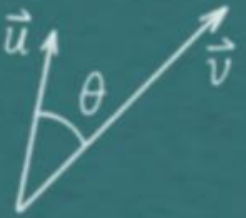


$$D = P^{-1}AP$$

$$\det(D) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

$$\text{rg}(A) = 2$$



Tema 5. Aplicaciones Lineales

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\dim(S \cup T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

Sara Pérez Carabaza (sara.perezcarabaza@unican.es).

Valvanuz Fernández Quiruelas (valvanuz.fernandez@unican.es).

Dpto. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación.

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales.

Este material se publica bajo Licencia: [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



1. Matrices
2. Sistemas lineales de ecuaciones
3. Espacios vectoriales
4. Espacio vectorial euclídeo
- 5. Aplicaciones lineales** ➔
6. Diagonalización

- [Introducción aplicaciones lineales.](#)
- [Matriz estándar y ecuaciones de una aplicación lineal.](#)
- [Imagen y Núcleo. Teorema de la dimensión.](#)
- [Imagen de un subespacio del dominio.](#)
- Tipos de aplicaciones: [inyectivas](#), [sobreyectivas](#) y [biyectivas](#)
- [Composición de aplicaciones. Matriz inversa.](#)
- [Matriz de una aplicación en bases cualesquiera.](#)

Guía de colores

Texto = ejemplo/ejercicio

 = definición/teorema

Texto = error común

 = recordatorio

[Texto](#) = hipervínculo

Texto /  = código MATLAB

Texto /  = memorizar

APLICACIONES.

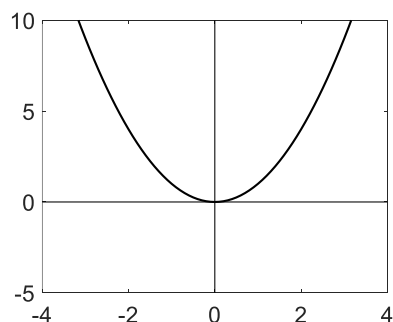
Definición. Una **aplicación** f entre dos conjuntos A y B es una regla que asigna a cada elemento del conjunto A , un único elemento de B . Se denota de cualquiera de las dos siguientes maneras:

$$f: A \rightarrow B \qquad \begin{matrix} f \\ A \rightarrow B \end{matrix}$$

Asigna (o mapea) a cada elemento $a \in A$, llamado **antecedente**, un elemento $b \in B$ llamado **imagen**. Se dice que b es la imagen de a y se escribe $f(a) = b$

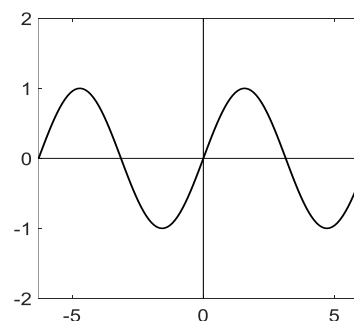
El conjunto A se denomina **dominio** y el conjunto B , **codominio** de f .

Ejemplo 1.



$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 \\ \text{dominio: } \mathbb{R} \\ \text{codominio: } \mathbb{R} \\ \text{imagen } f: [0, \infty) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.



$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) &= \text{sen}(x) \\ \text{dominio: } \mathbb{R} \\ \text{codominio: } \mathbb{R} \\ \text{imagen } g: [-1, 1] \end{aligned}$$

Nota. La palabra “imagen” puede referirse al valor $f(a)$ de un elemento $a \in A$, o al conjunto de las imágenes de todos los elementos del dominio, también llamado conjunto imagen o recorrido.

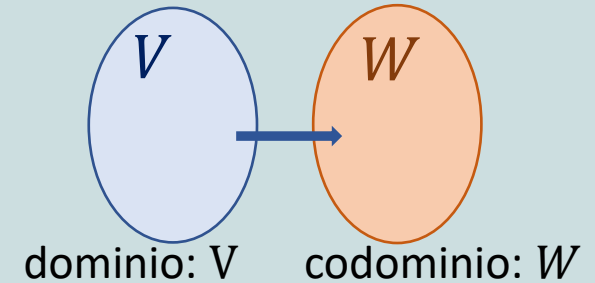
APLICACIONES LINEALES.

Definición. Una **aplicación lineal** $f: V \rightarrow W$ entre dos espacios vectoriales reales es una función que cumple las siguientes propiedades con $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$1) f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$2) f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$$

O equivalentemente: $f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$



Las aplicaciones lineales reciben también el nombre de **homomorfismo**, y si el dominio y codominio coinciden **endomorfismos**.

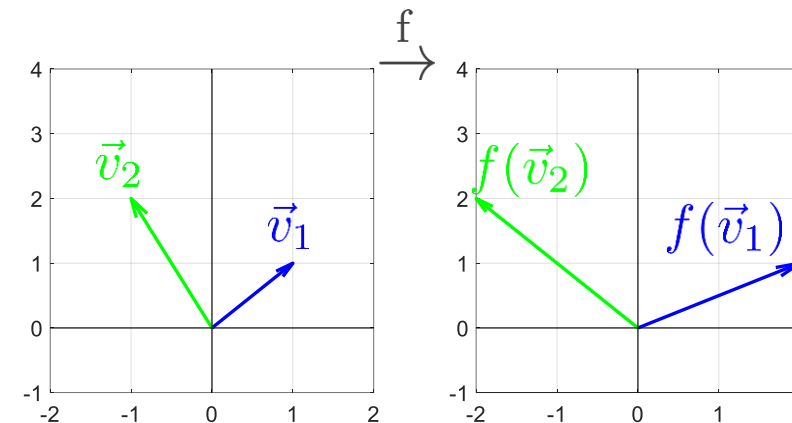
Nota: En lo que sigue, trabajaremos con aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

Observación. En una aplicación lineal la imagen del vector cero en $\mathbb{R}^n$ es el vector cero en $\mathbb{R}^m$. Es decir, $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$. Demostración: $f(\vec{0}_V) = f(0\vec{u}) = 0f(\vec{u}) = \vec{0}_W$

Ejercicio 1. ¿Son aplicaciones lineales las aplicaciones de los ejemplos 1 y 2?

Ejemplo 3. Analicemos si la aplicación f es de tipo lineal.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \rightarrow (2x_1, x_2)$$



Dados $\vec{u} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\vec{v} = (x'_1, x'_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2) = (2(x_1 + x'_1), x_2 + x'_2) \quad \checkmark$$

$$f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = (2x_1, x_2) + (2x'_1, x'_2) = (2(x_1 + x'_1), x_2 + x'_2)$$

conserva la suma, la imagen de la suma de dos vectores es la suma de las imágenes de los dos vectores

$$f(\alpha \vec{u}) = f(\alpha x_1, \alpha x_2) = (2\alpha x_1, \alpha x_2) \quad \checkmark$$

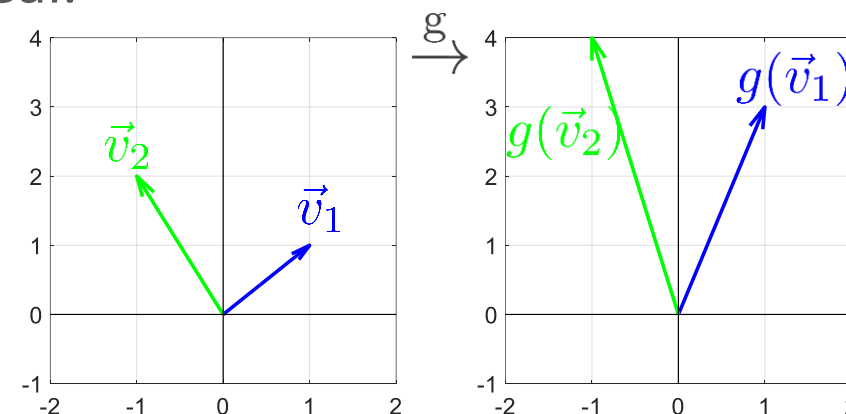
$$\alpha f(\vec{u}) = \alpha(2x_1, x_2) = (2\alpha x_1, \alpha x_2)$$

conserva la multiplicación por escalar, la imagen de un escalar por un vector es el producto del escalar por la imagen del vector

$\Rightarrow f$ es una aplicación lineal

Ejemplo 4. Analicemos si la aplicación g es lineal.

