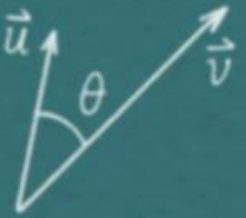


$$D = P^{-1}AP$$

$$\det(D) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

$$\text{rg}(A) = 2$$



Tema 6. Endomorfismos y Diagonalización

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\dim(S \cup T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

Sara Pérez Carabaza (sara.perezcarabaza@unican.es).

Valvanuz Fernández Quiruelas (valvanuz.fernandez@unican.es).

Dpto. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación.

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales.

Este material se publica bajo Licencia: [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



ÍNDICE

1. Matrices
2. Sistemas lineales de ecuaciones
3. Espacios vectoriales
4. Espacio vectorial euclídeo
5. Aplicaciones lineales.

6. Diagonalización.



- [Introducción autovalores y autovectores de endomorfismos.](#)
- [Cálculo de autovalores y autovectores.](#)
- [Subespacios propios. Multiplicidad algebraica y geométrica. Independencia de vectores propios.](#)
- [Ejemplos en \$\mathbb{R}^2\$. Ejemplos en \$\mathbb{R}^3\$.](#)
- [Matrices semejantes.](#)
- [Matrices diagonalizables y diagonalización.](#)
- [Cálculo de potencias de una matriz.](#)

Guía de colores

Texto = ejemplo/ejercicio

Texto = error común

Texto = hipervínculo

Texto /  = memorizar

 = definición/teorema

 = recordatorio

Texto /  = código MATLAB

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UN ENDOMORFISMO.

Definición. Un **endomorfismo** es una aplicación lineal (u homomorfismo) con el mismo dominio y codominio: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Observación 1. Un endomorfismo ha de ser tanto inyectivo como sobreyectivo a la vez, o bien ninguna de las dos cosas.

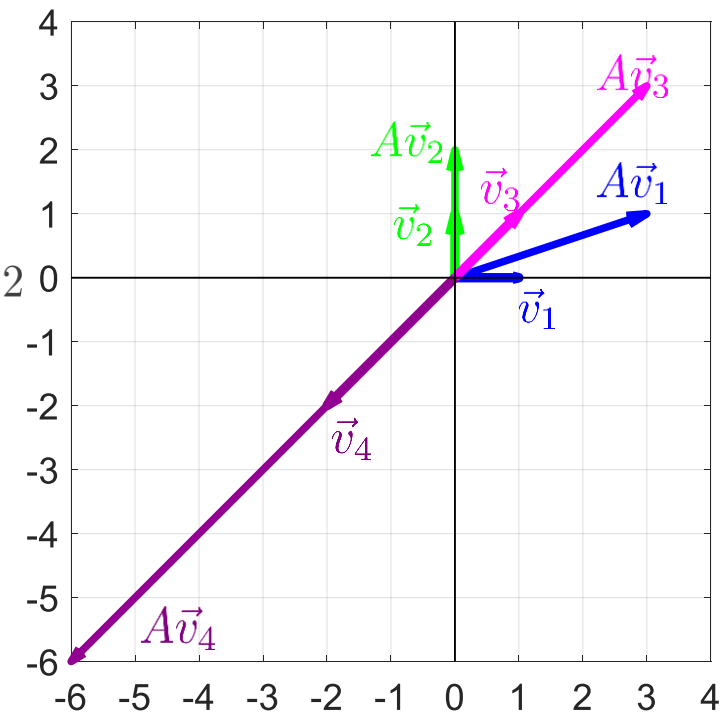
Introducción. Ejemplo 1. Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \rightarrow (3x_1, x_1 + 2x_2)$$

$$f(\vec{v}_2) = A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}_2 \text{ es autovector de } f \text{ con autovalor } 2$$

$$f(\vec{v}_3) = A\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\vec{v}_3 \rightarrow \vec{v}_3 \text{ es autovector de } f \text{ con autovalor } 3$$

$$f(\vec{v}_4) = A\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\vec{v}_4 \rightarrow \vec{v}_4 \text{ es autovector de } f \text{ con autovalor } 3$$



AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UN ENDOMORFISMO.

Definición. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **autovalor** de un endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$ si existe un vector no nulo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, tal que $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$.

Definición. Se dice que un vector no nulo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, es un **autovector** de un endomorfismo f en $\mathbb{R}^n$ asociado a un autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, si $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$.

