

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} \quad S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0; x + y = 0\}$$

- Indica en qué forma está dado (paramétrica/implícita/sist. generador), su dimensión y lugar geométrico.
- Expresa S_1 en su forma paramétrica y determina una base.

Ejercicio 15. Obtén la forma implícita del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por su forma paramétrica:

$$S = \{(\lambda, \lambda, 3\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Para pasar de la forma paramétrica a la implícita nos ayudará a saber cuántas ecuaciones implícitas necesitamos. A continuación, veremos el proceso más formal y general para hallar las ecuaciones implícitas de un subespacio.

OBTENCIÓN DE ECUACIONES IMPLÍCITAS: MÉTODO 1.

Un vector pertenece al subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$ si es C.L. de una base de S . Por tanto, imponemos que el rango no aumente al añadir un vector genérico de S como vector columna:

$rg(G) = rg(G|X)$ matriz G : cuyas columnas son vectores de base de S .
matriz $(G|X)$: matriz G a la que concatenamos un vector genérico de S .

Ejemplo 25. Plano XY.

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \dim(S) = rg(G) = 2 \quad rg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 = rg \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{array} \right) \rightarrow z = 0$$

Ejemplo 26. $S = \{(\alpha, \alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

recordar que las OE por filas no modifican el rango

$$rg \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 = rg \left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 1 & y \\ 3 & z \end{array} \right) \xrightarrow{F_{2,1}(-1)} rg \left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y-x \\ 3 & z \end{array} \right) \xrightarrow{F_{3,1}(-3)} rg \left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y-x \\ 0 & z-3x \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} y-x=0 \\ z-3x=0 \end{array}$$

Comprobación:

$$\begin{array}{l} y-x = 1-1 = 0 \\ z-3x = 3-3 \cdot 1 = 0 \end{array} \quad \checkmark$$

Comprobamos que los vectores de la base cumplan las ecuaciones implícitas (pertenezcan a S) y que el número de ecuaciones sea correcto

OBTENCIÓN DE ECUACIONES IMPLÍCITAS: MÉTODO 1.

Ejemplo 27. Hallar la forma implícita del subespacio $S = \{(\alpha, \beta, 3\alpha - 5\beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 3\alpha - 5\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{base de } S: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 2 = \text{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -5 & z \end{array} \right) \xrightarrow{F_{3,1}(-3)} \text{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -5 & z - 3x \end{array} \right) \xrightarrow{F_{3,2}(5)}$$

$$\text{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 5y - 3x + z \end{array} \right) = 2 \Rightarrow -\mathbf{3x} + \mathbf{5y} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 5y + z = 0\}$$

Comprobación:

2 parámetros libres $\rightarrow \dim(S) = 2$, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Rightarrow 1$ ecuación implícita ✓

cualquier vector $\vec{v} \in S$ debe cumplir sus ecuaciones implícitas: $-3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 3 = 0$

$$-3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 - 5 = 0 \quad \checkmark$$

OBTENCIÓN DE ECUACIONES IMPLÍCITAS: MÉTODO 1.

Ejercicio 16. Hallar la forma implícita del subespacio $S \subset \mathbb{R}^4$ con base:

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

OBTENCIÓN DE ECUACIONES IMPLÍCITAS: MÉTODO 2 (MATLAB).

MATLAB no trabaja bien con variables simbólicas con las funciones `rank`, ni `rref`. Veamos un método alternativo para hallar las ecuaciones implícitas. Este se basa en que cualquier vector de la base de un subespacio debe cumplir sus ecuaciones implícitas.

Ejemplo 26: $S = \{(\lambda, \lambda, 3\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\lambda, \lambda, 3\lambda) = \lambda(1, 1, 3)$

1) Obtenemos una base de S : $B_S = \{(1, 1, 3)\}$

2) Buscamos ecuaciones implícitas en $\mathbb{R}^3$, luego serán del tipo: $ax + by + cz = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

3) Imponemos que los vectores de la base las cumplan: $a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 3 = 0$

4) Resolvemos el sistema cuyas incógnitas son los coeficientes de las ecuaciones implícitas

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 1, \beta = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow -x + y = 0$$

$$\alpha = 0, \beta = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow -3x + z = 0$$

```
baseS=[1 1 3]'  
coefImp=null(baseS','rational')
```

OBTENCIÓN DE ECUACIONES IMPLÍCITAS: MÉTODO 2 (MATLAB).