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 + 2)$$



Dados $\vec{u} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\vec{v} = (x'_1, x'_2) \in \mathbb{R}^2$

No conserva la suma

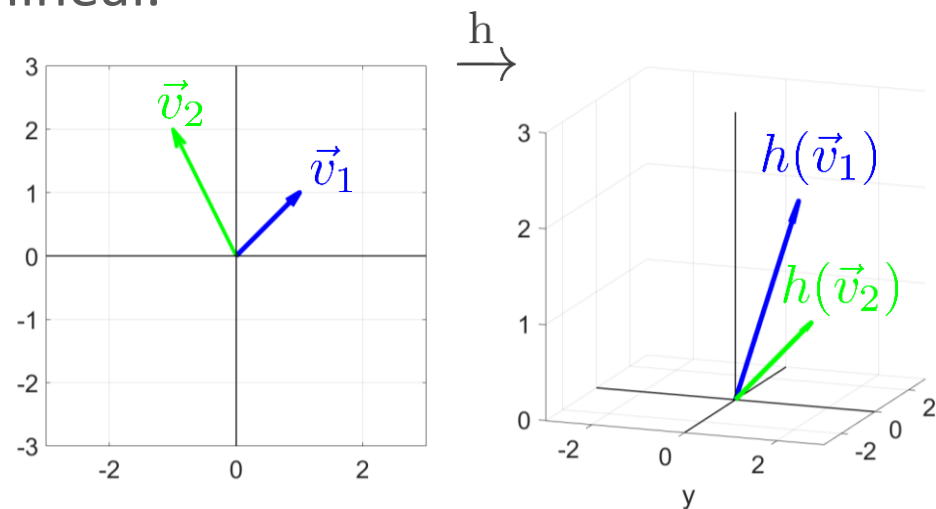
$$g(\vec{u} + \vec{v}) = g(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2 + 2) \quad \times$$
$$g(\vec{u}) + g(\vec{v}) = (x_1, x_2 + 2) + (x'_1, x'_2 + 2) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2 + 4)$$

$\Rightarrow$ g no es una aplicación lineal

Nota: Es muy rápido comprobar también que $g(\vec{0}) = (0, 2) \neq (0, 0)$

Ejemplo 5. Analicemos si la aplicación h es lineal.

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1, x_1 + x_2)$$



Dados $\vec{u} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\vec{v} = (x'_1, x'_2) \in \mathbb{R}^2$

$$h(\vec{u} + \vec{v}) = h(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2) = (x_2 + x'_2, x_1 + x'_1, x_1 + x'_1 + x_2 + x'_2)$$

$$h(\vec{u}) + h(\vec{v}) = (x_2, x_1, x_1 + x_2) + (x'_2, x'_1, x'_1 + x'_2) = (x_2 + x'_2, x_1 + x'_1, x_1 + x'_1 + x_2 + x'_2)$$

$$h(\alpha \vec{u}) = h(\alpha x_1, \alpha x_2) = (\alpha x_2, \alpha x_1, \alpha x_1 + \alpha x_2)$$

$$\alpha f(\vec{u}) = \alpha(x_2, x_1, x_1 + x_2) = (\alpha x_2, \alpha x_1, \alpha x_1 + \alpha x_2)$$

$\Rightarrow h$ es una aplicación lineal

MATRIZ ESTÁNDAR DE UNA APLICACIÓN.

Toda aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se puede identificar con una matriz $A_{m \times n}$, y toda matriz representa una aplicación lineal.

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (\text{con } f \text{ lineal})$$



$$\underbrace{A\vec{x}} = f(\vec{x})$$

A : matriz estándar de tamaño $m \times n$ de la aplicación lineal f

Ejemplo 6.

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1, x_1 + x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{3 \times 2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + 3x_2, x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{2 \times 3}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Escribe la matriz estándar de la aplicación f .

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_1 + 2x_2, x_3 + 3x_4)$$

MATRIZ ESTÁNDAR DE UNA APLICACIÓN.

Demostración.

(i) $A\vec{x} \rightarrow$ en una transformación lineal

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 \quad \checkmark$$

$$A(\alpha\vec{x}_1) = \alpha(A\vec{x}_1) \quad \checkmark$$

(ii) Sea f una transformación lineal $\rightarrow$ existe una matriz asociada A que representa f

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = f(x_1\vec{e}_1) + f(x_2\vec{e}_2) + \cdots + f(x_n\vec{e}_n)$$

siendo $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$= x_1f(\vec{e}_1) + x_2f(\vec{e}_2) + \cdots + x_nf(\vec{e}_n) = \underbrace{[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)]}_{A} \vec{x} = A\vec{x}$$

A: matriz estándar de la aplicación lineal f

La i-ésima columna de la matriz estándar es la imagen del i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$

ECUACIONES DE UNA APLICACIÓN LINEAL.

Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con matriz asociada A tal que $A\vec{x} = \vec{y} = f(\vec{x})$. También puede escribirse mediante las **ecuaciones de la aplicación f** .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{\vec{y}=f(\vec{x})} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} \iff \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \\ \cdots = \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

Al igual que un espacio vectorial puede definirse mediante un sistema generador, ecuaciones implícitas o forma paramétrica. Una aplicación lineal puede definirse mediante la definición de la aplicación lineal, su matriz estándar o las ecuaciones de la aplicación.

Ejemplo 8.

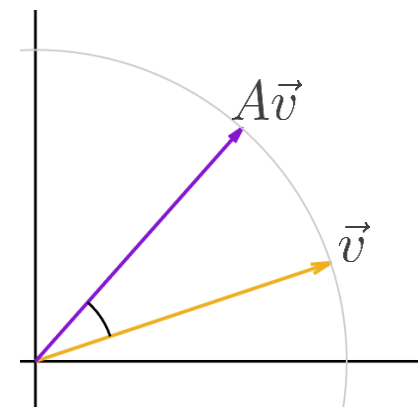
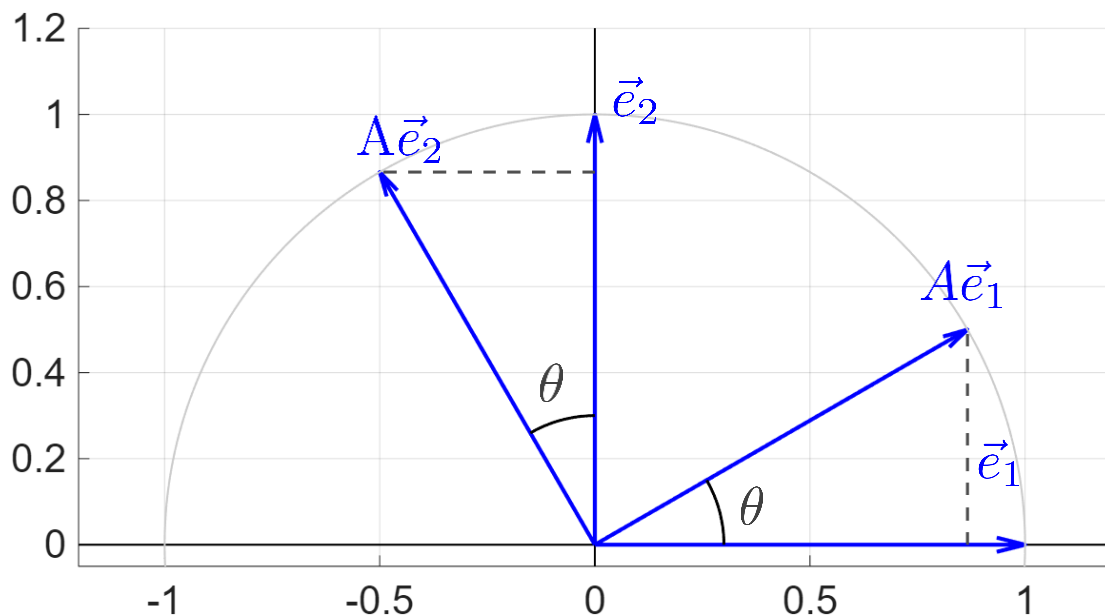
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\rightarrow (x_2, x_1, x_1 + x_2) \end{aligned} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{A_{3 \times 2} \\ \text{matriz estándar de la aplicación } f}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y_1 = x_2 \\ y_2 = x_1 \\ y_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \quad \text{ecuaciones de la aplicación } f$$

EJERCICIOS.

Ejercicio 2. Determina la matriz y ecuaciones de la aplicación lineal f .

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

Ejemplo 9. A la matriz asociada a la transformación lineal que gira un vector un ángulo en sentido antihorario se le denomina **matriz de giro o matriz de Givens**.



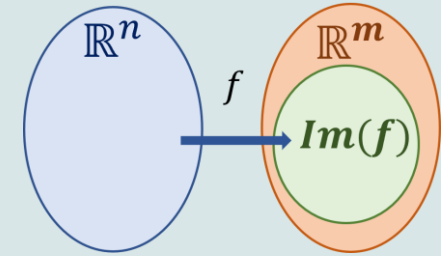
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Aplica la transformación $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de giro de 90° antihorario a $\vec{v} = (2, 2)$.

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL.

Definición. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, llamamos **imagen o espacio imagen** de la aplicación lineal al conjunto de las imágenes de los vectores de $\mathbb{R}^n$.

$$Im(f) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$



Observación 1. La imagen de una aplicación lineal es un subespacio vectorial del codominio, $Im(f) \subset \mathbb{R}^m$. Luego, $dim(Im(f)) \leq dim(\mathbb{R}^m)$.

Observación 2. La imagen de f coincide con el espacio vectorial generado por la C.L. de los vectores columna de su matriz estándar A , es decir, el **espacio columna de A** denominado Co/A .

$Im(f) = \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n) \rangle$ siendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Al formar las **columnas de A** un **sistema generador** de $Im(f)$, $dim(Im(f)) = rg(A)$

Ejemplo 10. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $rg(A) = 2 \rightarrow dim(Im(f)) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad Im(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle \quad B_{Im(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

Observación 3. $dim(Im(f)) \leq dim(\mathbb{R}^n)$.