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v} \rightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v}=\vec{0} \rightarrow A\vec{v} - \lambda I\vec{v}=\vec{0} \rightarrow (A - \lambda I)\vec{v}=\vec{0}$$

ecuación característica de A

(sistema homogéneo)

polinomio característico $p(\lambda)$

Para que tenga más soluciones además de la trivial $\rightarrow |A - \lambda I|=0$

polinomio de grado n con n raíces

(Teorema fundamental del Álgebra)

Procedimiento para hallar vectores y valores propios.

1. Hallar las n raíces del polinomio característico de la matriz A (cuadrada y de orden n), obtenido a partir de la ecuación $|A - \lambda I|=0$. Las raíces reales serán los autovalores de A .
2. Para cada valor propio λ_i , resolver el sistema compatible indeterminado $(A - \lambda_i I)\vec{v}=\vec{0}$. Los vectores solución no nulos serán los autovectores de λ_i .

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UN ENDOMORFISMO.

Ejemplo 1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x_1, x_2) \rightarrow (3x_1, x_1 + 2x_2)$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

paso 1: Hallamos los autovalores resolviendo el polinomio característico de A .

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 2, \lambda = 3$$

paso 2: Hallamos los autovectores asociados a cada autovalor resolviendo el SCI de $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

hallamos los autovectores de $\lambda = 2$ resolviendo $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$:

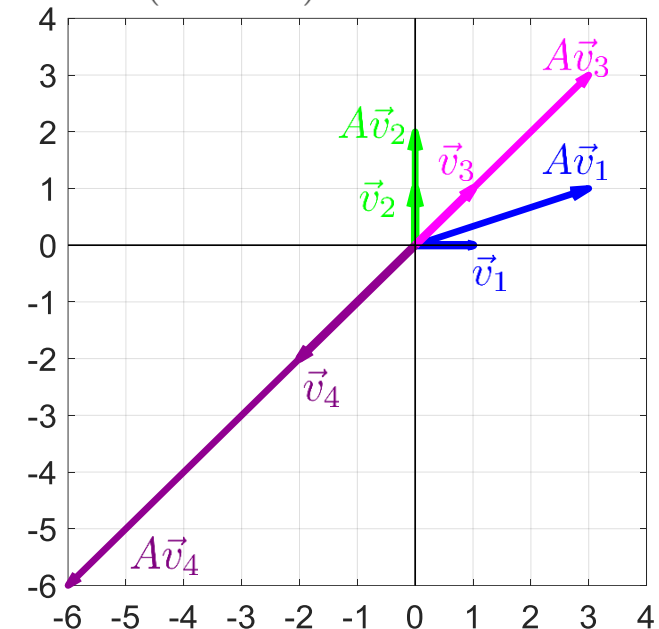
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

los autovectores asociados a $\lambda = 2$ son vectores de $\mathbb{R}^2$ con $x_1 = 0$,
excluyendo el vector nulo

hallamos los autovectores de $\lambda = 3$ resolviendo de $(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

los autovectores asociados a $\lambda = 3$ son vectores de $\mathbb{R}^2$ con $x_1 = x_2$,
excluyendo el vector nulo



AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UN ENDOMORFISMO.

Ejercicio 1. Determina los autovalores y autovectores de las siguientes aplicaciones en $\mathbb{R}^2$ e intenta comprender geoméricamente los resultados obtenidos.

a) Aplicación identidad b) Giro de 90° en sentido antihorario.

Nota: al limitarnos al estudio de endomorfismo reales las raíces complejas del polinomio característico no se consideran autovalores.

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UN ENDOMORFISMO.

Definición. El **subespacio propio** correspondiente a un autovalor λ de una matriz A , denotado V_λ , es el conjunto de todos los vectores $\vec{v}$ (incluyendo el vector nulo) que satisfacen la ecuación: $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$. Es decir:

$$V_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n | A\vec{v}=\lambda\vec{v}\}$$

Observación 1. V_λ está formado por el vector nulo y los autovectores asociados a λ . Nótese que $\vec{0}$ verifica la ecuación $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$, ya que $A\vec{0}=\lambda\vec{0}$ para cualquier λ .

