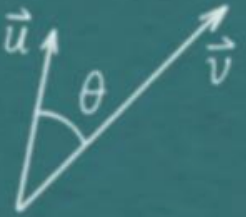


$$D = P^{-1}AP$$

$$\det(D) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

$$\text{rg}(A) = 2$$



Tema 4. Espacio Euclídeo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\dim(S \cup T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

Sara Pérez Carabaza (sara.perezcarabaza@unican.es).

Valvanuz Fernández Quiruelas (valvanuz.fernandez@unican.es).

Dpto. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación.

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales.

Este material se publica bajo Licencia: [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



ÍNDICE

1. Matrices
2. Sistemas lineales de ecuaciones
3. Espacios vectoriales
- 4. Espacio vectorial euclídeo**
5. Aplicaciones lineales.
6. Diagonalización.

- [Producto escalar y propiedades](#). [Espacio euclídeo](#)
- [Norma](#), [distancia](#), y [ángulo entre vectores](#)
- **Ortogonalidad:** [Vectores ortogonales](#). [Conjuntos ortogonales/ortonormales](#). [Bases ortogonales/ortonormales](#). [Matriz ortogonal](#). [Subespacios ortogonales](#).
- **Proyecciones ortogonales:** [Proyección de un vector sobre otro](#). [Proyección de un vector sobre un subespacio](#). [Coordenadas en una base ortogonal](#). [Gram-Schmidt](#). [Matriz de proyección ortogonal](#).
- [Complemento ortogonal](#). [Teorema de descomposición](#).
- [Ejercicio resuelto](#). [Propiedades de la matriz de proyección](#).
- [Ejemplos de uso: mínimos cuadrados](#)

Guía de colores

Texto = ejemplo/ejercicio

 = definición/teorema

Texto = error común

 = recordatorio

[Texto](#) = hipervínculo

Texto /  = código MATLAB

Texto /  = memorizar

PRODUCTO ESCALAR: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES.

Definición. El **producto escalar** usual de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^n$ se define como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

El resultado de un producto escalar (o producto punto) es siempre un escalar.

Dados dos vectores columna en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar usual coincide con el **producto matricial de una matriz fila por una matriz columna**: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v}$

Ejemplo 1. Obtener el producto escalar usual $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{u}$: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^t \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times 3 + (-4) \times 2 + 1 \times 1 = -1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^t \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \times 2 + 2 \times (-4) + 1 \times 1 = -1$$

u=[2 -4 1]'
v=[3 2 1]'
%opción 1
u'*v
%opción 2
dot(u,v)

PRODUCTO ESCALAR: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES.

En realidad, cualquier operación definida en un espacio vectorial que opere sobre dos vectores devolviendo un escalar y cumpla las siguientes propiedades es un producto escalar:

- Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$
$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (v_1, v_2) \cdot (u_1, u_2) = v_1 u_1 + v_2 u_2$$
- Distributiva $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (u_1, u_2) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2) = u_1 v_1 + u_1 w_1 + u_2 v_2 + u_2 w_2$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) + (u_1, u_2) \cdot (w_1, w_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_1 w_1 + u_2 w_2$$
- Reubicación del escalar: $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$
$$\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \alpha(u_1 v_1 + u_2 v_2) = \alpha u_1 v_1 + \alpha u_2 v_2$$
$$(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = (\alpha u_1, \alpha u_2) \cdot (v_1, v_2) = \alpha u_1 v_1 + \alpha u_2 v_2$$
$$\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = (u_1, u_2) \cdot (\alpha v_1, \alpha v_2) = \alpha u_1 v_1 + \alpha u_2 v_2$$
- Definida positiva: $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$, y $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ si y solo si $\vec{v} = \vec{0}$
$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (v_1, v_2) \cdot (v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2 \geq 0 \text{ e igual 0 únicamente si } \vec{v} = \vec{0}$$

Definición. Un **espacio euclídeo** es un espacio vectorial real V dotado de un producto escalar, que es una función que asigna a cada par de vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ un escalar, de tal manera que cumpla las propiedades vistas anteriormente.

- En $\mathbb{M}_2$ el producto matricial no es un producto escalar (el resultado ni siquiera es un escalar). Un producto escalar en $\mathbb{M}_2$ es el siguiente $A \cdot B = \text{tr}(A^t B)$
- El producto escalar usual en $\mathbb{R}^3$ se define como:
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$
- Otro producto escalar en $\mathbb{R}^3$ que cumple con las propiedades es el siguiente:
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3$$

Nota: Como veremos, el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$ ofrece ventajas geométricas que justifican su elección. En adelante trabajaremos con el espacio euclídeo formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ dotado del producto escalar usual.

NORMA DE UN VECTOR.

Definición. La **norma** $\|\vec{v}\|$ de un vector $\vec{v}$ es un escalar no negativo definido por:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad , \quad \|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

En $\mathbb{R}^n$, con el producto escalar usual, la norma coincide con la longitud del vector.

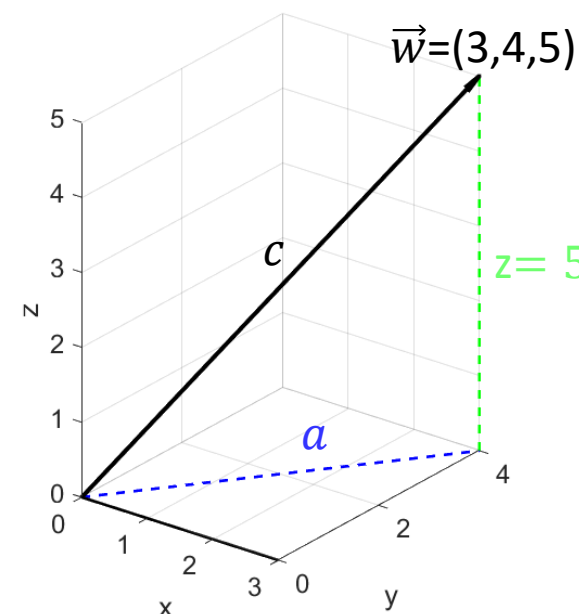
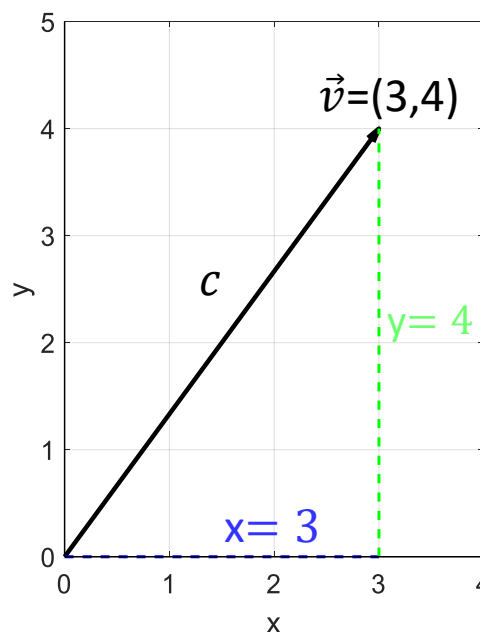
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Ejemplo 2.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(3, 4) \cdot (3, 4)} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\begin{aligned} \|\vec{w}\| &= \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}} = \sqrt{(3, 4, 5) \cdot (3, 4, 5)} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} \approx 7 \end{aligned}$$

norm([3 4])
norm([3 4 5])



NORMA DE UN VECTOR.

Propiedades:

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$, y $\|\vec{v}\| = 0$ si y solo si $\vec{v} = \vec{0}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \geq 0 \quad \|\vec{0}\| = 0$$

2. La norma de un vector es la misma que la de su opuesto $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$

3. La norma de un vector por un escalar α es igual al valor absoluto del escalar multiplicado por la norma del vector $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$

$$\|\alpha\vec{v}\| = \sqrt{(\alpha v_1)^2 + (\alpha v_2)^2 + \cdots + (\alpha v_n)^2} = \sqrt{\alpha^2(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)} = |\alpha|\|\vec{v}\|$$

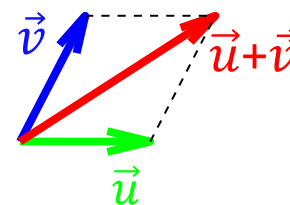
4. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

5. Desigualdad triangular $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

6. Desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$



NORMALIZACIÓN.

Definición. Un vector $\vec{v}$ cuya norma o longitud es 1 se denomina **vector unitario**.
Normalizar un vector $\vec{v}$ es obtener el vector unitario que resulta de dividirlo por su norma:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Gráficamente, normalizar corresponde a obtener el vector de norma o longitud uno en la misma dirección y con el mismo sentido que el original.