Ejemplo 27. Expresar en forma implícita el subespacio $T = \{(\alpha, \beta, 3\alpha - 5\beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

1) Obtenemos una base de T : $(\alpha, \beta, 3\alpha - 5\beta) = \alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, -5)$

2) Buscamos ecuaciones implícitas en $\mathbb{R}^3$, serán del tipo: $ax + by + cz = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

3) Imponemos que los vectores de la base las cumplan:
$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 3 = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot (-5) = 0 \end{cases}$$

4) Resolvemos el sistema para hallar los coeficientes de la ecuación implícita:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{array} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 3c = 0 \\ b - 5c = 0 \\ c = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha \\ 5\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

```
baseT=[1 0 3; 0 1 -5]'  
coefImpT=null(baseT','rational')
```

$$\alpha = 1 \rightarrow -3\mathbf{x} + 5\mathbf{y} + \mathbf{z} = 0$$

RESUMEN: FORMAS PARAMÉTRICA E IMPLÍCITA.

Ejemplo 27. $T \subset \mathbb{R}^3$

$$T : \begin{cases} -3x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

paso de implícitas a una base
(resolvemos sistema homogéneo)

coefImpT=[-3 5 1]
baseT=null(coefImpT,'rational')

$$B_T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

paso a ecuaciones implícitas

baseT=[1 0 3; 0 1 -5]'
coefImpT=null(baseT,'rational')

forma paramétrica:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 3\alpha - 5\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 26. $S \subset \mathbb{R}^3$

$$S : \begin{cases} -x + y = 0 \\ -3x + z = 0 \end{cases}$$

paso de implícitas a una base

coefImpS=[-1 1 0; -3 0 1]
baseS=null(coefImpS,'rational')

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

paso a ecuaciones implícitas

baseS=[1 1 3]'
coefImpS=null(baseS,'rational')

forma paramétrica:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nota: para evitar **confusiones**, evitar usar S, T o nombres genéricos para matrices. Distingue entre 1) matrices de coeficientes de las ecuaciones implícitas y 2) matrices de las de vectores generadores en columnas.

IDENTIFICAR UN SISTEMA GENERADOR DE UN SUBESPACIO.

Recordemos que un sistema generador de subespacio S es un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de S tal que cualquier vector de S se puede expresar como combinación lineal de estos. En dicho caso se cumplirán las siguientes dos condiciones:

- 1) Todos los vectores del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ pertenecen a S (cumplen sus ec. implícitas).
- 2) El rango de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ coincide con $\dim(S)$

Además, si el sistema generador es base: El rango de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ es igual a k (conjunto linealmente independiente):

Ejercicio 17. Dado $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ ¿forman los siguientes conjuntos de vectores un sistema generador de S ? En caso afirmativo, ¿son una base de S ?

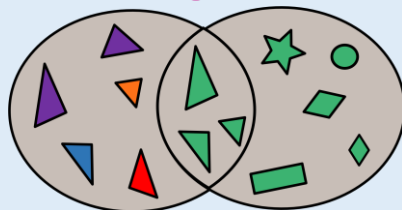
a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ c) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ d) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e) base canónica de $\mathbb{R}^3$

OPERACIONES CON SUBESPACIOS VECTORIALES.

Recordatorio. Operaciones entre conjuntos.

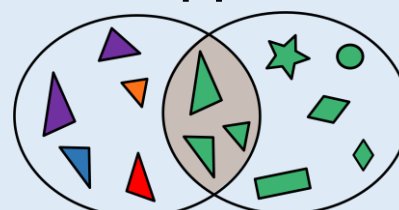
Unión

$\cup$



Intersección

$\cap$



La unión de dos subespacios $S_1 \cup S_2$ son los vectores pertenecientes a S_1 o a S_2 (o ambos).