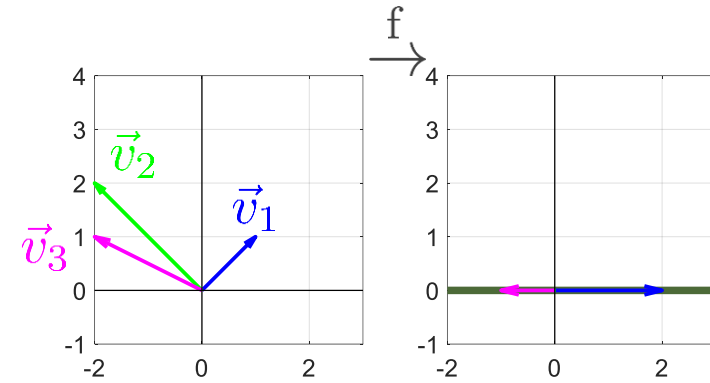
EJERCICIOS.

Ejemplo 11.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \rightarrow (x_1 + x_2, 0) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Im(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{(1, 0)\}$ es una base de $Im(f)$

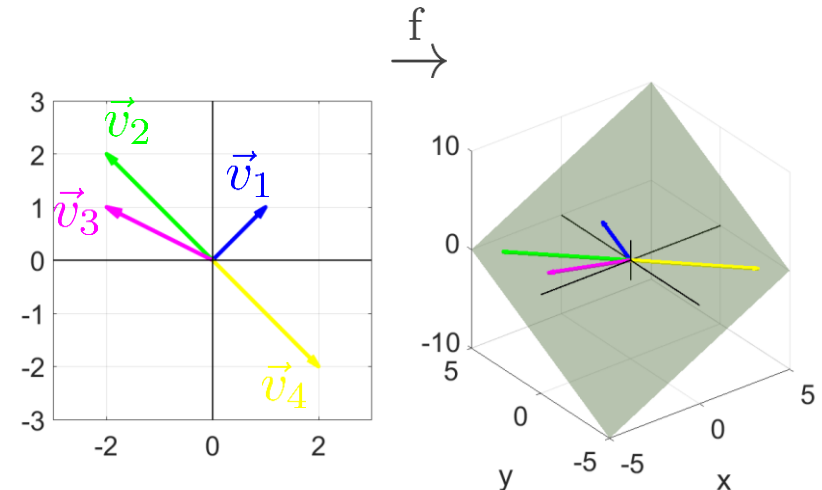


Ejemplo 12.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) \rightarrow (x_1 - x_2, 2x_2, x_1 + x_2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Im(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{(1, 0, 1), (-1, 2, 1)\}$ es una base de $Im(f)$

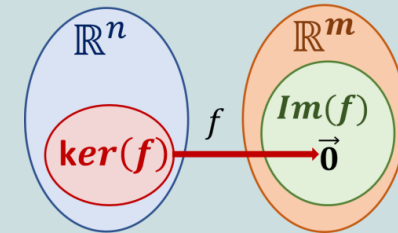


$$Im(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$$

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL.

Definición. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, llamamos **núcleo, kernel o espacio nulo** de la aplicación lineal al conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ cuya imagen es el vector nulo en $\mathbb{R}^m$.

$$\ker(f) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$



Observación 1. El núcleo de una aplicación es un subespacio vectorial del dominio;

$\ker(f) \subset \mathbb{R}^n$. Luego, $\dim(\ker(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^n)$.

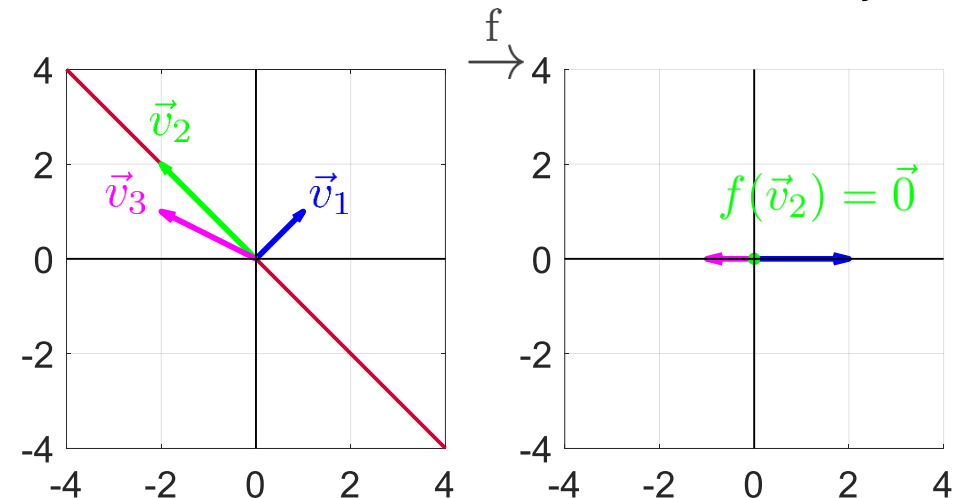
Observación 2. El núcleo es el conjunto solución de $A\vec{x} = \vec{0}$ siendo A la matriz estándar de f .

Ejemplo 13.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x_1, x_2) \rightarrow (x_1 + x_2, 0) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(f) : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } \ker(f)$$



EJERCICIOS.

Ejemplo 14. Determinar las ecuaciones implícitas del kernel de f .

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1 - x_2, 2x_2, x_1 + x_2)$$

Con matriz estándar: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

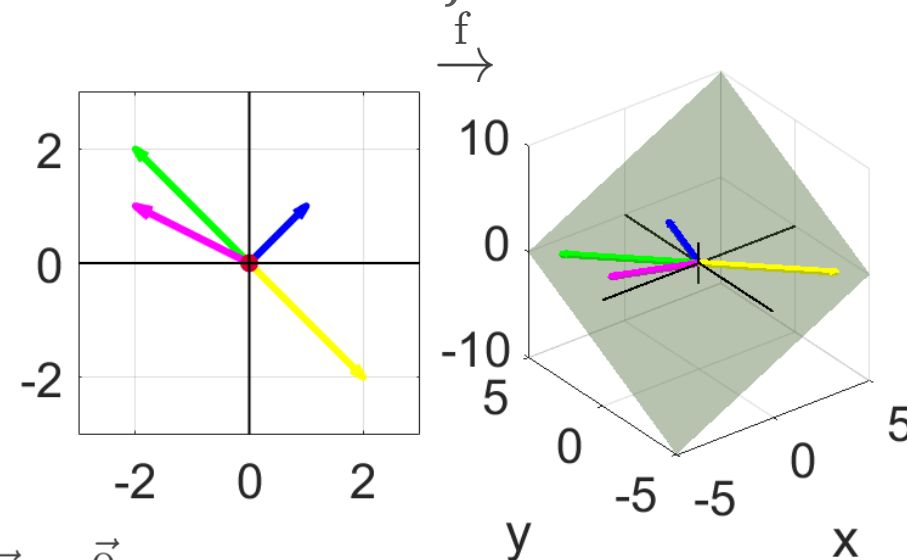
Ya habíamos determinado una base de $\text{Im}(f)$:
 $\{(1, 0, 1), (-1, 2, 1)\}$

El kernel de f es el conjunto solución del sistema $A\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

ecuaciones implícitas $\ker(f)$:

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \dim(\ker(f)) = 0$$



```
A=[1 -1; 0 2; 1 1]
null(A) %vacío-> dim(kerf)=0
%2 ecuaciones l.i.
rank(A)
%ecuaciones implícitas
coefImpkerf=rref(A)
coefImpkerf=coefImpkerf(1:2,:)
```

Ejemplo 15. Encontrar una base del kernel y de la imagen de la aplicación.

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_1 + 2x_2, 3x_4 + x_3, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Imagen de f : Sabemos que los vectores columna de A forman un sistema generador.

$$\text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \rightarrow \text{Base de Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Núcleo de f : Para hallar el kernel resolvemos $A\vec{x} = \vec{0}$.

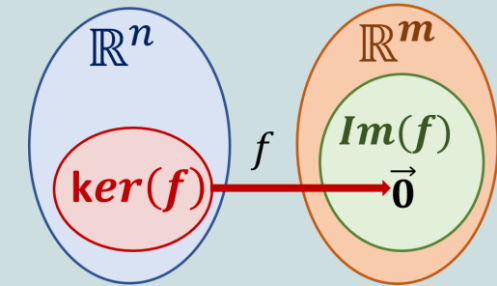
$$\ker(f) = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ -3\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Base } \ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

```
A=[1 2 0 0; 0 0 1 3; 0 0 0 0]
rref(A)%2 columnas pivotaes
baseImf=A(:,[1 3])
basekerf=null(A,'rational')
```

TEOREMA DE LA DIMENSIÓN.

Teorema. El **Teorema de la Dimensión** para aplicaciones lineales $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ establece que la dimensión del dominio es igual a la suma de la dimensión de la imagen más la dimensión del núcleo de la aplicación.