Ejemplo 3. En $\mathbb{R}^3$, determinar los vectores unitarios con la misma dirección que el vector $\vec{v}=(3,3,3)$

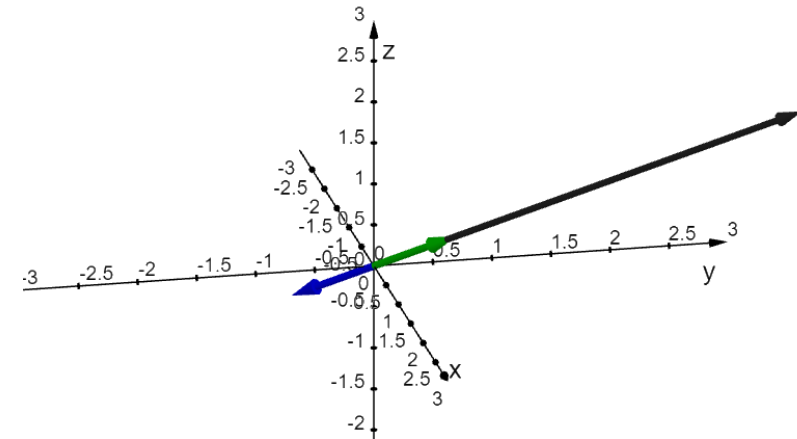
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$$

normalizamos $\vec{v}$:

$$\hat{v}_1 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{3}{3\sqrt{3}}, \frac{3}{3\sqrt{3}}, \frac{3}{3\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

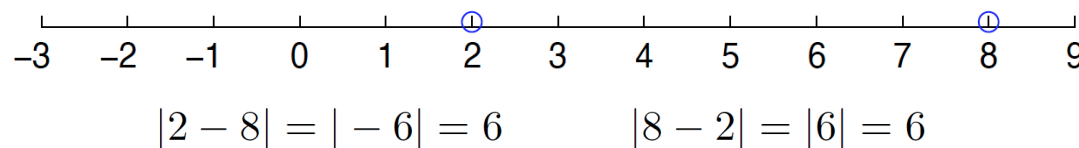
su opuesto tiene misma dirección y norma 1:

$$\hat{v}_2 = -\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$



DISTANCIA ENTRE DOS VECTORES.

Distancia entre los números reales
 a y b es el número real $|a - b|$



Definición. La **distancia entre dos vectores** cualesquiera de un espacio vectorial euclídeo es la norma del vector diferencia entre ambos:

$$\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{v} - \vec{u}\|$$

En $\mathbb{R}^n$, dado $\vec{u}=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $\vec{v}=(v_1, v_2, \dots, v_n)$:

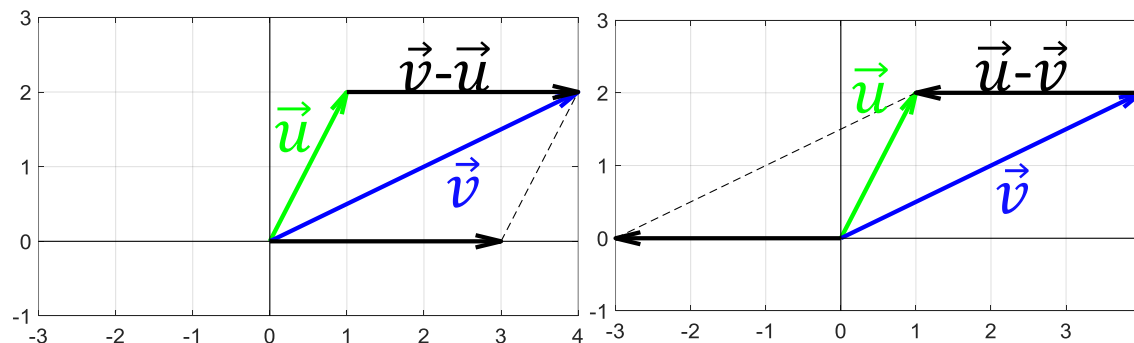
$$\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|(u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n)\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

Ejemplo 4.

$$\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) =$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|(1, 2) - (4, 2)\| = \|(-3, 0)\| = 3$$

$$\|\vec{v} - \vec{u}\| = \|(4, 2) - (1, 2)\| = \|(3, 0)\| = 3$$



ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES.

Definición. El coseno del ángulo θ entre dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de un espacio euclídeo viene determinado por:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \quad \theta \in [0, \pi]$$

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, el ángulo entre dos vectores no nulos es un ángulo trigonométrico real, definido como el menor ángulo que forman al colocarlos con origen común, medido en el plano que determinan.

Considerando la ley del coseno:

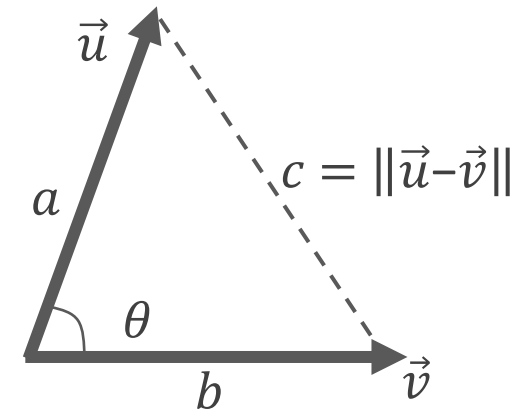
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$

Y la propiedad de la norma:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

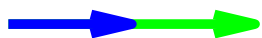
$$\text{Obtenemos, } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) \rightarrow \cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$



ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES.

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

$$\theta = 0^\circ$$



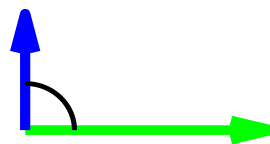
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$$

$$\theta = 30^\circ$$



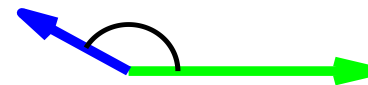
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3} \approx 1,73$$

$$\theta = 90^\circ$$



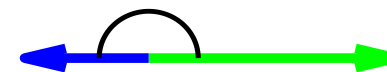
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\theta = 150^\circ$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\sqrt{3} \approx -1,73$$

$$\theta = 180^\circ$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \leftrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \leftrightarrow \theta = 90^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \leftrightarrow \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$$

Ejercicio 1. Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{u} = (7,1)$ y $\vec{v} = (4,-3)$.

Repaso ángulos notables [aquí](#)

VECTORES ORTOGONALES.

Definición. Se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **vectores ortogonales** entre sí si y solo si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y se denota $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Observación. En $\mathbb{R}^n$, el vector nulo $\vec{0}$ es ortogonal a cualquier vector.

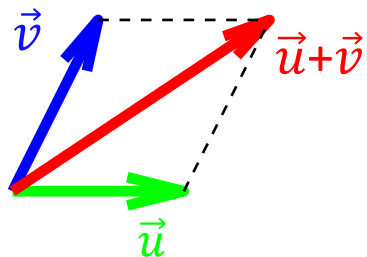
Ejercicio 2.

- a) Determinar si $\vec{u}=(1,1)$ y $\vec{w} = (-1,1)$ son ortogonales y el ángulo entre ambos.
- b) Determinar si $\vec{u}=(1,1)$ y $\vec{v} = (0,1)$ son ortogonales y el ángulo entre ambos.

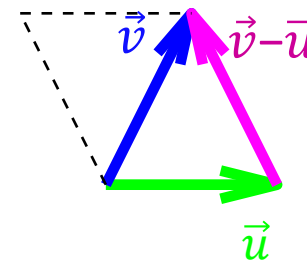
VECTORES ORTOGONALES.

Observación. De manera general tenemos (propiedad número 4 de la norma):

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

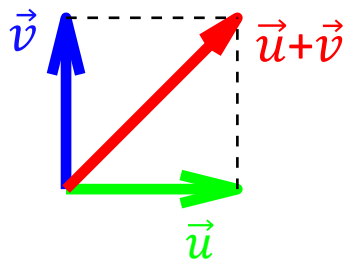


$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

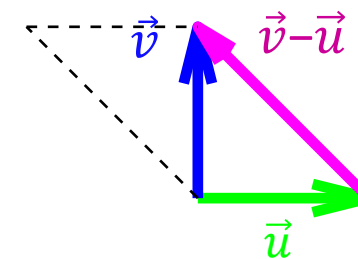


Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ puesto que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ obtenemos el Teorema de Pitágoras:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$



$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$



CONJUNTOS DE VECTORES ORTOGONALES.