La intersección de dos subespacios $S_1 \cap S_2$ son los vectores pertenecientes tanto a S_1 como a S_2 .

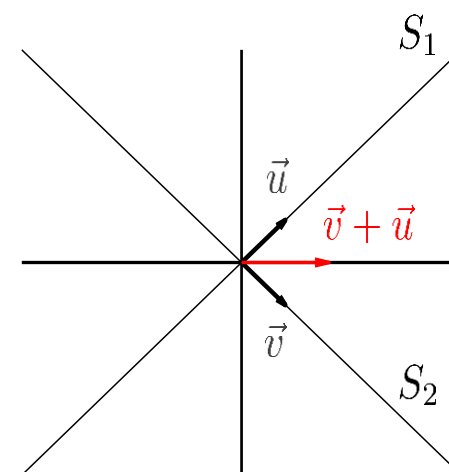
La unión de subespacios no siempre es un subespacio vectorial.

Ejemplo 27. $S_1 = \langle \vec{u} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $S_2 = \langle \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$$

$$S_1 \cup S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$$

$$\vec{u}, \vec{v} \in S_1 \cup S_2, \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S_1 \cup S_2$$



INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES.

Definición. Dados dos subespacios S y T del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, el **subespacio intersección** $S \cap T$ se define como:

$$S \cap T = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{v} \in S \text{ y } \vec{v} \in T\}$$

$S \cap T$ es un subespacio vectorial que contiene los vectores que pertenecen simultáneamente a S y a T .

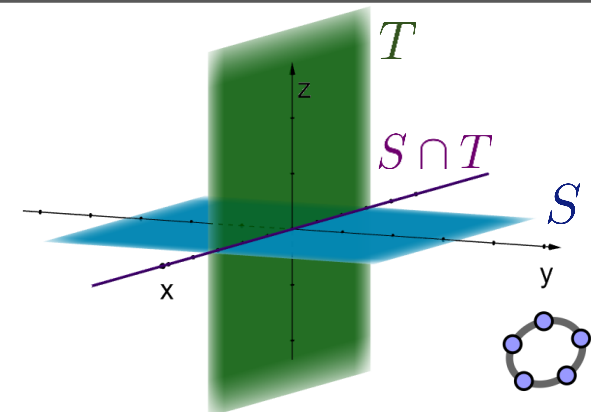
Al pertenecer los vectores de $S \cap T$ tanto a S como a T , deben satisfacer las ecuaciones de ambos subespacios. Por tanto, para hallar $S \cap T$, la forma más sencilla es considerar el **sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones implícitas de S y las de T** . Este sistema puede contener ecuaciones linealmente dependientes, por lo que, para obtener las ecuaciones implícitas de $S \cap T$, eliminaremos ecuaciones redundantes.

Ejemplo 28. Determinar el subespacio intersección de S y T .

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \text{ y } T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$$

$$\text{forma implícita de } S \cap T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} z = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\}$$

$$\text{forma paramétrica de } S \cap T = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$



SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES.

Definición. Dados dos subespacios S y T del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, el **subespacio vectorial suma $S + T$** se define como

$$S + T = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \text{ con } \vec{u}_1 \in S \text{ y } \vec{u}_2 \in T\}$$

$S + T$ es un subespacio vectorial que contiene aquellos vectores que podemos construir sumando un vector de S y uno de T .

El subespacio suma $S + T$ contiene todos los vectores que podemos construir como C.L. de vectores de S y de T . Podemos obtener **un sistema generador de $S + T$ uniendo una base de S y una de T** . A partir del sistema generador de $S + T$ podremos obtener una base.

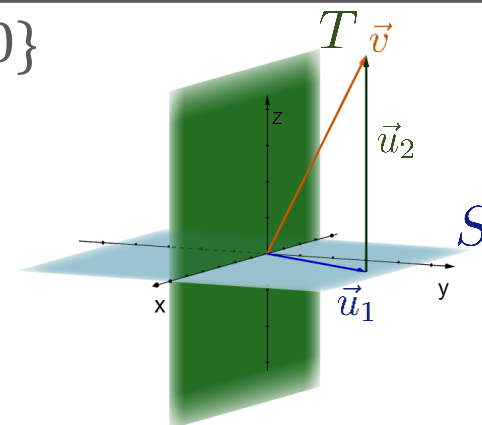
Ejemplo 29. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$

Obtenemos bases de S y de T :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Obtenemos un sistema generador de $S + T$ uniendo las bases:

$$S + T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$$



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES.