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$$



Observación. La dimensión de la imagen de la aplicación será siempre menor o igual que la dimensión del espacio de partida: $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 16.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x + 2y, z, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\underset{3}{\dim(\mathbb{R}^n)} = \underset{2}{\dim(\text{Im}(f))} + \underset{1}{\dim(\ker(f))}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} n = \dim(\mathbb{R}^n) \\ m = \dim(\mathbb{R}^m) \end{array}$$

2 columnas pivotaes
 $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(f))$

1 columna no pivotal
 $\dim(\ker(f)) = n - \text{rg}(A)$

ALGUNAS APLICACIONES LINEALES RELEVANTES.

- Identidad $f(\vec{v}) = \vec{v}$

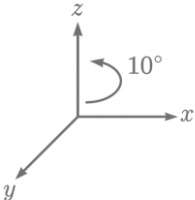
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2)$$

- Nula

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (0, 0, 0)$$

- Giros $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

giro antihorario 10 grados sobre el eje z

$$\begin{pmatrix} \cos(10) & -\sin(10) & 0 \\ \sin(10) & \cos(10) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


- Reflexiones o simetría

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, -x_3)$$

- Homotecias

$$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \rightarrow (2x_1, 2x_2)$$

- Proyecciones

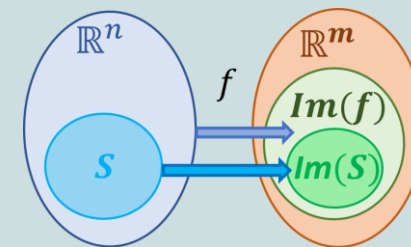
$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TRANSFORMACIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES.

Definición. La **imagen de un subespacio vectorial** S de $\mathbb{R}^n$ bajo una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, es el conjunto de las imágenes de todos los vectores pertenecientes a S .

Dado el subespacio S de $\mathbb{R}^n$: $Im(S) = \{f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in S\}$



Propiedad 1. La imagen de un subespacio S es un espacio vectorial. En concreto, $Im(S)$ es un subespacio vectorial de la imagen de la aplicación, $Im(S) \subset Im(f)$

Ejemplo 17.

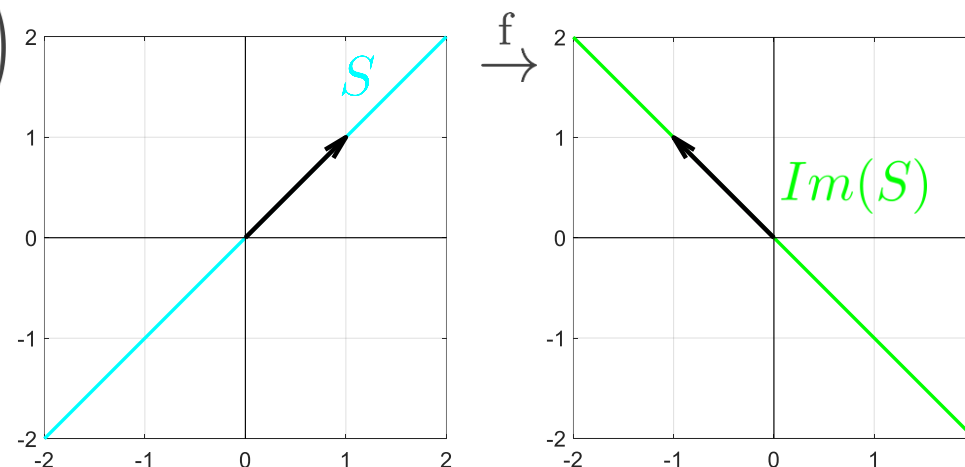
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \rightarrow (-x_2, x_1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

imagen de la aplicación:

$$Im(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$$

$$\text{imagen del subespacio } S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle:$$

$$Im(S) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$



TRANSFORMACIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES.

¿Cómo obtenemos un sistema generador de la imagen de un subespacio?

Propiedad 2. El conjunto de imágenes de los vectores del sistema generador de S es un sistema generador de la imagen de S . Es decir,

$$S = \langle \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} \rangle \rightarrow \text{Im}(S) = \langle \{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_p)\} \rangle$$

Demostración. Podemos expresar la imagen de cualquier vector $\vec{v} \in S$ como combinación lineal de las imágenes de un sistema generador de S :

$$f(\vec{v}) = f(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_p) = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \dots + \alpha_p f(\vec{v}_p)$$

Observación 1. La imagen de un base de S (conjunto l.i.) será sistema generador (base o no) de $\text{Im}(S)$. La imagen de un sistema generador no base de S (conjunto l.d.) siempre será sistema generador no base de $\text{Im}(S)$.

Observación 2. $\dim(\text{Im}(S)) \leq \dim(S)$. Por ejemplo, un subespacio de dimensión 2 se podrá transformar en un subespacio de dimensión 0, 1 o 2.

Base de S : $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \rightarrow \{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2)\}$ es sistema generador de $\text{Im}(S)$, luego $\dim(\text{Im}(S)) \leq 2$

EJEMPLOS.

Un plano podrá transformarse en otro plano, en una recta o en un punto.

Ejemplo 18.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (2x_1, 2x_2, 2x_3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Núcleo e imagen de la aplicación f :

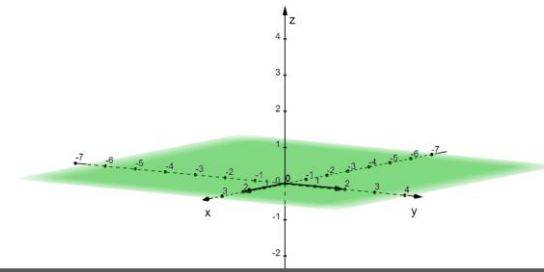
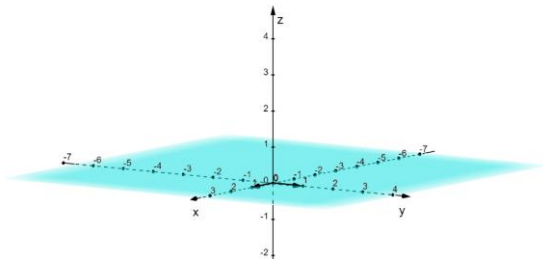
$$\text{Im}(f) = \left\langle f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$$

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

```
A=2*eye(3)
rref(A)%3 columnas pivotaes
baseImf=A
basekerf=null(A,'rational')
baseS=[1 0 0;0 1 0]'
genImS=A*baseS
rank(genImS) %l.i.
```

Transformación del subespacio S (plano a plano):

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{Im}(S) = \left\langle f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$



EJEMPLOS.

Un plano podrá transformarse en otro plano, en una recta o en un punto.

Ejemplo 19.

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (0, x_2, x_1 + 2x_3) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Núcleo e imagen de la aplicación g :

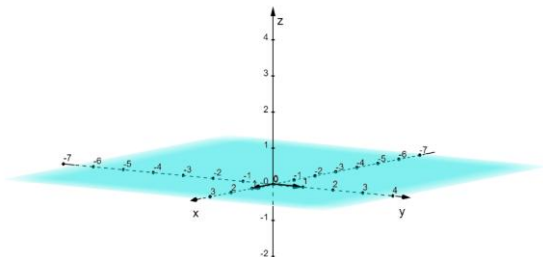
$$\text{Im}(g) = \left\langle g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$$

$$\ker(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

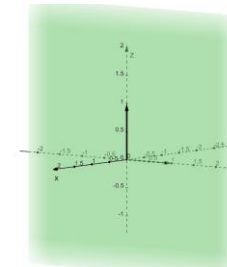
```
A=[0 0 1; 0 1 0; 1 0 2]
rref(A)%3 columnas pivotaes
baseImf=A
basekerf=null(A,'rational')
baseS=[1 0 0;0 1 0]'
genImS=A*baseS
rref(genImS)%l.i.
```

Transformación del subespacio S (plano a plano):

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{Im}(S) = \left\langle g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$



g



$$\text{Im}(S) : \{ x_1 = 0 \}$$

EJEMPLOS.

Un plano podrá transformarse en otro plano, en una recta o en un punto.

Ejemplo 20.

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_1, 0) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

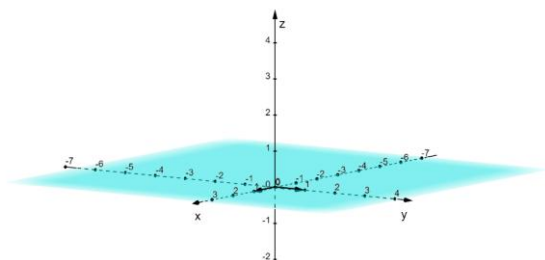
Núcleo e imagen de la aplicación h :

$$\text{Im}(h) = \left\langle h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

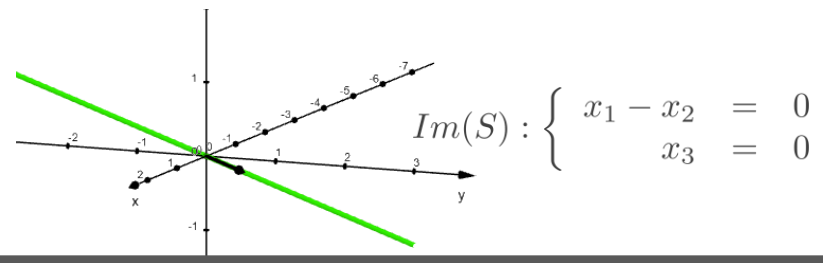
$$\ker(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \}$$

Transformación del subespacio S (plano a recta):

$$S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{Im}(S) = \left\langle h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$



h



EJEMPLOS.