Definición. Se dice que un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un **conjunto ortogonal** si cada par de vectores distintos del conjunto es ortogonal, es decir, si $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \ \forall i \neq j$

Definición. Se dice que un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un **conjunto ortonormal** si es un conjunto ortonormal de vectores unitarios.
Es decir, si $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \ \forall i \neq j$ y $\|\vec{u}_i\| = 1 \ \forall i$

Teorema. Todo conjunto de vectores ortogonal que no incluya al vector nulo es un conjunto linealmente independiente.

Ejercicio 3. Determinar si los siguientes conjuntos son ortogonales, ortonormales y libres:

a) La base canónica en $\mathbb{R}^3$.

b) $\{(1,2,0), (4, -2,0)\}$

c) $\{(1,2,0), (4, -2,0), (0,0,0)\}$

BASE ORTOGONAL.

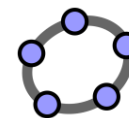
Definición. Una base de un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es una **base ortogonal** si los vectores que la componen forman un conjunto ortogonal. Si además son unitarios es una **base ortonormal**.

Como veremos, las bases ortogonales son muy ventajosas, al permitir calcular de manera eficiente las coordenadas de los vectores.

Ejercicio 4. Hallar una base ortonormal del subespacio $S: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.

Ejercicio 5. Determinar si el siguiente conjunto es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$:

$$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), (0, 1, 0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$



MATRIZ ORTOGONAL.

Definición. Las siguientes afirmaciones sobre **matrices ortogonales** son equivalentes para una matriz cuadrada de orden n .

- Una matriz es ortogonal si y solo si su inversa es igual a su traspuesta. $AA^t = I$
- Una matriz es ortogonal si y solo si sus columnas forman una **base ortonormal** de $\mathbb{R}^n$, considerando el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 5. Considerando la siguiente base ortonormal de $\mathbb{R}^2$:

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}_{A^t} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_I$$

A es una matriz ortogonal (y A^t también)

SUBESPACIOS VECTORIALES ORTOGONALES.

Definición. Un **vector** $\vec{u}$ es **ortogonal a un subespacio** S si es ortogonal a todos los vectores de S . Es decir: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ \forall \vec{v} \in S$

Bastará comprobar que $\vec{u}$ sea ortogonal a una base de S .

Ejemplo 6. El $\mathbb{R}^3$, el vector $\vec{u} = (0,0,1)$ es ortogonal al plano XY.

Demostración. Sea $\vec{v} \in S$ y $B_S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ una base S entonces.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p) = \alpha_1 \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{u} \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u} \cdot \vec{v}_p$$

Si $\vec{u}$ es ortogonal a todos los vectores de la base, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ \forall \vec{v} \in S$

Definición. Un **subespacio** S es **ortogonal a otro subespacio** T ($S \perp T$) si todo vector de S es ortogonal a todo vector de T , es decir: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ \forall \vec{u} \in S, \vec{v} \in T$

Bastará comprobar que los vectores de una base de S sean ortogonales a los de una base de T .

Propiedad. Si dos subespacios son ortogonales, entonces están en suma directa.

$$S \perp T \rightarrow S \cap T = \{\vec{0}\}$$

EJERCICIOS.

Ejercicio 6. En $\mathbb{R}^3$ determina si el plano XY y el plano XZ son subespacios ortogonales.

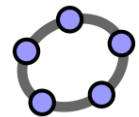
Ejercicio 7. ¿Son los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$ ortogonales? ¿Están en suma directa? ¿son espacios suplementarios en $\mathbb{R}^3$?

base S $\{(0, 1, 0), (1, 1, -1)\}$

base T $\{(1, 1, 1)\}$

base S $\{(0, 1, 0), (1, 1, -1)\}$

base W $\{(1, 0, 1)\}$

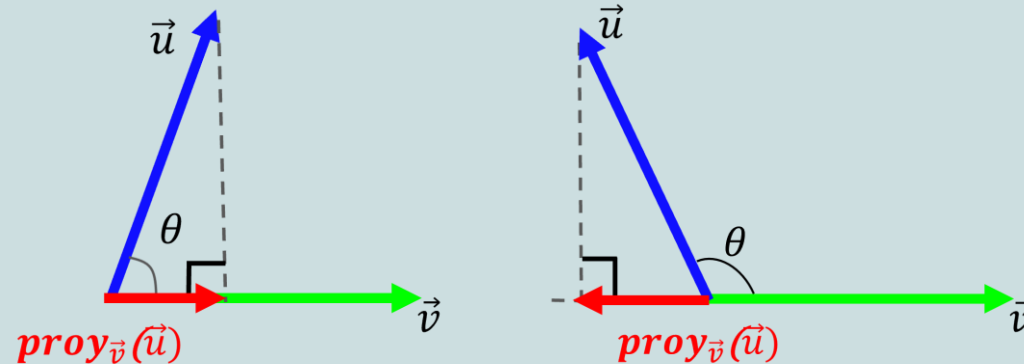


PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE OTRO.

Definición. El vector proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

Siendo su norma: $\|\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u})\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$



Demostración. Sea θ el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y θ' y el ángulo agudo formado al proyectar $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

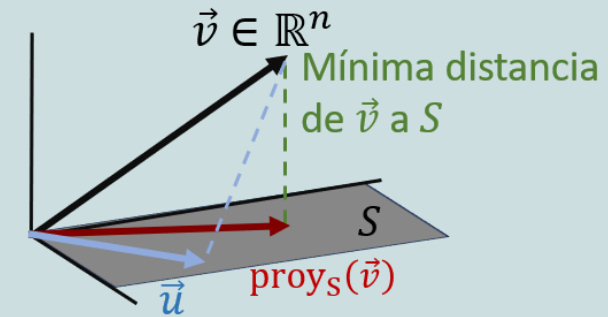
$$\cos(\theta') = \frac{\|\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u})\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$|\cos(\theta)| = \cos(\theta') \rightarrow \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\|\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u})\|}{\|\vec{u}\|} \rightarrow \|\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u})\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$$

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE UN SUBESPACIO.

Definición. Dado un subespacio vectorial $S \subset \mathbb{R}^n$ y un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, la **proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre el subespacio S** es el vector de S que se encuentra a mínima distancia de $\vec{v}$:

$$\|\vec{v} - \text{proy}_S(\vec{v})\| \leq \|\vec{v} - \vec{u}\| \quad \forall \vec{u} \in S$$



Para calcular la proyección de $\vec{v}$ sobre el subespacio S de $\mathbb{R}^n$ necesitamos una **base ortogonal de S** : $B_S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$:

$$\text{proy}_S(\vec{v}) = \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}) + \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{v}) + \text{proy}_{\vec{u}_3}(\vec{v}) + \dots + \text{proy}_{\vec{u}_p}(\vec{v})$$

Es decir, obtenemos $\text{proy}_S(\vec{v})$ como suma de las proyecciones de $\vec{v}$ sobre cada uno de los vectores de una base ortogonal de S .

Nota. Sino disponemos de una base no ortogonal de S podemos utilizar el método de Gram-Schmidt o la matriz de proyección que veremos más adelante.

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE UN SUBESPACIO.

Ejemplo 7. En $\mathbb{R}^3$ determinar la proyección del vector $\vec{v} = (3,5,1)$ sobre el plano XY considerando la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$.

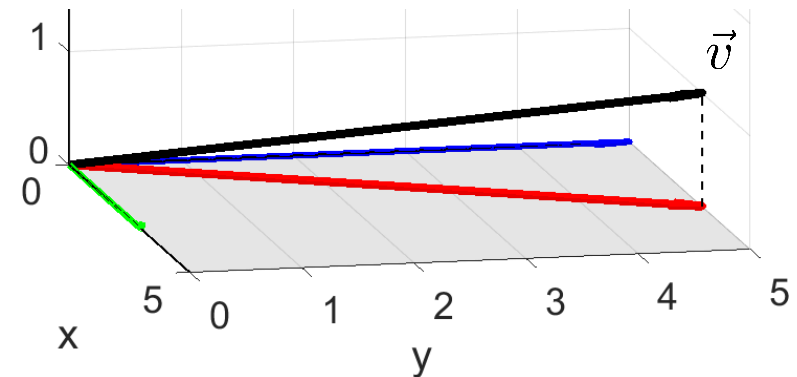
Se trata de una base ortogonal de S . Luego:

$$\text{proy}_S(\vec{v}) = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \vec{u}_1 + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \right) \vec{u}_2 = (\vec{v} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2$$

↓
base ortonormal $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = \|\vec{u}_i\|^2 = 1 \quad \forall i$

$$= 3\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 = \underbrace{(3, 0, 0)}_{\text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v})} + \underbrace{(0, 5, 0)}_{\text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{v})} = (3, 5, 0)$$

comprobación: $\text{proy}_S(\vec{v}) \in S$ ✓



$\text{proy}_S(\vec{v})$: vector en S más cercano a $\vec{v}$

COORDENADAS RELATIVAS A UNA BASE ORTOGONAL.