La unión de las bases de dos subespacios vectoriales constituye un sistema generador del subespacio suma; sin embargo, no necesariamente forma una base (conjunto libre).

Ejemplo 30. En $\mathbb{R}^4$, dados los subespacios S y T con bases B_S y B_T hallar el subespacio $S + T$.

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_T = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

1) Hallamos sistema generador de $S + T$:

$$S + T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2) Hallamos una base de $S + T$ a partir del sist. generador obtenido:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{S+T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

EJERCICIO.

Ejemplo 31. En $\mathbb{R}^3$, obtén subespacio suma e intersección: $S_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

1) $S_1 \cap S_2$: consideramos conjuntamente las ecuaciones de S_1 y S_2 :

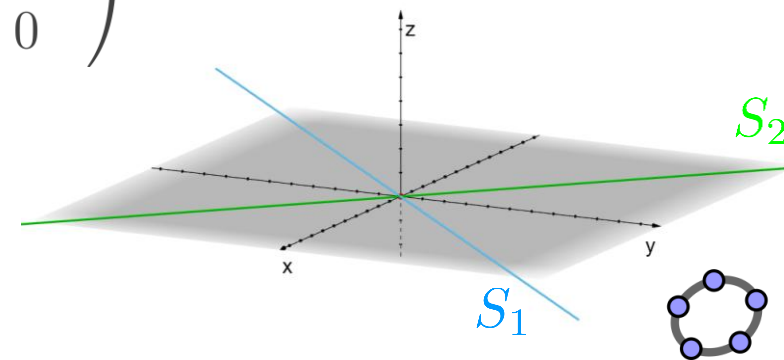
$$S_1 \cap S_2: \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$$

ecuaciones implícitas

2) $S_1 + S_2$: hallamos su sistema generador juntando las bases de ambos subespacios:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_1 + S_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \rightarrow B_{S+T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



FÓRMULA DE GRASSMAN Y SUMA DIRECTA.

Teorema. El teorema conocido como la **fórmula de Grassmann** relaciona la dimensión del subespacio suma e intersección de dos subespacios vectoriales S y T de $\mathbb{R}^n$:

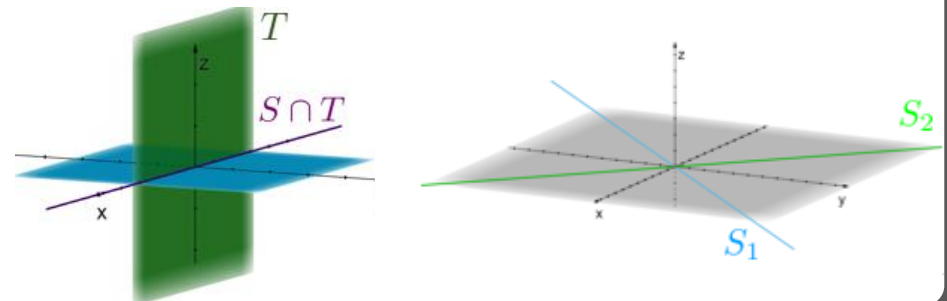
$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

Definición. Se dice que $S + T$ es una **suma directa**, y se denota $S \oplus T$, si $S \cap T = \{\vec{0}\}$, luego $\dim(S \cap T) = 0$.

Cuando $S + T$ es suma directa:

- La fórmula de Grassman se simplifica: $\dim(S \oplus T) = \dim(S) + \dim(T)$
- Al unir una base de S y una base de T , los vectores del sistema generador resultante son linealmente independientes y por tanto forman una base de $S + T$.

Ejercicio 18. Determina si los subespacios de los ejemplos 28 y 31 están en suma directa y comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann.



SUBESPACIOS COMPLEMENTARIOS.