Un plano podrá transformarse en otro plano, en una recta o en un punto.

Ejemplo 21.

$$t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

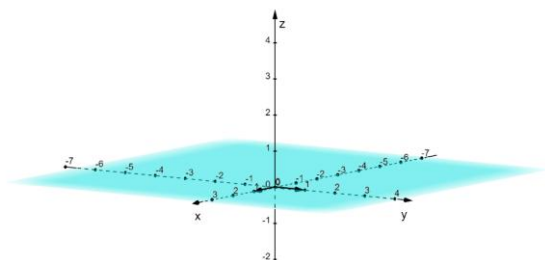
Núcleo e imagen de la aplicación t :

$$\text{Im}(t) = \left\langle t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 0\}$$

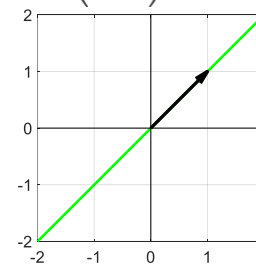
$$\ker(t) = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

Transformación del subespacio S (plano a recta):

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{Im}(S) = \left\langle t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$



t



$$\text{Im}(S) : \{ x_1 - x_2 = 0 \}$$

$\text{Im}(S) \subset \text{Im}(t)$, en este ejemplo $\text{Im}(t)$ y $\text{Im}(S)$ coinciden

EJEMPLOS.

Un plano podrá transformarse en otro plano, en una recta o en un punto.

Ejemplo 22.

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (0, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

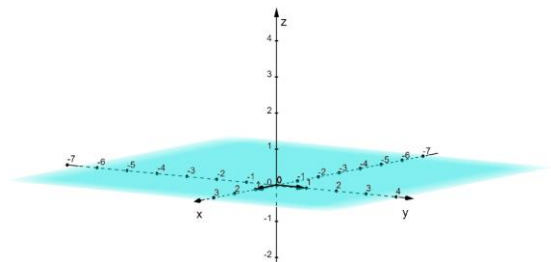
Núcleo e imagen de la aplicación p:

$$\text{Im}(p) = \left\langle p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

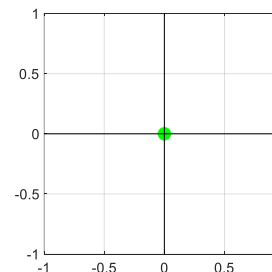
$$\ker(p) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Transformación del subespacio S (plano a punto):

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{Im}(S) = \left\langle p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



p



$$\text{Im}(S) : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

TIPOS APLICACIONES.

Definición. Una aplicación $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **inyectiva (o uno-a-uno)** si nunca mapea dos elementos diferentes del dominio al mismo elemento de la imagen. Es decir, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, f(\vec{u}) = f(\vec{v}) \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$

Observación 1. Cada vector del codominio tiene como mucho un antecedente (puede tener uno o ninguno).

Observación 2. Si f es inyectiva $\Leftrightarrow \dim(\ker(f))=0$

La inyectividad implica que el antecedente de $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ es único, por tanto el núcleo solo contiene el vector $\vec{0}$ de $\mathbb{R}^n$.

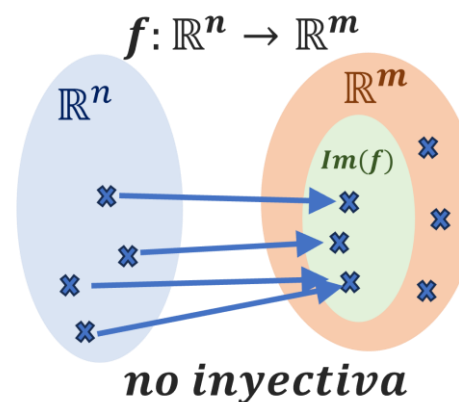
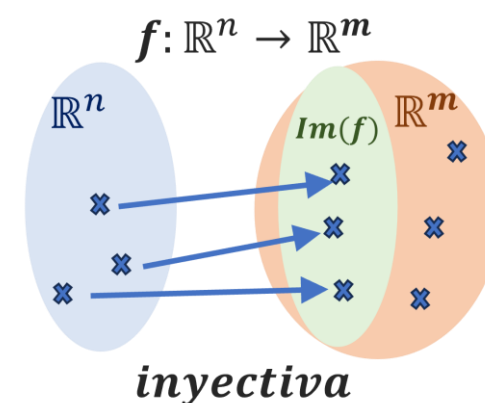
$$\ker(f) = \{\vec{0}\} \rightarrow \dim(\ker(f)) = 0$$

Observación 3. Por el teorema de la dimensión, al ser la dimensión del núcleo nula: $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\text{Im}(f))$

Ejemplo 23.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \left\{ \begin{array}{l} n = \dim(\mathbb{R}^n) \\ m = \dim(\mathbb{R}^m) \end{array} \right. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \dim(\mathbb{R}^n) \\ 3 \end{array} = \begin{array}{l} \dim(\text{Im}(f)) \\ 3 \end{array} + \begin{array}{l} \dim(\ker(f)) \\ 0 \end{array}$$

$A\vec{x} = \vec{0}$ S.C.D $\rightarrow \ker(f) = \{\vec{0}\}$
 $\text{rg}(A)$ coincide con el número de columnas de A



TIPOS APLICACIONES.

Definición. Una aplicación $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **sobreyectiva** o suprayectiva si cada elemento del codominio es la imagen de al menos un elemento del dominio.
Es decir, $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^m$, existe al menos un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\vec{u}) = \vec{y}$

Observación 1. Todos los vectores del codominio tienen al menos un antecedente.

Observación 2. La imagen de la aplicación y codominio coinciden,
 f es sobreyectiva $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}^m$,

Al coincidir ambos espacios vectoriales, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^m)$

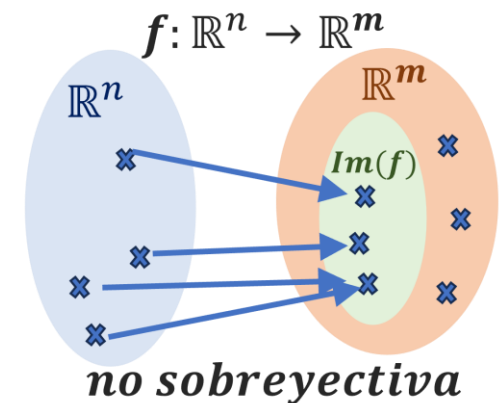
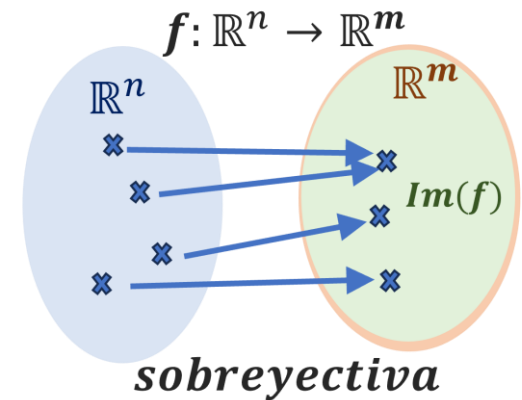
Ejemplo 24.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Para que f sea sobreyectiva $A\vec{x} = \vec{y}$ debe ser sistema compatible para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(A) \text{ coincide con el número de filas de } A$$

$$\text{rg}(A) = 2 = m = \dim(\text{Im}(f)) \rightarrow \text{sobreyectiva (no inyectiva)}$$



TIPOS APLICACIONES.

Definición. Una aplicación $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **biyectiva** si es aplicación tanto inyectiva como sobreyectiva.

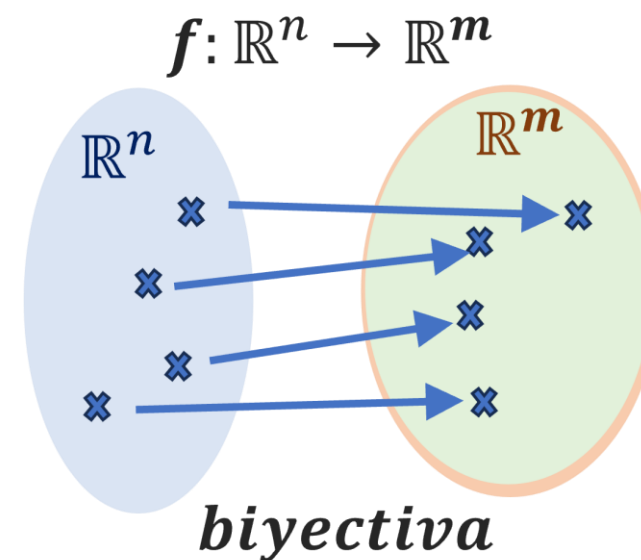
Observación 1. Todos los vectores del codominio $\mathbb{R}^m$ tienen un único antecedente.

$$A\vec{x} = \vec{y} \text{ S.C.D. para cualquier } \vec{y} \in \mathbb{R}^m$$

Ejemplo 25.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2 + x_3, 2x_3)$$

$$m = \dim(\mathbb{R}^m) \left\{ \begin{array}{c} n = \dim(\mathbb{R}^n) \\ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{n=\dim(\mathbb{R}^n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{array} \right. \text{ S.C.D.}$$



Observación 2.