Observación. Si $\vec{v} \in S$ entonces $proy_S(\vec{v}) = \vec{v}$. Esto nos proporciona un método alternativo para calcular las coordenadas de $\vec{v}$ respecto a una base ortogonal de S .

Teorema. Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ una **base ortogonal** del subespacio S en $\mathbb{R}^n$. Entonces las **coordenadas** α_i de $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ son $\alpha_i = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_i}{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i}$ $i = 1, \dots, p$. Es decir,

$$\vec{v} = \underbrace{\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \vec{u}_1}_{\vec{v} = proy_{\vec{u}_1}(\vec{v})} + \underbrace{\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \right) \vec{u}_2}_{proy_{\vec{u}_2}(\vec{v})} + \underbrace{\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_3}{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3} \right) \vec{u}_3}_{proy_{\vec{u}_3}(\vec{v})} + \dots + \underbrace{\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \right) \vec{u}_p}_{proy_{\vec{u}_p}(\vec{v})}$$

Nótese que $\vec{v}$ queda expresado como suma de las proyecciones de este sobre los vectores de una base ortogonal.

Demostración.

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p \quad \text{multiplicamos escalarmente por } \vec{u}_1$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 + \dots + \alpha_p \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_p = \alpha_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 \rightarrow \alpha_1 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}$$

y lo mismo para el resto de coordenadas α_i .

COORDENADAS RELATIVAS A UNA BASE ORTONORMAL.

Ejemplo 8. En $\mathbb{R}^3$ determina las coordenadas para un vector $\vec{v} = (3,5,1)$ en la base $BC = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Al tratarse de una base ortonormal, el cálculo de las coordenadas se simplifica:

$$\vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \vec{u}_1 + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \right) \vec{u}_2 + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_3}{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3} \right) \vec{u}_3 = (\vec{v} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 + (\vec{v} \cdot \vec{u}_3) \vec{u}_3$$

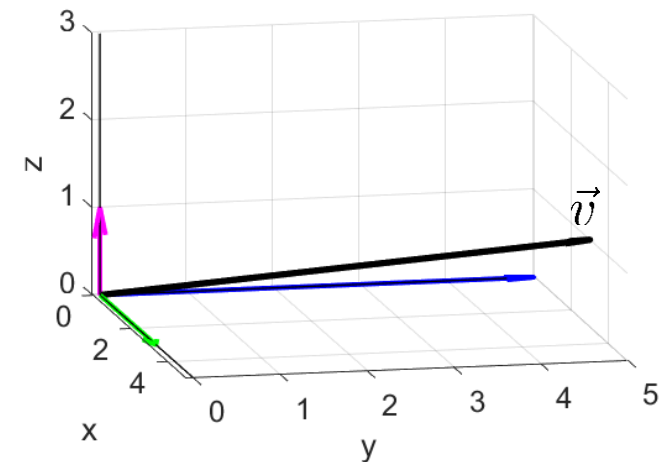
↓
base ortonormal $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = \|\vec{u}_i\|^2 = 1$

$$\alpha_1 = \vec{v} \cdot \vec{u}_1 = (3, 5, 1) \cdot (1, 0, 0) = 3,$$

$$\alpha_2 = \vec{v} \cdot \vec{u}_2 = (3, 5, 1) \cdot (0, 1, 0) = 5,$$

$$\alpha_3 = \vec{v} \cdot \vec{u}_3 = (3, 5, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1$$

$$\vec{v} = 3\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 1\vec{u}_3 = \underbrace{(3, 0, 0)}_{\text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v})} + \underbrace{(0, 5, 0)}_{\text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{v})} + \underbrace{(0, 0, 1)}_{\text{proy}_{\vec{u}_3}(\vec{v})}$$



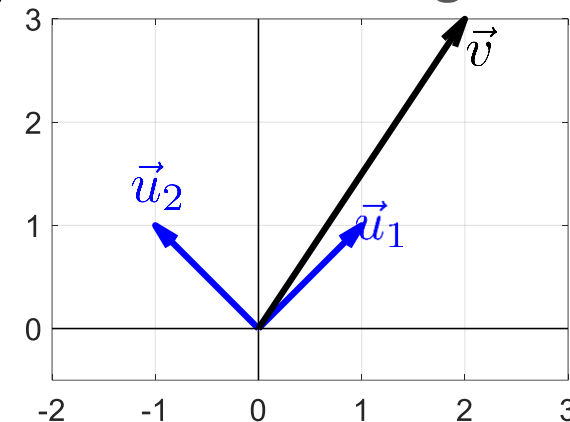
COORDENADAS RELATIVAS A UNA BASE ORTOGONAL.

Ejemplo 9. Determinar las coordenadas del vector $\vec{v}=(2,3)$ en la base ortogonal:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{(1,1), (-1,1)\}$$

opción 1 (estudiada en el tema anterior y válida siempre):

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = \frac{5}{2}, \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \end{matrix}$$
$$(\vec{v})_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_B$$



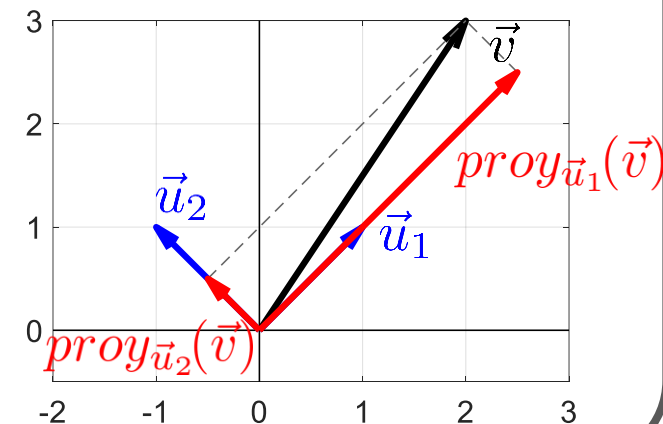
opción 2 (válida para bases ortogonales):

$$\vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \vec{u}_1 + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \right) \vec{u}_2 = \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}) + \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{v}) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = (2, 3)$$

$$\alpha_1 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = \frac{(2,3) \cdot (1,1)}{(1,1) \cdot (1,1)} = \frac{5}{2} \quad \alpha_2 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} = \frac{(2,3) \cdot (-1,1)}{(-1,1) \cdot (-1,1)} = \frac{1}{2}$$

comprobación:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$



COORDENADAS RELATIVAS A UNA BASE ORTOGONAL.

Ejemplo 9 (continuación). El procedimiento anterior únicamente es válido para bases ortogonales. Dado una base no ortogonal como: $B_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = \{(1,0), (2,2)\}$.

opción 1 (estudiada en el tema anterior y válida siempre):

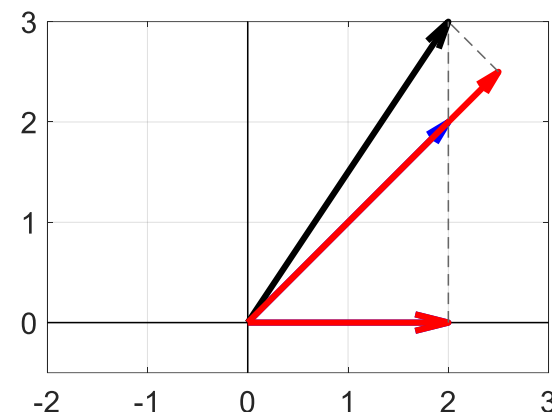
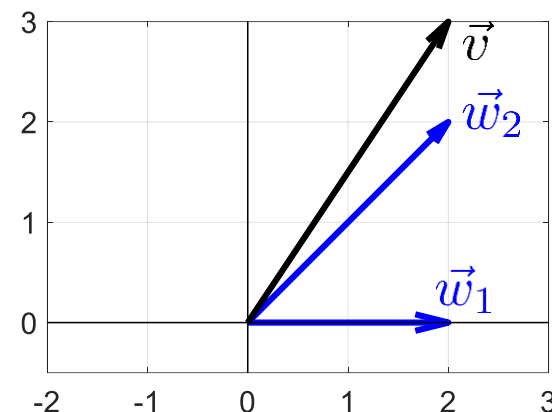
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2}, \\ \alpha_2 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$(\vec{v})_{B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}_{B_2}$$

Puesto que B_2 no es base ortogonal, la opción 2 no es válida.