Definición. Se dice que dos subespacios vectoriales S y T son **subespacios complementarios en $\mathbb{R}^n$** si $S \oplus T = \mathbb{R}^n$, es decir:

$$S \cap T = \{\vec{0}\} \quad \text{y} \quad S + T = \mathbb{R}^n$$

Si $S + T$ son subespacios complementarios la fórmula de Grassman se simplifica:

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) = \dim(\mathbb{R}^n)$$

Ejemplo 27. $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^2$ $B_{S_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $B_{S_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

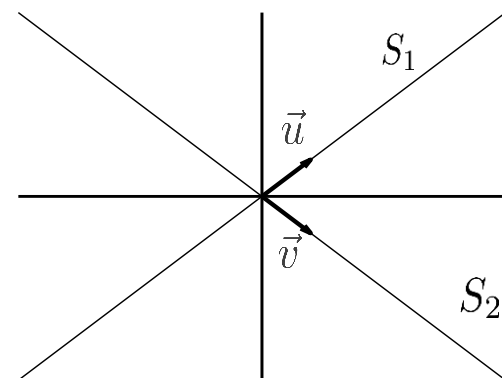
$S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow S_1 + S_2$ es suma directa

$$S_1 + S_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$$

S_1 y S_2 son espacios complementarios en $\mathbb{R}^2$

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

Pregunta. ¿Es S_2 el único subespacio complementario de S_1 en $\mathbb{R}^2$?



SUBESPACIOS COMPLEMENTARIOS.

¿Cómo podemos hallar un subespacio complementario de un subespacio S en $\mathbb{R}^n$?

Procedimiento: Dada una base del subespacio S , la extendemos añadiendo vectores (linealmente independientes de los anteriores) hasta formar una base del espacio total $\mathbb{R}^n$. Para ello podemos elegir cualquier vector, por ejemplo, los de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Los vectores añadidos forman una base de un suplementario de S en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 32. Hallar el subespacio complementario de S en $\mathbb{R}^4$.

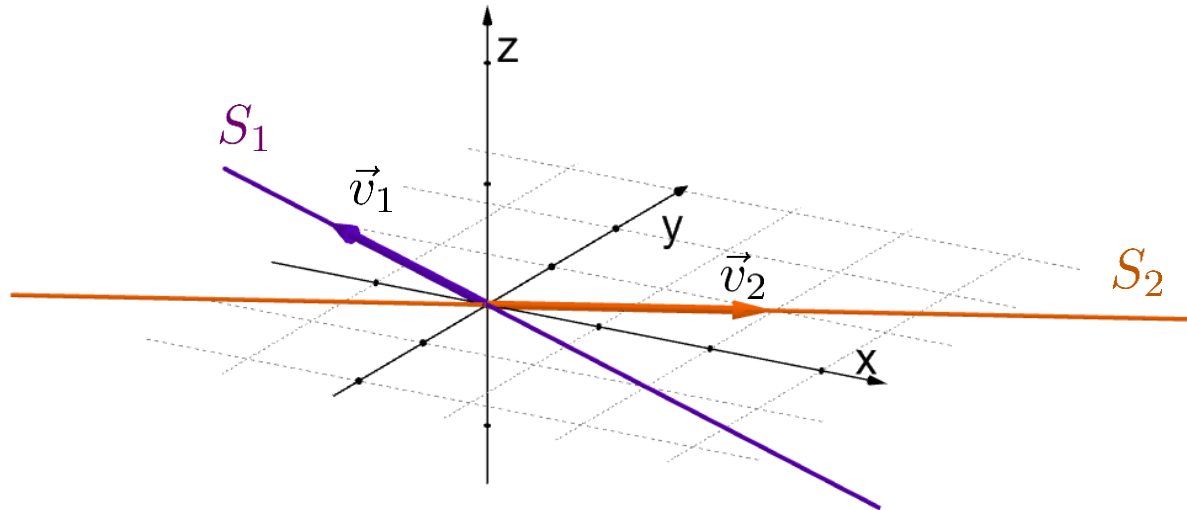
$$S = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para hallar el complementario de S en $\mathbb{R}^4$, necesitamos hallar 2 vectores $\langle \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$ tales que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ sea base de $\mathbb{R}^4$. Podemos probar con vectores de la base canónica en $\mathbb{R}^4$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \rightarrow \text{base de un subespacio complementario de } S \text{ en } \mathbb{R}^4: \langle \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