Observación 2. V_λ es un espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$:

- La suma de dos autovectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ asociados a λ es también autovector asociado a λ :

$$A(\vec{v} + \vec{u}) = A\vec{v} + A\vec{u} = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u} = \lambda(\vec{v} + \vec{u})$$

- El producto de un autovector $\vec{v}$ asociado a λ por un escalar α es también autovector asociado a λ .

$$A(\alpha\vec{v}) = \alpha A\vec{v} = \alpha\lambda\vec{v} = \lambda(\alpha\vec{v})$$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UN ENDOMORFISMO.

Observación. Al ser los vectores propios asociados a un autovalor λ soluciones del sistema homogéneo $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$: $\dim(V_\lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda_i I)$

Ejemplo 1.

Subespacio propio asociado a $\lambda = 2$:

$$V_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | A\vec{x} = 2\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | (A - 2I)\vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}\}$$

forma paramétrica V_2 : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

forma implícita V_2 : $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0\}$

base de V_2 : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Subespacio propio asociado a $\lambda = 3$:

$$V_3 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | A\vec{x} = 3\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | (A - 3I)\vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}\}$$

forma paramétrica V_3 : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

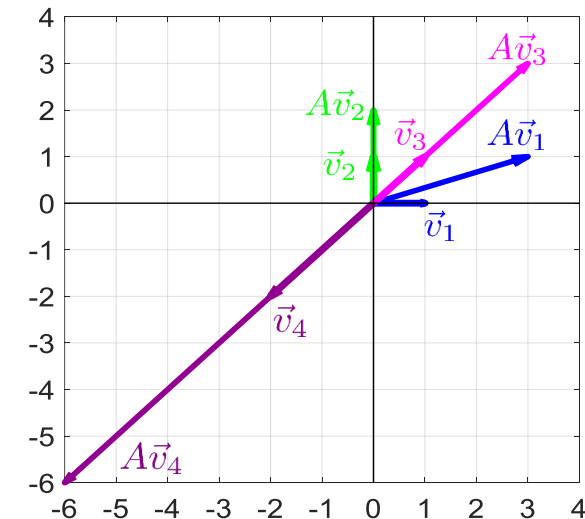
forma implícita V_3 : $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 - x_2 = 0\}$

base de V_3 : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \rightarrow (3x_1, x_1 + 2x_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 \in V_2 \\ \vec{v}_3, \vec{v}_4 \in V_3$$



AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UN ENDOMORFISMO.

multiplicidad algebraica $m(\lambda)$ de un autovalor λ es igual a su multiplicidad como raíz del polinomio característico.

multiplicidad geométrica $\dim(V_\lambda)$ de un autovalor λ es igual a la dimensión del subespacio propio asociado al autovalor λ .

$1 \leq \dim(V_\lambda) \leq m(\lambda)$ $\rightarrow$ La dimensión geométrica de un autovalor λ puede ser como mucho igual a la multiplicidad algebraica.

Ejemplo 2. $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (4x_1 + x_2, 4x_2, -x_3, -x_4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)^2(-1 - \lambda)^2 = 0$$

polinomio característico de A

multiplicidades algebraicas: $m(4) = 2$
 $m(-1) = 2$

multiplicidades geométricas: $\dim(V_4) = 1$
 $\dim(V_{-1}) = 2$

```
eig(A) %autovalores (eigenvalues)
%autovectores lambda=4
baseV4=null(A-4*eye(4),'rational')
%autovectores lambda=-1
baseVmenos1=null(A+1*eye(4),'rational')
```

INDEPENDENCIA DE LOS VECTORES PROPIOS.

Teorema. Un conjunto de autovectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ correspondientes a distintos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ es un conjunto libre.

Teorema. La suma de subespacios propios es directa: $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\vec{0}\} \forall i \neq j$

Teorema. Existe una **base de vectores propios** de un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si el polinomio característico tiene n raíces reales contando multiplicidades y la multiplicidad geométrica coincide con la algebraica. Es decir, necesitamos que se cumplan las siguientes dos condiciones:

1º: **n autovalores reales** $\Leftrightarrow$ Podemos formar una base de autovectores de $\mathbb{R}^n$
2º: **$\dim(V_{\lambda_i}) = m(\lambda_i) \forall i$** (como veremos más adelante en dicho caso A es diagonalizable)

Observación. Si la matriz de tamaño n asociada a un endomorfismo en $\mathbb{R}^n$ tiene n valores propios distintos, entonces se puede formar una base de n autovectores considerando un vector no nulo cualquiera de cada uno de los n subespacios propios.

EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^2$.

Observación. El polinomio característico de un endomorfismo en $\mathbb{R}^2$, por el Teorema fundamental del Álgebra, siempre tendrá dos raíces (contando multiplicidades). Esto da lugar a la siguiente casuística:

- dos raíces reales y distintas (ejemplo A_f),
- una raíz real doble (ejemplo A_g y A_h),
- dos raíces complejas conjugadas (ejemplo A_p).

Ejemplos de endomorfismos y sus autovalores y autovectores en $\mathbb{R}^2$.

Casos Matriz aplicación	Raíces	Autovalores	Multip. Algebr.	Subespacios propios	Multip. Geomét.	Existe base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovect.
$A_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	2 3	2 3	1 1	$V_2 = \langle (0, 1) \rangle$ $V_3 = \langle (1, 1) \rangle$	1 1	Sí
$A_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	2 doble	2	2	$V_2 = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$	2	Sí
$A_h = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	-3 doble	-3	2	$V_{-3} = \langle (1, 0) \rangle$	1	No
$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$1+i$ $1-i$					No

EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 3.

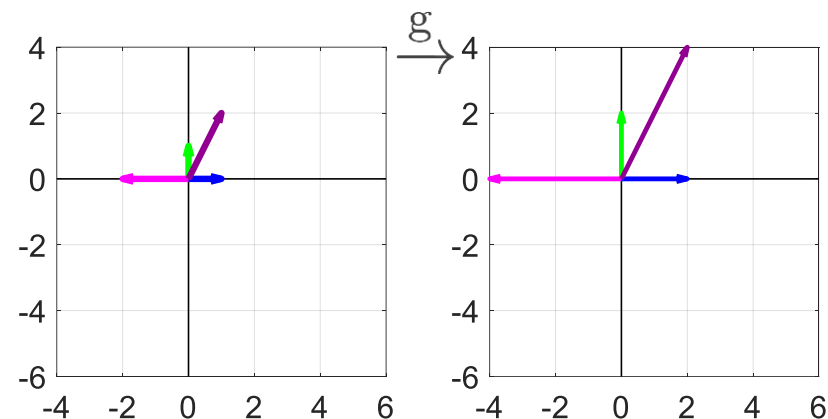
$$A_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) $\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 = 0 \rightarrow \lambda = 2$ doble

2) resolvemos $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad V_2 = \mathbb{R}^2$$



Ejemplo 4.

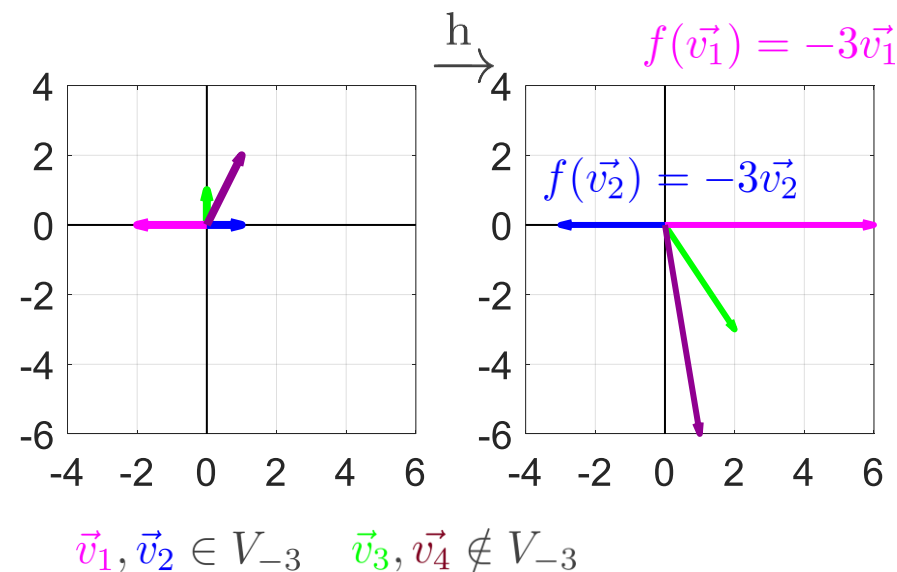
$$A_h = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1) $\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (-3 - \lambda)^2 = 0 \rightarrow \lambda = -3$ doble

2) resolvemos $(A + 3I)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\} \quad V_{-3} \subset \mathbb{R}^2$$



EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$.