Podemos comprobar que la suma de las proyecciones de $\vec{v}$ sobre los vectores de la base B_2 no coincide con $\vec{v}$.

$$\text{proy}_{\vec{w}_1}(\vec{v}) + \text{proy}_{\vec{w}_2}(\vec{v}) = (2, 0) + \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) \neq \vec{v}$$



RESUMEN.

Resumiendo hemos visto como calcular $\text{proy}_S(\vec{v})$ dada una base ortogonal

$$B_S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\} :$$

$$\text{proy}_S(\vec{v}) = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \vec{u}_1 + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \right) \vec{u}_2 + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_3}{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3} \right) \vec{u}_3 + \dots + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \right) \vec{u}_p$$

Y si $\vec{v} \in S$ entonces $\text{proy}_S(\vec{v}) = \vec{v}$, lo cual proporciona una manera sencilla de calcular las coordenadas de $\vec{v}$ respecto a B_S , especialmente si B_S es ortonormal.

Para calcular la proyección de un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sobre un subespacio $S \subseteq \mathbb{R}^n$, sino disponemos de una base ortogonal de S tenemos **dos opciones**:

- Calcular primero una **base ortogonal** mediante el método de ortogonalización de **Gram-Schmidt** y luego calcular la proyección ortogonal como:

$$\text{proy}_S(\vec{v}) = \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}) + \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{v}) + \dots + \text{proy}_{\vec{u}_p}(\vec{v})$$

- Hallar la **matriz de proyección** y calcular el vector proyección como:

$$\text{proy}_S(\vec{v}) = P_S \vec{v}$$

MÉTODO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT.

$$\underbrace{\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}}_{\text{base de } S} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \underbrace{\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}}_{\text{base ortogonal de } S}$$

Algoritmo Gram-Schmidt. Partimos de una base del subespacio S de $\mathbb{R}^n$:

1. El primer vector de la base ortogonal de S es:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1$$

2. Obtenemos a partir de $\vec{v}_2$, un vector $\vec{u}_2$ tal que $\vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$:

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proy}_{\langle \vec{u}_1 \rangle}(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 - \left(\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \vec{u}_1$$

3. Obtenemos a partir de $\vec{v}_3$ un vector $\vec{u}_3$ tal que $\vec{u}_3 \perp \vec{u}_1, \vec{u}_3 \perp \vec{u}_2$:

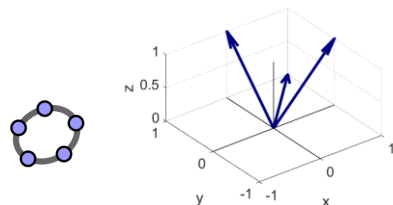
$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \text{proy}_{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle}(\vec{v}_3) = \vec{v}_3 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_3) - \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{v}_3)$$

...

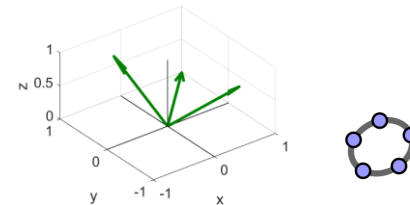
Obtenemos a partir de $\vec{v}_p$ un vector $\vec{u}_p$ tal que $\vec{u}_p \perp \vec{u}_1, \vec{u}_p \perp \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \perp \vec{u}_{p-1}$:

$$\vec{u}_p = \vec{v}_p - \text{proy}_{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{p-1} \rangle}(\vec{v}_p) = \vec{v}_p - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_p) - \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{v}_p) \dots - \text{proy}_{\vec{u}_{p-1}}(\vec{v}_p)$$

Ejemplo 10.



Gram-Schmidt



$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$$

base no ortogonal de $\mathbb{R}^3$

$$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(1, 1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$$

base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

Gram-Schmidt:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1, 1, 0)$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 - \left(\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \vec{u}_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_3) - \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{v}_3) = \vec{v}_3 - \left(\frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \vec{u}_1 - \left(\frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \right) \vec{u}_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Comprobación:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0, \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0, \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0 \quad \checkmark$$

Base ortonormal:

$$\left\{ \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}, \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\}$$

```
baseS=[1 1 0; 0 1 1; 1 0 1]'
% base ortonormal (diferente)
baseS_ortog=orth(baseS)
% comprobación base ortonormal
baseS_ortog'* baseS_ortog% I
```

MATRIZ DE PROYECCIÓN ORTOGONAL.

Definición. La **matriz de proyección ortogonal** P_S permite obtener la proyección de un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sobre un subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$ como:

$$\text{proy}_S(\vec{v}) = P_S \vec{v} \quad \text{con} \quad P_S = A(A^t A)^{-1} A^t$$

donde A es una matriz que contiene una base de S en sus columnas.

Observación. La matriz de proyección nos permite obtener la proyección de un vector sobre un subespacio sin necesidad de hallar una base ortogonal.

Propiedades.

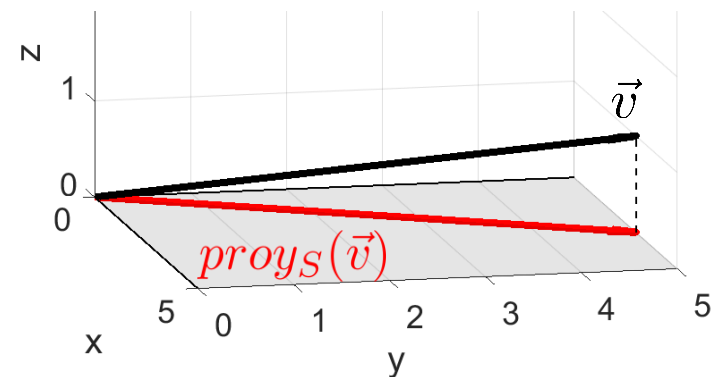
- P_S es **cuadrada** y de tamaño n (dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$).
- P_S es **única y no depende de la base de S escogida**.
- La matriz P_S es **simétrica**.
- Si escogemos una base ortonormal de S , $P_S = AA^t$.
- P_S es **singular**

MATRIZ DE PROYECCIÓN ORTOGONAL.

Ejemplo 11 (ejemplo 7). En $\mathbb{R}^3$ determinar la proyección del vector $\vec{v} = (3,5,1)$ sobre el plano XY mediante la matriz de proyección considerando la base $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$.

$$P_S = A(A^t A)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1}}_I \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{proy}_S(\vec{v}) = P_S \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Ejercicio 8. Determina la matriz de proyección sobre S utilizando otra base diferente.

COMPLEMENTO ORTOGONAL DE UN SUBESPACIO.

Definición. El **complemento ortogonal de un subespacio** S de $\mathbb{R}^n$ (denotado $S^\perp$) está formado por todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ ortogonales a S :

$$S^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \ \forall \vec{u} \in S\}$$

Propiedad. El complemento ortogonal de un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ es un espacio complementario de S en $\mathbb{R}^n$.

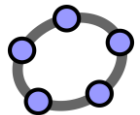
$$\dim(S + S^\perp) = \dim(\mathbb{R}^n) \text{ y } \dim(S \cap S^\perp) = 0$$

Además, $S^\perp$ es el único subespacio complementario que es ortogonal.

Ejemplo 12. En $\mathbb{R}^3$, el subespacio $S: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ (plano XY) tiene infinitos espacios suplementarios, pero únicamente $S^\perp: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = 0\}$ (eje z) es ortogonal a S .

Ejemplo 13 (ejercicio 7). Tanto W como T son espacios complementarios a S en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, únicamente W es ortogonal, $S^\perp = W$. Por supuesto, $W^\perp = S$.

$$B_S = \{(0, 1, 0), (1, 1, -1)\} \quad B_T = \{(1, 1, 1)\} \quad B_W = \{(1, 0, 1)\}$$



COMPLEMENTO ORTOGONAL DE UN SUBESPACIO.

Dado un subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$ y considerando el producto escalar usual, los vectores cuyas coordenadas son los **coeficientes de las ecuaciones implícitas de S** constituyen una **base de su complemento ortogonal $S^\perp$** .

Ejemplo 14.