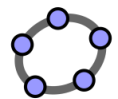
EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 33. En $\mathbb{R}^3$ $S_1 = \langle \vec{v}_1 \rangle = \langle (2,1,0) \rangle$ y $S_2 = \langle \vec{v}_2 \rangle = \langle (-2,1,0) \rangle$



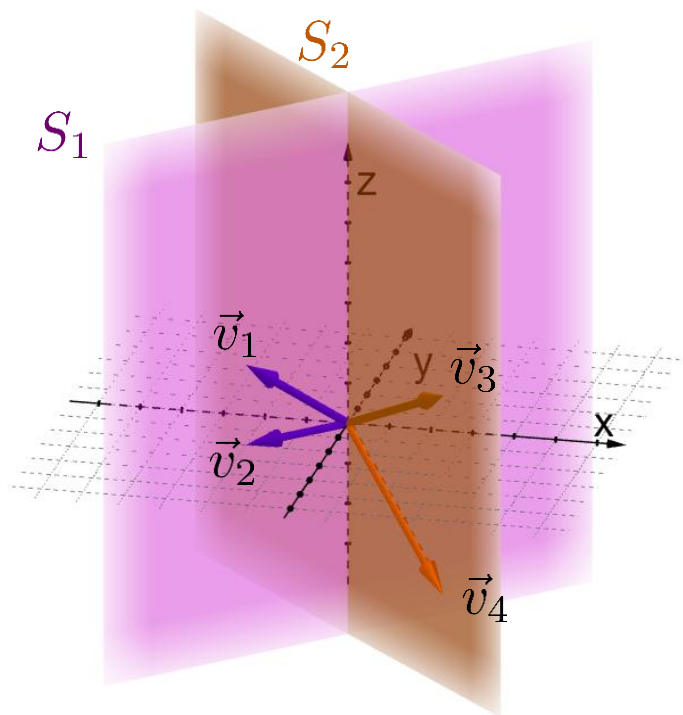
$S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\} \rightarrow S_1 + S_2$ es suma directa

¿Son S_1 y S_2 subespacios complementarios en $\mathbb{R}^3$?



EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 34. En $\mathbb{R}^3$ dos planos $S_1 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ y $S_2 = \langle \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$ que se cortan en una recta (que pasa por el origen).



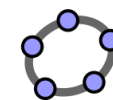
$$S_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

$$S_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$$

$S_1 \cap S_2 \neq \{(0, 0, 0)\} \rightarrow S_1 + S_2$ no es suma directa

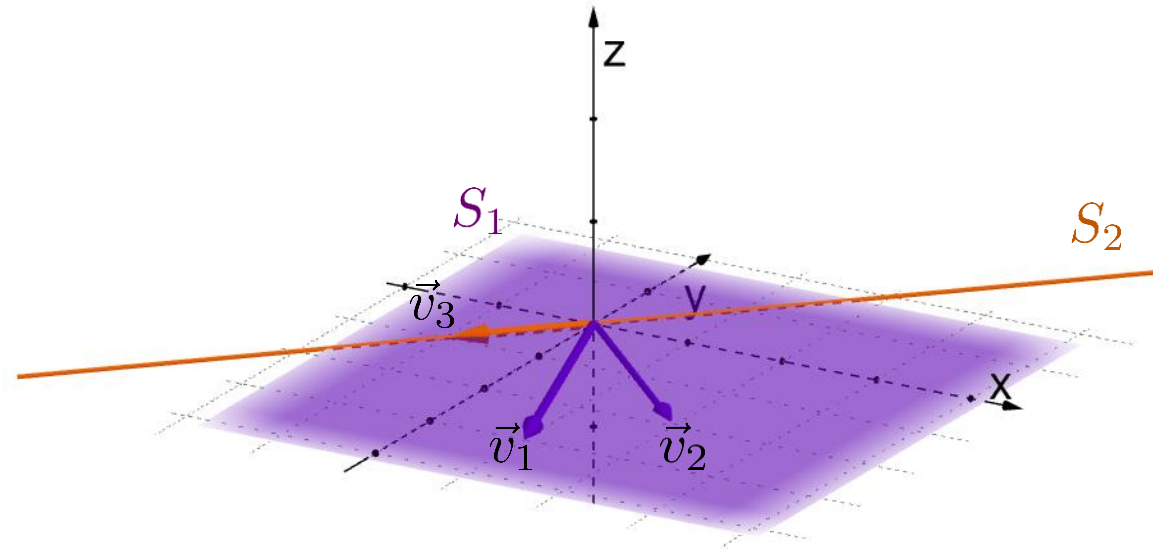
$$S_1 + S_2 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$$