Observación. El polinomio característico de un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ siempre tendrá 3 raíces. Esto da lugar a la siguiente casuística: tres raíces reales y distintas (ejemplo A_f), una raíz real doble y otra simple (ejemplo A_g y A_h), una raíz real y dos complejas conjugadas (ejemplo A_p), o una raíz real triple (ejemplo A_t).

Ejemplos de endomorfismos y sus autovalores y autovectores en $\mathbb{R}^3$.

Casos	Raíces	Autovalores	Multip. Algebr.	Subespacios propios	Multip. Geomét.	Existe base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovect.
$A_f = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	-2 0 5	-2 0 5	1 1 1	$V_{-2} = \langle (-58, -49, 14) \rangle$ $V_0 = \langle (8, 5, 0) \rangle$ $V_5 = \langle (1, 0, 0) \rangle$	1 1 1	sí
$A_g = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$	2 doble 9	2 9	2 1	$V_2 = \langle (-3, 0, 1), (1, 2, 0) \rangle$ $V_9 = \langle (1, 1, 1) \rangle$	2 1	sí
$A_h = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	-2 doble 1	-2 1	2 1	$V_{-2} = \langle (-1, 1, 0) \rangle$ $V_1 = \langle (1, -1, 1) \rangle$	1 1	no
$A_p = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	1 $1 - 2i$ $1 + 2i$	1	1	$V_1 = \langle (0, 0, 1) \rangle$	1	no
A_t	2 triple	2	3	$V_2 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$	3	sí

Pregunta. ¿Se te ocurre alguna matriz A_t con esos autovalores y autovectores?

EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$.

Observación 1. Si una aplicación tiene como autovalor $\lambda=0$, el subespacio propio V_0 coincide con el kernel del endomorfismo. si $\lambda = 0$, $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \rightarrow A\vec{x} = \vec{0}$

Observación 2. Una matriz tiene autovalor $\lambda=0$ si y sólo si A es singular.

si $\lambda = 0$ es autovalor $\Leftrightarrow |A - \lambda I| = |A - 0I| = |A| = 0 \Leftrightarrow A$ es singular

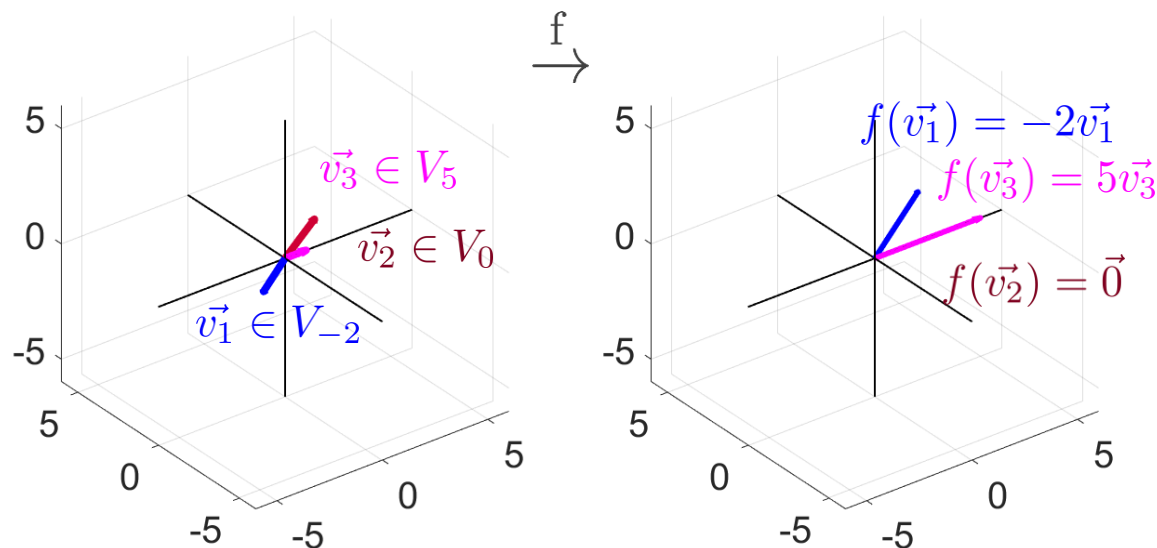
Ejemplo 5.

$$A_f = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5$$

$$V_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} -58 \\ -49 \\ 14 \end{pmatrix} \right\rangle, V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \ker(f), V_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A_f $\left\{ \begin{pmatrix} -58 \\ 49 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$



EJEMPLOS EN $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 6.