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow B_{S^\perp} = \{(1, 1, 1, -1), (2, -1, 2, 1)\}$$

Efectivamente cualquier vector $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$ es ortogonal a $B_{S^\perp}$:

$$(1, 1, 1, -1) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$(2, -1, 2, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

Podemos calcular B_S y comprobar como S y $S^\perp$ son complementarios:

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_S = \{(-1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$$

$$S + S^\perp = \langle (1, 1, 1, -1), (2, -1, 2, 1), (-1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle \rightarrow \dim(S + S^\perp) = 4$$

```
coef_S=[1 1 1 -1; 2 -1 2 1]
baseScomp=coef_S'
%compr. ortogonalidad:
baseS=null(coef_S,'r')
baseS'*baseScomp
%compr. complementarios
rank([baseS baseScomp])
```

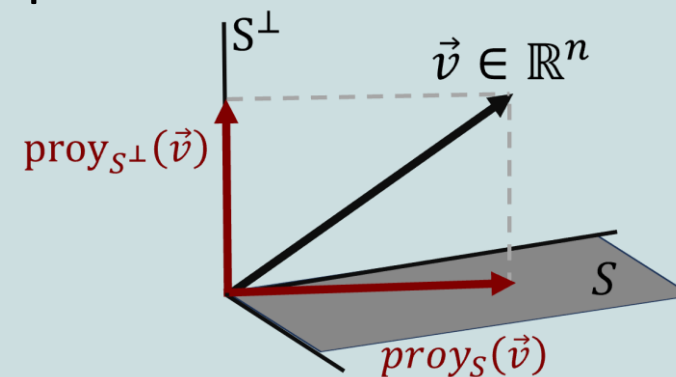
TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL.

Teorema. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$, cualquier vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ puede descomponerse de manera única como:

$$\vec{v} = \text{proy}_S(\vec{v}) + \text{proy}_{S^\perp}(\vec{v})$$

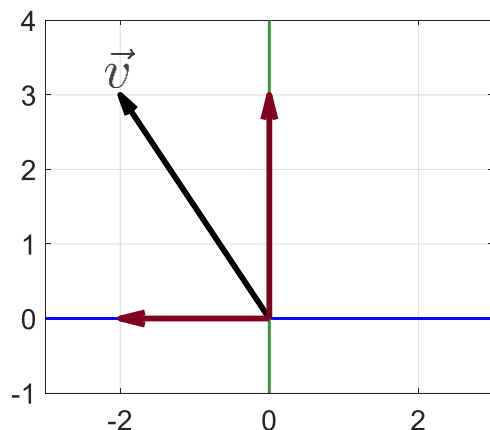
Donde:

- $\text{proy}_S(\vec{v}) \in S$
- $\text{proy}_{S^\perp}(\vec{v}) \in S^\perp$



Ejemplo 15.

$$\vec{v} = (-2, 3) = \underbrace{(-2, 0)}_{\text{proy}_S(\vec{v})} + \underbrace{(0, 3)}_{\text{proy}_{S^\perp}(\vec{v})}$$



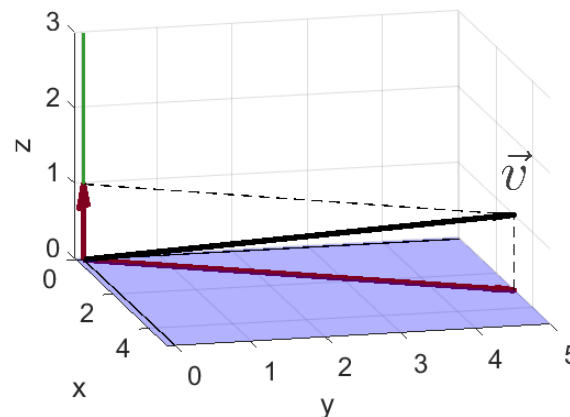
$\mathbb{R}^2$

$$S : \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$S^\perp : \{(0, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 16.

$$\vec{v} = (3, 5, 1) = \underbrace{(3, 5, 0)}_{\text{proy}_S(\vec{v})} + \underbrace{(0, 0, 1)}_{\text{proy}_{S^\perp}(\vec{v})}$$



$\mathbb{R}^3$

$$S : \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$S^\perp : \{(0, 0, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$$

EJERCICIO RESUELTO.

Ejemplo 17. a) Hallar una base ortogonal del subespacio S .

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + 3z = 0\}$$

Hallamos una base de S :

$$(x, y, z) = (\alpha/2 - \frac{3}{2}\beta, \alpha, \beta) = \alpha(\frac{1}{2}, 1, 0) + \beta(-\frac{3}{2}, 0, 1)$$

Gram-Schmidt:

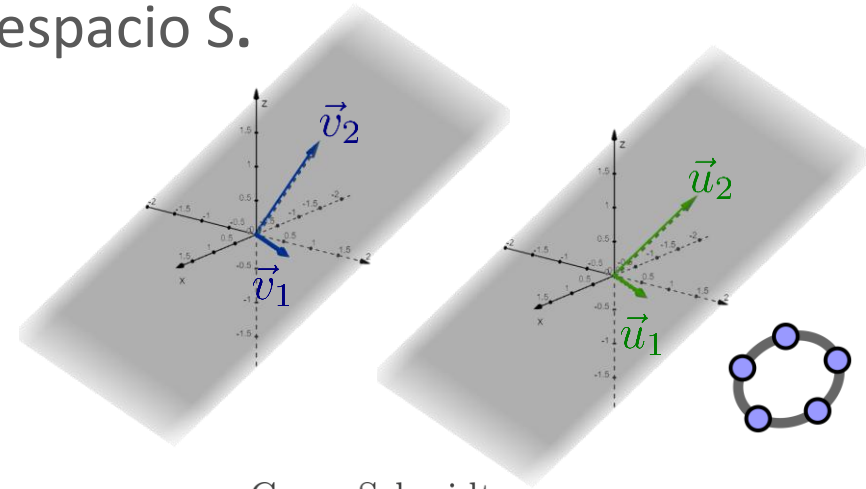
$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (\frac{1}{2}, 1, 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 - \left(\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \vec{u}_1 \\ &= \left(-\frac{3}{2}, 0, 1 \right) - \frac{(-\frac{3}{2}, 0, 1) \cdot (\frac{1}{2}, 1, 0)}{(\frac{1}{2}, 1, 0) \cdot (\frac{1}{2}, 1, 0)} \left(\frac{1}{2}, 1, 0 \right) = \left(\frac{-6}{5}, \frac{3}{5}, 1 \right) \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \rightarrow B_2 \text{ es conjunto ortogonal} \quad \checkmark$$

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in S \rightarrow B_2 \text{ es base de } S \quad \checkmark$$



$$B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

base de S base ortogonal de S

% bases ortonormales (diferentes)

coefS=[2 -1 3]

%opción 1: función orth

baseS=null(coefS,"rational")

baseS_ortog=orth(baseS)

%opción 2: null sin "rational"

baseS_ortog=null(coefS)

Ejemplo 17 (continuación).

b) Hallar las coordenadas de $\vec{v} = (-5, 5, 5)$ en la base obtenida.

$$\vec{v} = \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}) + \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{v}) = \underbrace{\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right)}_{\alpha_1} \vec{u}_1 + \underbrace{\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \right)}_{\alpha_2} \vec{u}_2 = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$$

comprobación: $\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$

c) Halla la proyección ortogonal sobre S del vector $\vec{w} = (1, 1, 1)$.