Por ser inyectiva $rg(A) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$

Por ser sobreyectiva $rg(A) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$

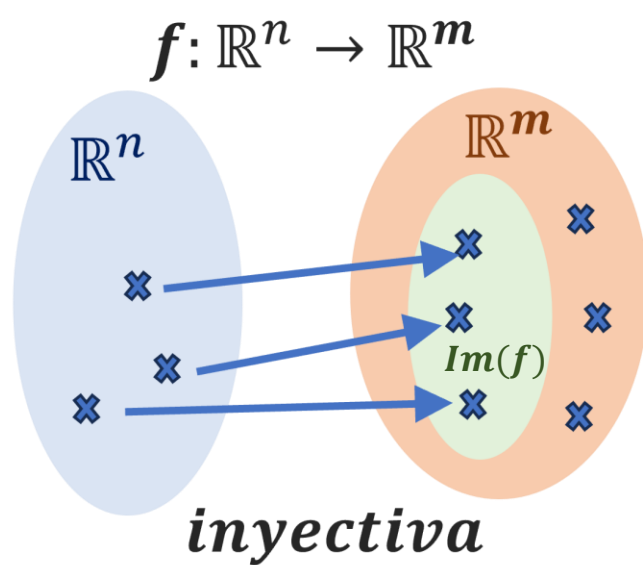
$\Leftrightarrow$

$m=n$

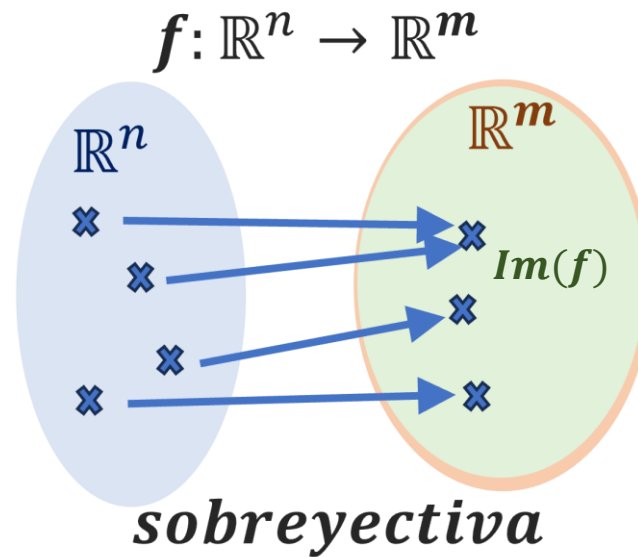
A es cuadrada e invertible

TIPOS APLICACIONES LINEALES.

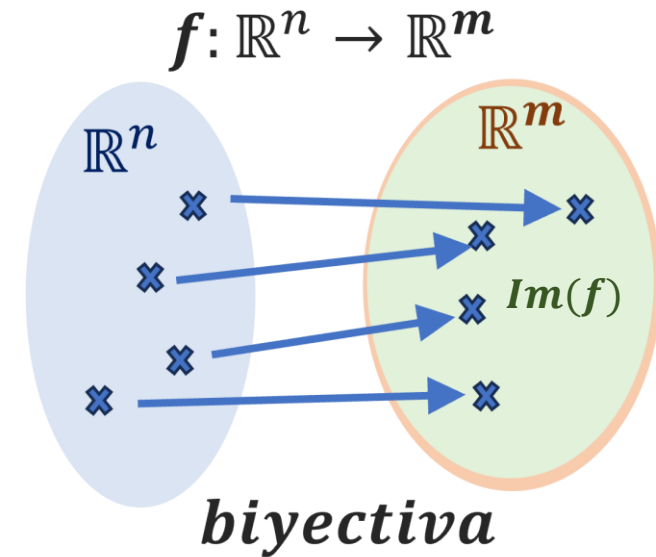
Resumen. Las aplicaciones pueden ser inyectivas o sobreyectivas (o ninguna de las dos). A las aplicaciones que son tanto inyectivas como sobreyectivas se les denomina biyectivas.



$$\dim(\ker(f)) = 0$$
$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\operatorname{Im}(f))$$
$$n = \operatorname{rg}(A)$$



$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^m)$$
$$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^m$$
$$m = \operatorname{rg}(A)$$



inyectiva + sobreyectiva

$$m = n = \operatorname{rg}(A)$$

A invertible

Ejemplo 26. Dada una aplicación lineal f tal que las imágenes de los vectores $\vec{v}_1=(1,1)$, $\vec{v}_2=(2,1)$ son respectivamente $(3,0,0)$ y $(5,1,0)$. a) Determinar la matriz estándar de la aplicación y sus ecuaciones asociadas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1a_{11} + 1a_{12} = 3 \\ 1a_{21} + 1a_{22} = 0 \\ 1a_{31} + 1a_{32} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_{11} + 1a_{12} = 5 \\ 2a_{21} + 1a_{22} = 1 \\ 2a_{31} + 1a_{32} = 0 \end{cases}$$

```
coef=[1 1 0 0 0 0; 0 0 1 1 0 0; 0 0 0 0 1 1;
2 1 0 0 0 0; 0 0 2 1 0 0; 0 0 0 0 2 1]
b=[3 0 0 5 1 0]'
x=coef\b
A=[x(1) x(2); x(3) x(4); x(5) x(6)]
```

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow (2x_1 + x_2, x_1 - x_2, 0)$$

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

comprobación:

$$A\vec{v}_1 = f(\vec{v}_1) \quad \checkmark$$

$$A\vec{v}_2 = f(\vec{v}_2)$$

Nota: equivalentemente podemos resolver 3 sistemas de 2 ecuaciones y 2 incógnitas.

EJERCICIOS.

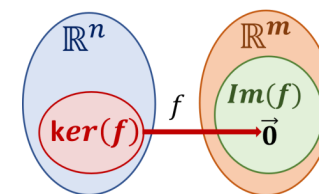
Ejemplo 26 (continuación). b) Determinar una base del núcleo e imagen de f .

c) Clasificar f . d) Hallar la imagen $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ imagen de $f : Im(f) = \langle f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kernel: resolvemos $A\vec{x} = \vec{0} \rightarrow \ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$



$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(Im(f)) + \dim(\ker(f)) \quad \checkmark$$

2 2 0

c) inyectiva, no sobreyectiva, no biyectiva

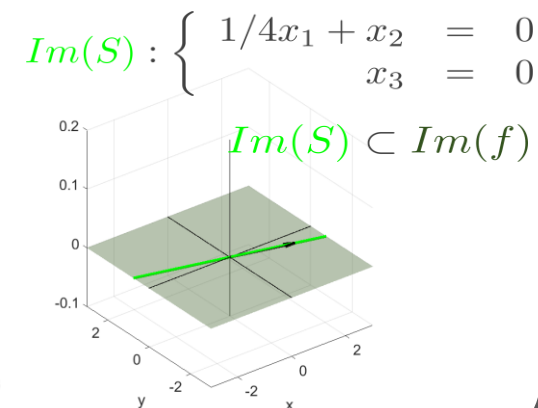
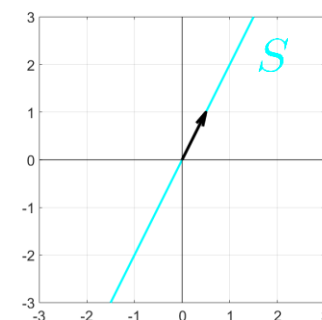
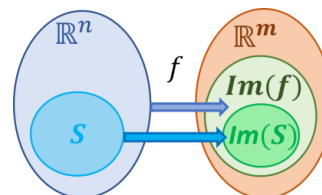
d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$

pasamos a paramétricas y obtenemos una base de S :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

obtenemos sist. generador de $Im(S)$:

$$Im(S) = \langle f\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$



COMPOSICIÓN DE APLICACIONES LINEALES.

Definición. Dadas dos aplicaciones lineales con respectivas matrices estándar A_g y A_f .

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \qquad f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Se define la **aplicación compuesta** $f \circ g$, como la aplicación que primero aplica g a $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, y luego f al vector resultante:

$$f \circ g : \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$
$$(f \circ g)(\vec{v}) = f(g(\vec{v})) = f(A_g \vec{v}) = A_f A_g \vec{v}$$

Observación. Nótese que la aplicación $f \circ g$ no tiene por qué ser igual a la aplicación $g \circ f$.

Ejemplo 27.