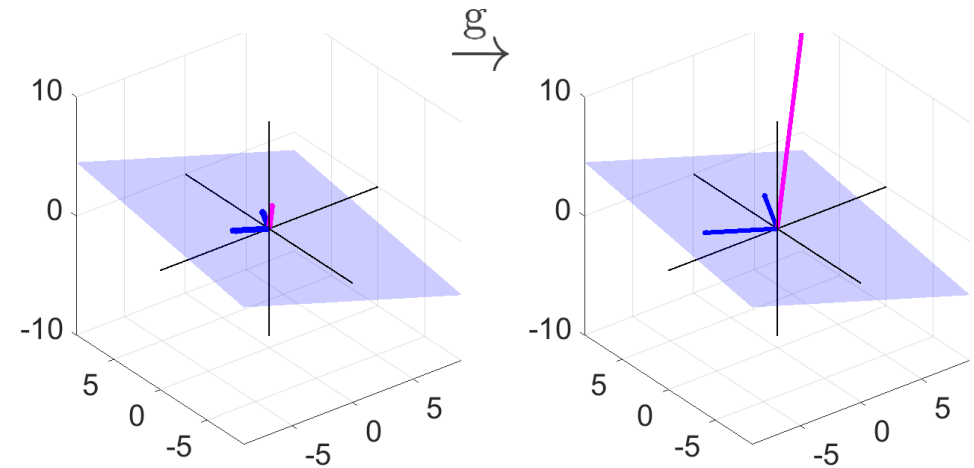
$$A_g = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 9 \quad m(2) = 2, m(9) = 1$$

$$V_2 = \langle (-3, 0, 1), (1, 2, 0) \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{3} - \frac{y}{6} + z = 0\}$$

$$V_9 = \langle (1, 1, 1) \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x; z = x\}$$

$$\langle (-3, 0, 1), (1, 2, 0), (1, 1, 1) \rangle = \mathbb{R}^3$$



Ejemplo 7.

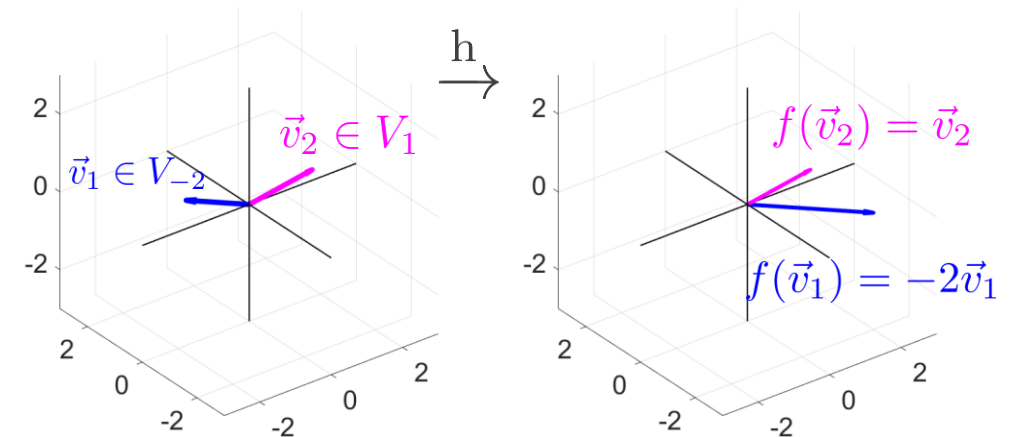
$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1 \quad m(-2) = 2, m(1) = 1$$

$$V_{-2} = \langle (-1, 1, 0) \rangle$$

$$V_1 = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

$$\langle (-1, 1, 0), (1, -1, 1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$$



PROPIEDADES.

Una matriz A y su traspuesta A^t tienen los mismos autovalores

Demostración.