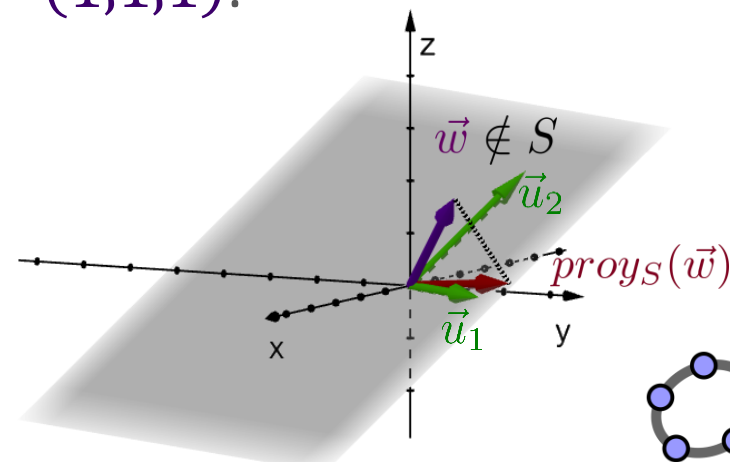
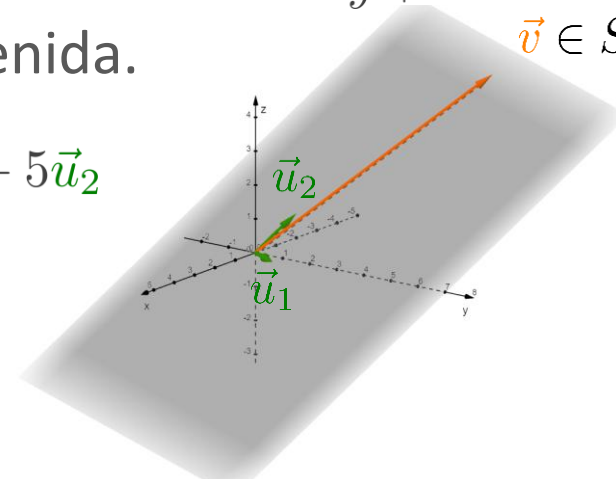
$$\text{proy}_S(\vec{w}) = \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \vec{u}_1 + \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \right) \vec{u}_2 = \frac{6}{5}\vec{u}_1 + \frac{1}{7}\vec{u}_2$$

$$\text{proy}_S(\vec{w}) = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 9/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$$

comprobación: $2\frac{3}{7} - \frac{9}{7} + 3\frac{1}{7} = 0 \rightarrow \text{proy}_S(\vec{w}) \in S \quad \checkmark$

$$2x - y + 3z = 0$$

$\vec{v} \in S$



EJERCICIO RESUELTO.

Ejemplo 17 (continuación). d) Obtén $proy_S(\vec{w})$ utilizando la matriz de proyección sobre S y comprueba que obtienes el mismo resultado.

$$P_S = A(A^t A)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 1/2 & -6/5 \\ 1 & 3/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ -6/5 & 3/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -6/5 \\ 1 & 3/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ -6/5 & 3/5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1/2 & -6/5 \\ 1 & 3/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 14/5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ -6/5 & 3/5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 & 1/7 & -3/7 \\ 1/7 & 13/14 & 3/14 \\ -3/7 & 3/14 & 5/14 \end{pmatrix}$$

$$proy_S(\vec{w}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 5/7 & 1/7 & -3/7 \\ 1/7 & 13/14 & 3/14 \\ -3/7 & 3/14 & 5/14 \end{pmatrix}}_{P_S} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 9/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$$

```
baseS=[1/2 1 0; -6/5 3/5 1]'  
A=baseS;  
Ps=A*inv(A'*A)*A'  
w=[1 1 1]'  
proy_S_w=Ps*w  
%comprobación  
coef_S=[2 -1 3]  
coef_S*proy_S_w
```

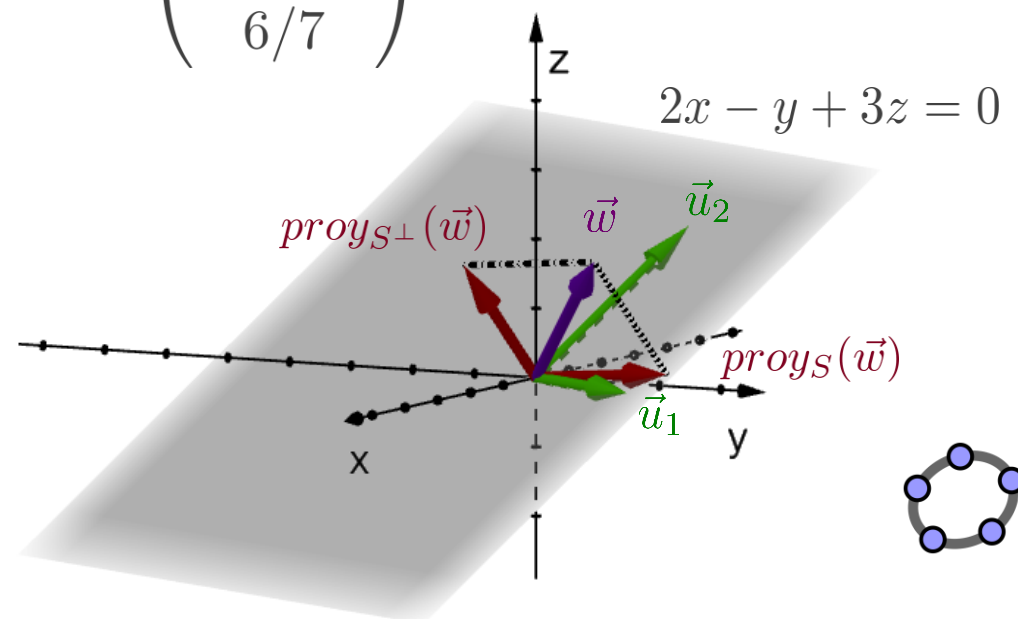
EJERCICIO RESUELTO.

Ejemplo 17 (continuación). e) Descompón el vector $\vec{w} = (1,1,1)$ como suma de un vector perteneciente a S y otro vector perteneciente a $S^\perp$.

$$\vec{w} = \text{proy}_S(\vec{w}) + \text{proy}_{S^\perp}(\vec{w})$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 9/7 \\ 1/7 \end{pmatrix} + \text{proy}_{S^\perp}(\vec{w}) \rightarrow \text{proy}_{S^\perp}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 4/7 \\ -2/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/7 \\ 9/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}}_{\text{proy}_S(\vec{w}) \in S} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4/7 \\ -2/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}}_{\text{proy}_{S^\perp}(\vec{w}) \in S^\perp}$$



Nota: comprueba que al obtener $S^\perp$ y calcular la proyección de $\vec{w}$ sobre este obtienes el mismo resultado.

PROPIEDADES: MATRIZ DE PROYECCIÓN ORTOGONAL.

Propiedad. Sea P_S la matriz de proyección ortogonal sobre el subespacio S de $\mathbb{R}^n$ y $P_{S^\perp}$ la matriz de proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal de S :

$$P_S + P_{S^\perp} = I$$

Demostración.

$$\vec{v} = \text{proy}_S(\vec{v}) + \text{proy}_{S^\perp}(\vec{v}) = P_S \vec{v} + P_{S^\perp} \vec{v} = (P_S + P_{S^\perp}) \vec{v} \rightarrow P_S + P_{S^\perp} = I$$

Ejemplo 17 (continuación). f) Comprueba que las matrices de proyección sobre S del ejemplo anterior verifican dicha propiedad.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\} \rightarrow B_{S^\perp} = \{(2, -1, 3)\}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5/7 & 1/7 & -3/7 \\ 1/7 & 13/14 & 3/14 \\ -3/7 & 3/14 & 5/14 \end{pmatrix}}_{P_S} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 & 3/7 \\ -1/7 & 1/14 & -3/14 \\ 3/7 & -3/14 & 9/14 \end{pmatrix}}_{P_{S^\perp}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
coef_S=[2 -1 3]
baseScomp=coef_S'
A= baseScomp;
Pscomp=A*inv(A'*A)*A'
```

PROPIEDADES: MATRIZ DE PROYECCIÓN ORTOGONAL.

Propiedad. Las columnas de toda matriz de proyección P_S sobre un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ forman un sistema generador de S .

Observación. El rango de una matriz de proyección P_S es igual a la dimensión de S .

Ejemplo 17 (continuación). g) Comprueba la propiedad para la matriz P_S obtenida para proyectar un vector de $\mathbb{R}^3$ sobre $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$.

$$P_S = \begin{pmatrix} 5/7 & 1/7 & -3/7 \\ 1/7 & 13/14 & 3/14 \\ -3/7 & 3/14 & 5/14 \end{pmatrix} \quad rg(P_S) = 2$$

Comprobamos que los vectores columnas de $P_S \in S$:

$$2(5/7) - (1/7) + 3(-3/7) = 0$$

$$2(1/7) - (13/14) + 3(3/14) = 0$$

$$2(-3/7) - (3/14) + 3(5/14) = 0$$