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_1, x_1 - x_2, x_3 + x_4)$$
$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2, x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$
$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_1 - x_2, 2x_1)$$
$$A_{f \circ g} = A_f A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = 2x_1 \end{cases}$$

COMPOSICIÓN DE APLICACIONES LINEALES.

Pregunta 1. ¿Cuál es la aplicación resultante de componer dos rotaciones antihorarias, de ángulos θ y ϕ , respectivamente?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad A_f = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad A_g = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\operatorname{sen}(\phi) \\ \operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

matriz estándar de $f \circ g$:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\operatorname{sen}(\phi) \\ \operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) & -(\cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi)) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi) & -\sin(\theta)\sin(\phi) + \cos(\theta)\cos(\phi) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} \text{ rotación antihoraria de ángulo } \theta + \phi$$

Por ejemplo, si $\theta = 30^\circ$ y $\phi = 60^\circ$, la aplicación compuesta $f \circ g$ aplica un giro antihorario primero de 60° y al vector resultante un giro de 30° :

$$A_{f \circ g} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ matriz estándar de la aplicación lineal } f \circ g$$

Pregunta 2. ¿Conmutan dos aplicaciones correspondientes a rotaciones antihorarias de ángulos θ y ϕ ? Es decir, ¿corresponden a la misma aplicación $f \circ g$ y $g \circ f$?

COMPOSICIÓN DE APLICACIONES LINEALES. APLICACIÓN INVERSA.

Pregunta 3. ¿Cuál es la aplicación compuesta resultante de aplicar primero un giro antihorario de ángulo θ , seguido de un giro horario del mismo ángulo θ ?

Ejemplo 28.

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A_g = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

giro antihorario de 45°

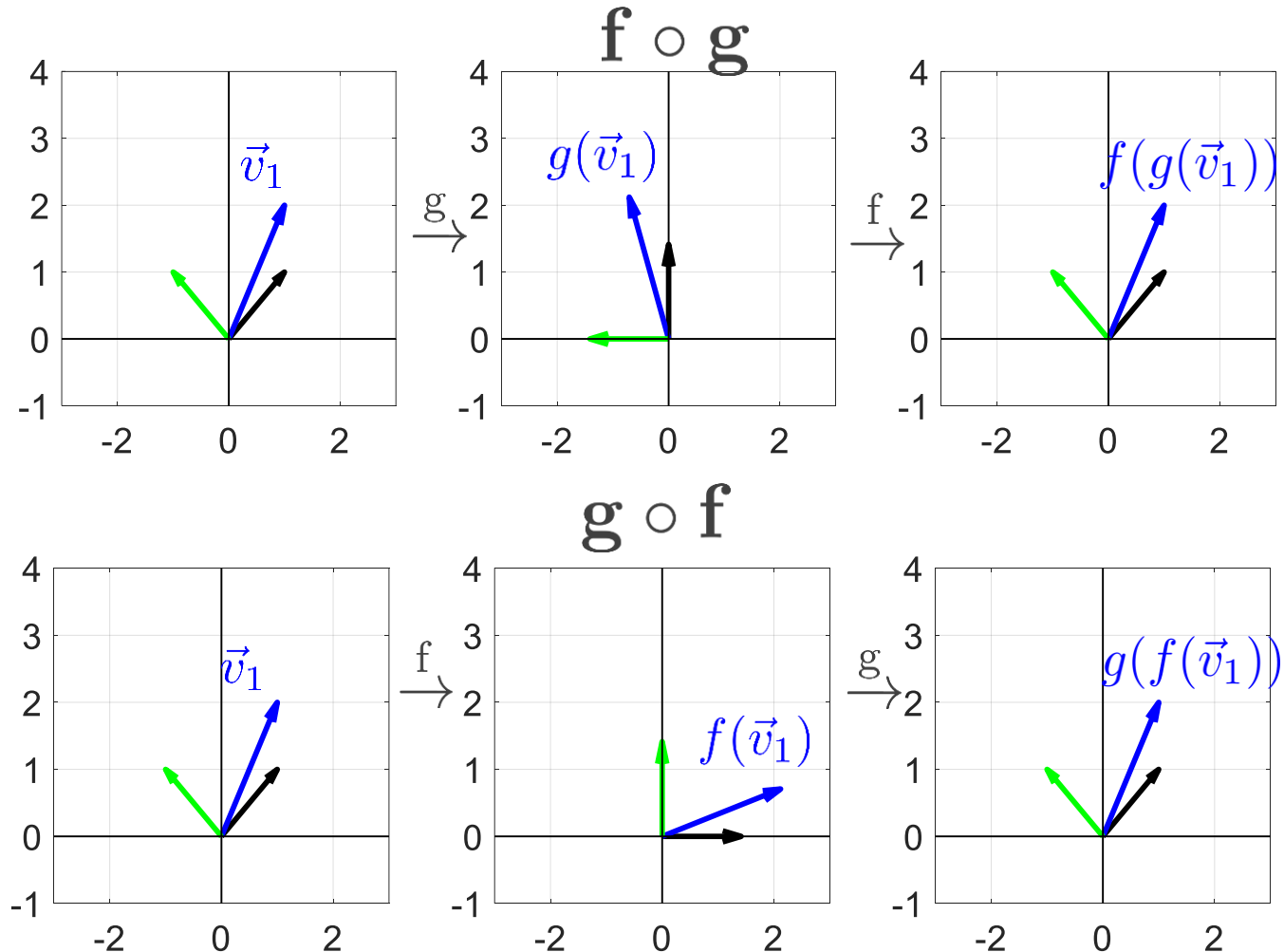
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A_f = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

giro horario de 45°

$$A_{f \circ g} = A_f A_g = I$$

$$A_{g \circ f} = A_g A_f = I$$



COMPOSICIÓN DE APLICACIONES LINEALES. APLICACIÓN INVERSA.

Una transformación lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es invertible si existe una transformación lineal $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que su composición $f \circ g$ y $g \circ f$ es la aplicación identidad. En cuyo caso, $A_f A_g = A_g A_f = I$

Ejemplo 29.

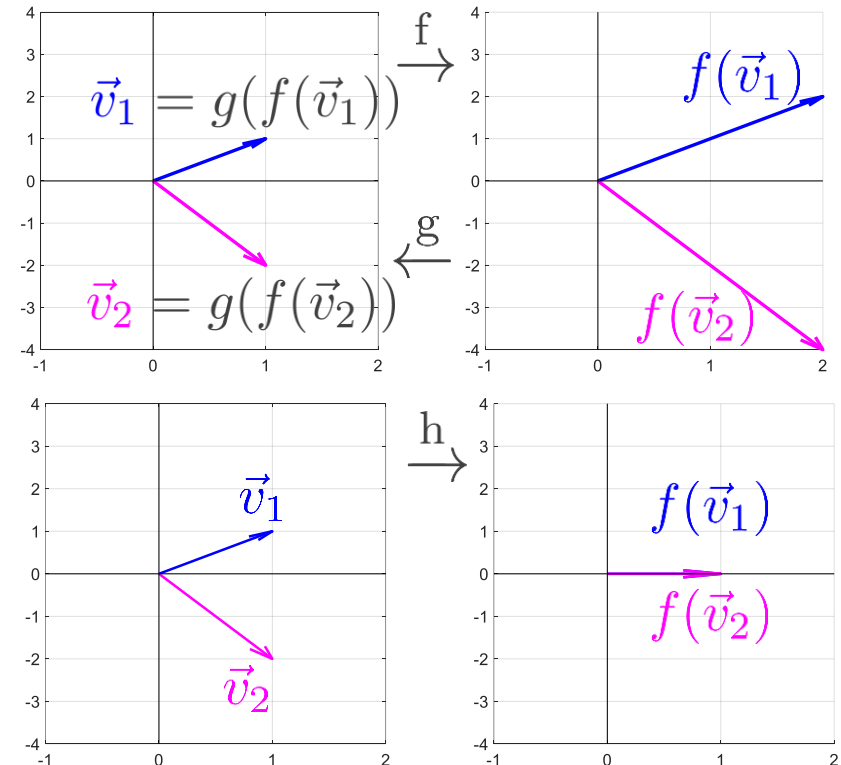
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \rightarrow (2x_1, 2x_2) \quad A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \rightarrow \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2\right) \quad A_g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 30.

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \rightarrow (x, 0) \quad A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La aplicación h no es invertible



Observación. Únicamente las transformaciones lineales biyectivas son invertibles. Recordemos que dichas aplicaciones tienen una matriz estándar asociada regular.

MATRIZ DE UNA APLICACIÓN EN BASES CUALESQUIERA.

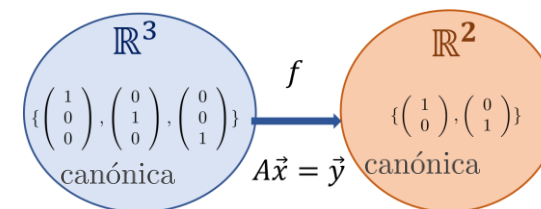
Hemos visto como cualquier aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, queda representada por su matriz estándar A . Dicha matriz permite obtener en la base canónica de $\mathbb{R}^m$ la imagen de un vector expresado en la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

A : matriz estándar de la aplicación f .