¿Son S_1 y S_2 subespacios complementarios en $\mathbb{R}^3$?



EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$.

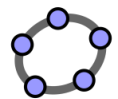
Ejemplo 35. En $\mathbb{R}^3$, un plano $S_1 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ y una recta $S_2 = \langle \vec{v}_3 \rangle$ contenida en S_1 .



$$S_1 \cap S_2 = S_2 \neq \{(0,0,0)\} \rightarrow S_1 + S_2 \text{ no es suma directa}$$

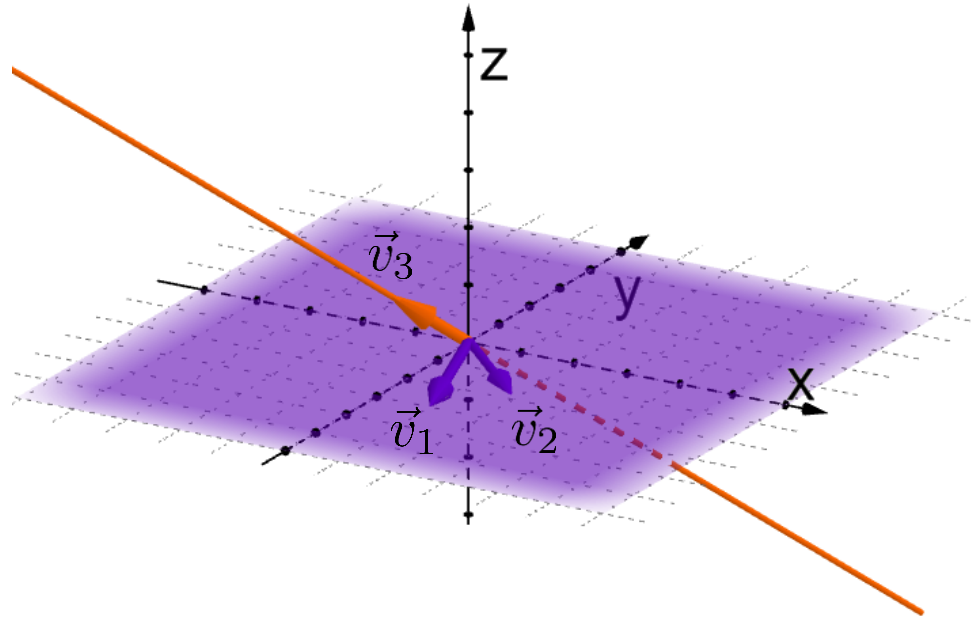
$$S_1 + S_2 = S_1 \neq \mathbb{R}^3$$

¿Son S_1 y S_2 subespacios complementarios en $\mathbb{R}^3$?



EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 36. En $\mathbb{R}^3$, un plano $S_1 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle (2, -2, 0), (1, -3, 0) \rangle$ y una recta $S_2 = \langle \vec{v}_3 \rangle = \langle (-1, -1, 1) \rangle$ no contenida en S_1 .



$S_1 \cap S_2 = \{(0, 0, 0)\} \rightarrow S_1 + S_2$ es suma directa

¿Son S_1 y S_2 subespacios complementarios en $\mathbb{R}^3$?

$S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3 \rightarrow S_1$ y S_2 son complementarios en $\mathbb{R}^3$