```
coefS=[2 -1 3];  
%comprobamos rango  
rank(Ps) %dim(S)=2  
% opción 1: comprobación uno a uno  
coefS*Ps(:,1)  
coefS*Ps(:,2)  
coefS*Ps(:,3)  
% opción 2: comprobación de una vez  
coefS*Ps
```

Nota: comprueba tú mismo dicha propiedad para $P_{S^\perp}$

EJEMPLO DE USO: MÍNIMOS CUADRADOS

Ejemplo 18. Motivación.

Dos clases de suplementos, a los que denominaremos A y B, presentan las cantidades de vitamina C, calcio y magnesio dadas en la tabla (mg por unidad de alimento).

Combinando las dos clases de suplementos queremos obtener el siguiente aporte exacto: 17 mg de vitamina C, 54 mg de calcio y 31 mg de magnesio.



	A	B
Vitamina C	1	1
Calcio	5	2
Magnesio	3	1

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 5x + 2y = 54 \\ 3x + y = 31 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 17 \\ 5 & 2 & 54 \\ 3 & 1 & 31 \end{array} \right) \xrightarrow{Gauss} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 17 \\ 0 & -3 & -31 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{array} \right)$$

El sistema no tiene solución que cumpla las ecuaciones impuestas, ¿Por qué no encontrar una aproximación que minimice el error cometido?

EJEMPLO DE USO: MÍNIMOS CUADRADOS

Introducción.

Podemos analizar la compatibilidad de un sistema analizando si el vector de términos independientes es combinación lineal o no de los vectores columna de la matriz de coeficientes del sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 54 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \text{Sistema } \begin{matrix} \text{incompatible} \\ \iff \end{matrix} \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 54 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Rouché Frobenius
 $rg(A) \neq rg(A^*)$

$\vec{b}$ no es combinación lineal de los vectores columna de A

Para que el sistema sea compatible el vector $\vec{b}$ debe pertenecer al espacio vectorial generado por los vectores columna de la matriz de coeficientes A (denominado **espacio columna $ColA$**). La idea de mínimos cuadrados es sustituir $\vec{b}$ por otro $\hat{\vec{b}}$ tal que $A\hat{\vec{x}} = \hat{\vec{b}}$ sea compatible con solución $\hat{\vec{x}}$ y el error cometido sea el menor posible.

EJEMPLO DE USO: MÍNIMOS CUADRADOS

Método. Aproximación de un sistema incompatible por mínimos cuadrados.

1. Dado un sistema lineal incompatible $A\vec{x} = \vec{b}$, podemos obtener un vector $\hat{\vec{b}}$ tal que $A\vec{x} = \hat{\vec{b}}$ sea un sistema compatible tal que $\hat{\vec{b}}$ minimice el **error cuadrático** $\|\vec{b} - \hat{\vec{b}}\|^2$. Dicho vector es la proyección de $\vec{b}$ sobre el espacio columna:

$\hat{\vec{b}} = \text{proy}_{\text{Col}A}(\vec{b}) \rightarrow \hat{\vec{b}}$ es el vector $\in \text{Col}A$ lo más cercano posible a $\vec{b}$.

Además, si las columnas de A son l.i., estas forman una base de $\text{Col}A$:

$$\text{proy}_{\text{Col}A}(\vec{b}) = A(A^t A)^{-1} A^t \vec{b}$$

2. Resolvemos el sistema $A\hat{\vec{x}} = \hat{\vec{b}}$, el cual es compatible. La solución obtenida $\hat{\vec{x}}$ es la mejor aproximación posible para el sistema incompatible $A\vec{x} = \vec{b}$.

EJEMPLO DE USO: MÍNIMOS CUADRADOS

Ejemplo 18.
$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 5x + 2y = 54 \\ 3x + y = 31 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sist. incompatible} \\ rg(A) < rg(A|b) \end{array}$$

Paso 1: Calculamos $\hat{\vec{b}} = \text{proy}_{\text{Col}A}(\vec{b})$

$$B_{\text{col}A} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{(1, 5, 3), (1, 2, 1)\}$$

Gram-Schmidt: $\vec{u}_1 = \vec{v}_1, \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2) = (\frac{3}{6}, 0, -1/5)$

$$\hat{\vec{b}} = \text{proy}_{\text{Col}A}(\vec{b}) = \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \vec{u}_1 + \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \right) \vec{u}_2 = (118/7, 380/7, 214/7) \approx (16.85, 54.29, 30.57)$$

conseguiremos 16.85 mg de vitamina C, 54.29 mg de calcio y 30.57 mg de magnesio.

$$\text{error cuadrático} = \|\vec{b} - \hat{\vec{b}}\|^2 = \|(0.14, -0.28, 0.43)\|^2 = 0.28 \text{ mg}^2$$

Paso 2: Resolvemos sistema compatible $A\hat{\vec{x}} = \hat{\vec{b}}$

$$\begin{cases} x + y = 118/7 \\ 5x + 2y = 380/7 \\ 3x + y = 214/7 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{SCD} \\ rg(A) = rg(A|\hat{\vec{b}}) \end{array} \quad (x, y) \approx (6.85, 10)$$

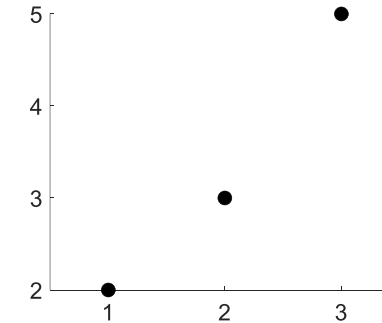
$$\begin{aligned} A &= [1 \ 1 ; 5 \ 2; 3 \ 1] \\ b &= [17 \ 54 \ 31]' \\ \hat{x} &= A \backslash b \\ \hat{b} &= A * \hat{x} \end{aligned}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN: MÍNIMOS CUADRADOS

Ejemplo 15. Queremos ajustar con los siguientes 3 puntos mediante una recta $y = mx + n$.

$$\begin{cases} 2 = 1m + n \\ 3 = 2m + n \\ 5 = 3m + n \end{cases} \quad \text{SI} \quad rg(A) < rg(A|b)$$

x	$y \equiv \vec{b}$
1	2
2	3
3	5



El sistema es incompatible, no existe ninguna recta que pase por los 3 puntos.
Vamos a obtener la recta que mejor se ajuste.

$$P_{colA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\vec{b}} = \text{proy}_{colA}(\vec{b}) = P_{colA} \vec{b} = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/6 \\ 10/3 \\ 29/6 \end{pmatrix}$$

```
A=[1 1; 2 1; 3 1]
b=[2 3 5]'
P=A*inv(A'*A)*A'
bhat=P*b
xhat=A\bhat
%alternativa
A\b
```

EJEMPLO DE APLICACIÓN: MÍNIMOS CUADRADOS

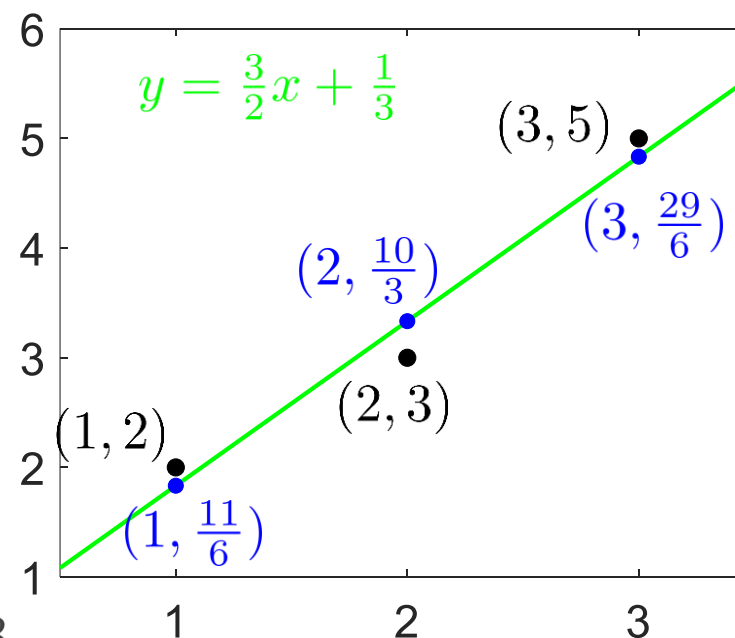
Ejemplo 15 (continuación).

$$\begin{cases} 2 = 1m + n \\ 3 = 2m + n \\ 5 = 3m + n \end{cases} \quad \text{SI} \quad rg(A) < rg(A|b)$$

$$\begin{cases} 1m + n = 11/6 \\ 2m + n = 10/3 \\ 3m + n = 29/6 \end{cases} \quad \text{SCD} \quad rg(A) = rg(A|\hat{b})$$

Solución: $(m, n) = (3/2, 1/3)$

x	$y \equiv \vec{b}$	$\hat{\vec{b}}$	$\vec{b} - \hat{\vec{b}}$
1	2	11/6	-1/6
2	3	10/3	-1/3
3	5	29/6	1/6



$$\text{error cuadrático} = \|\vec{b} - \hat{\vec{b}}\|^2 = \|(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6})\|^2 = 37.833$$