$\vec{x}$: vector del dominio expresado en la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

$\vec{y} = f(\vec{x})$: vector imagen expresado en la base canónica de $\mathbb{R}^m$.



¿Y si los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ están expresados en otras bases distintas a la canónica?

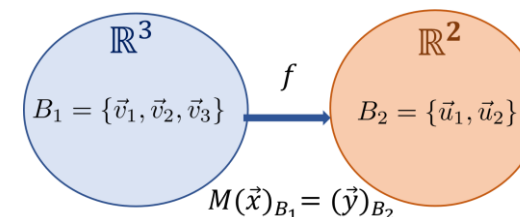
¿Cómo es la **matriz M de una aplicación en las bases B_1 y B_2** ?

$$M(\vec{x})_{B_1} = (\vec{y})_{B_2}$$

M : matriz de la aplicación f en las bases B_1 y B_2 .

$(\vec{x})_{B_1}$: vector del dominio expresado en $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$.

$(\vec{y})_{B_2}$: vector imagen expresado en $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$.



$$A\vec{x} = \vec{y} \quad \xrightarrow{\text{sustituimos}} \quad AP_{B_1}(\vec{x})_{B_1} = P_{B_2}(\vec{y})_{B_2} \quad \xrightarrow{\text{multiplicamos por } (P_{B_2})^{-1}} \quad \underbrace{(P_{B_2})^{-1} AP_{B_1}}_{M}(\vec{x})_{B_1} = (\vec{y})_{B_2}$$

$$\vec{x} = M_{B_1 \rightarrow BC}(\vec{x})_{B_1} = P_{B_1}(\vec{x})_{B_1} = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n](\vec{x})_{B_1}$$

$$\vec{y} = M_{B_2 \rightarrow BC}(\vec{y})_{B_2} = P_{B_2}(\vec{y})_{B_2} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m](\vec{y})_{B_2}$$

$$M = (P_{B_2})^{-1} AP_{B_1}$$

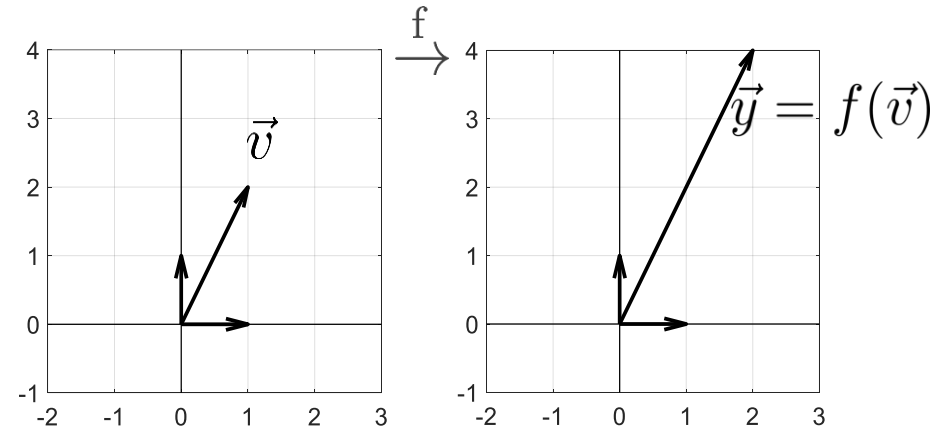
EJERCICIOS.

Ejemplo 31. a) Determinar la matriz de la transformación lineal correspondiente a una homotecia con un factor de escala 2 y aplicarla al vector $\vec{v} = (1,2)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow (2x_1, 2x_2)$$

$$f(\vec{v}) = A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

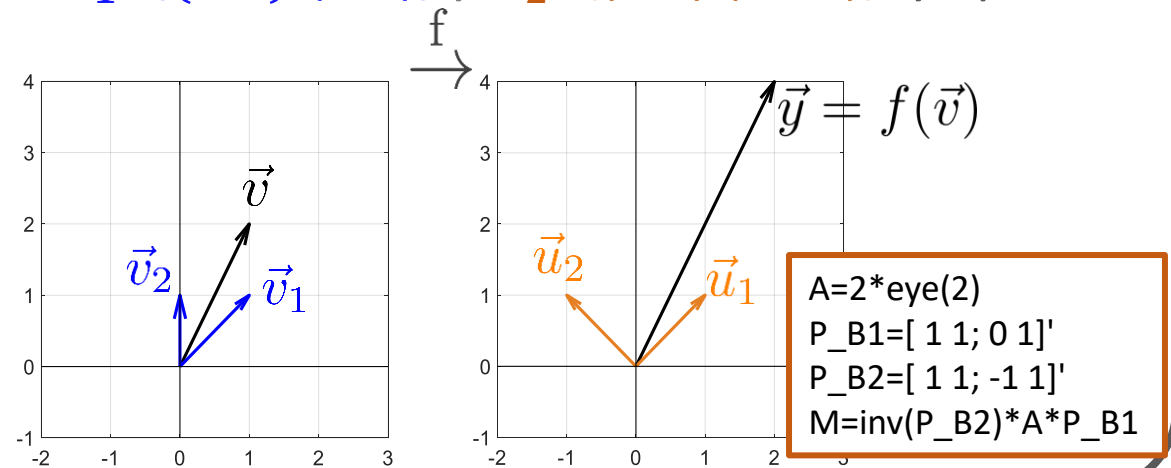


b) Hallar la matriz de la aplicación en las bases $B_1 = \{(1,1), (0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1), (-1,1)\}$, y aplicarla al vector $\vec{v} = (1,1)_{B_1}$.

$$M = P_{B_2}^{-1} A P_{B_1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{y})_{B_2} = M(\vec{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2}$$



EJERCICIOS.

Ejemplo 32. a) Determinar la matriz de la aplicación proyección ortogonal sobre la recta $y = x$ en base $B = \{(1,1), (-1,1)\}$ y aplicarla al vector $\vec{v} = (2,1) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)_B$.

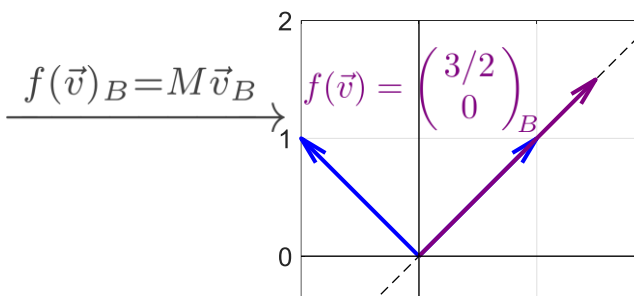
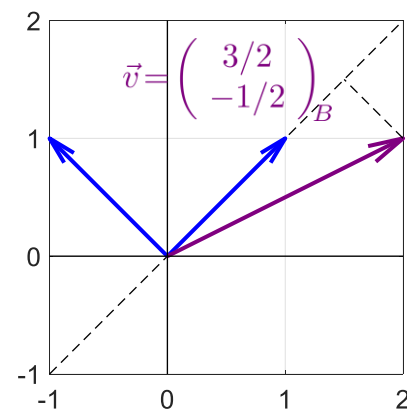
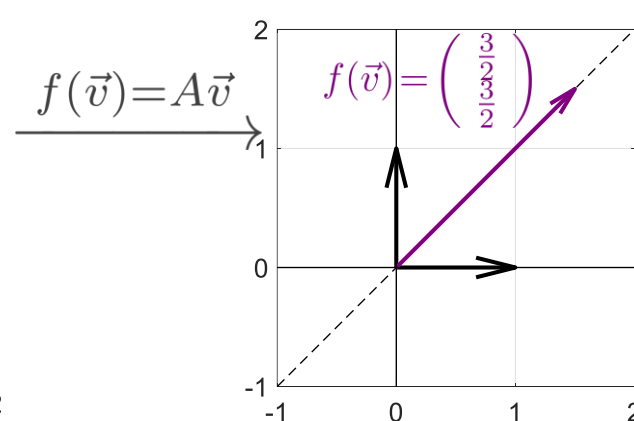
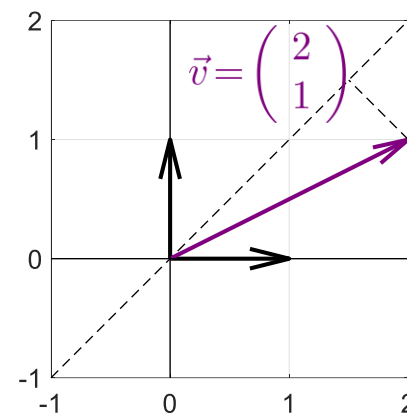
$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ matriz estándar de la proyección ortogonal sobre la recta } y = x$$

$$f(\vec{v}) = A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

matriz en la base B de la proyección ortogonal sobre la recta $y = x$

$$M = P_B^{-1} A P_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{v})_B = M(\vec{v})_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$



```
baseS=[1 1]'
A=baseS*inv(baseS'*baseS)*baseS'
P_B=[ 1 1; -1 1]'
M=inv(P_B)*A*P_B
fv_B=M*[3/2 -1/2]'
```

¡Al escoger una base apropiada la matriz de la aplicación queda más sencilla!