$|A^t - \lambda I| = |A^t - \lambda I^t| = |(A - \lambda I)^t| = |A - \lambda I| \rightarrow A$ y A^t tienen el mismo polinomio característico

Si A es una matriz regular con autovalor λ y autovector $\vec{v}$, entonces $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1} con autovector asociado también $\vec{v}$.

Demostración. Dado A invertible ($\lambda \neq 0$)

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \rightarrow A^{-1}A\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x} \rightarrow \vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x} \rightarrow A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{x}$$

Si A es una matriz regular con autovalor λ , entonces λ^k es autovalor de A^k .

Ejercicio 2. Dado el siguiente polinomio característico de la matriz A :

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(-2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

Obtener: a) autovalores de A^t b) autovalores de A^{-1} c) autovalores de A^2

MATRICES SEMEJANTES.

Definición. Se dice que dos matrices A y B cuadradas de tamaño n son **matrices semejantes** si existe una matriz invertible P tal que cumpla la siguiente relación:

$$B = (P)^{-1}AP \Leftrightarrow A = PB (P)^{-1}$$

Observación. Una matriz M de un endomorfismo en la base B es semejante a la matriz del endomorfismo en la base estándar A , ya que $M = (P_B)^{-1}A P_B$. En general, las matrices de la misma aplicación en bases distintas son matrices semejantes.

Propiedades.

- Si A y B semejantes $\Rightarrow tr(A) = tr(B)$
- Si A y B semejantes $\Rightarrow rg(A) = rg(B)$
- Si A y B semejantes $\Rightarrow det(A) = det(B)$
- Si A y B semejantes $\Rightarrow A$ y B tienen el mismo polinomio característico, y por tanto los mismos autovalores.

Nota. No confundir semejanza entre matrices con la relación de equivalencia por filas.

MATRICES DIAGONALIZABLES.

Definición. Una matriz A es una **matriz diagonalizable** si existe una matriz invertible P tal que $D = (P)^{-1}AP$ o $A = PD(P)^{-1}$ con D una matriz diagonal.

¿Por qué nos interesan las matrices diagonales? Muchos cálculos en álgebra lineal se simplifican mucho si la matriz es diagonal.

cálculo de la imagen de un vector $\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \\ a_{33}x_3 \\ a_{44}x_4 \end{pmatrix}$$

cálculo del antecedente de un vector $\vec{y}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1/a_{11} \\ y_2/a_{22} \\ y_3/a_{33} \\ y_4/a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$\det(D) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$\text{rg}(D)$: número de elementos no nulos de la diagonal

$\lambda_i = a_{ii}$ los autovalores son los elementos de la diagonal

cálculo de potencias de una matriz cuadrada:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^k \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZACIÓN.

Teorema de diagonalización. Una matriz cuadrada de tamaño n es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios linealmente independientes, es decir, si existe una base formada por autovectores de A .

Como vimos anteriormente, podremos obtener una base de autovectores si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- existen n autovalores (raíces reales) contando multiplicidades
- $\dim(V_{\lambda_i}) = m(\lambda_i) \forall i$ (la multiplicidad geométrica es igual a la algebraica)

Método diagonalización. Diagonalizar una matriz A es encontrar una matriz semejante que sea diagonal, tal que $D = (P)^{-1}AP$ o $A = PD(P)^{-1}$:

- D : matriz diagonal con los n autovalores en su diagonal.
- P : matriz cuyas columnas son una base de autovectores de A .

Además, ha de respetarse el mismo orden al colocar los valores propios en la diagonal de D y los vectores propios en las columnas de P .

DIAGONALIZACIÓN.

Observación. No todas las matrices son diagonalizables, por lo que antes de intentar diagonalizar una matriz comprobaremos si esta es diagonalizable.

Ejemplo 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \lambda = 2, \lambda = 3$$

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } \mathbb{R}^2 \text{ la columna correspondiente a un autovector en } P \text{ debe coincidir con la columna de su autovalor correspondiente en } D$$

D es una matriz semejante a A , el mismo endomorfismo queda más sencillo expresado en la base de vectores propios

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

comprobamos que $D = P^{-1}AP$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

otra posible diagonalización:

$$\rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = [3 \ 0; 1 \ 2]$$

$$\text{eig}(A)$$

$$\text{baseV2} = \text{null}(A - 2 * \text{eye}(2), 'r')$$

$$\text{baseV3} = \text{null}(A - 3 * \text{eye}(2), 'r')$$

$$D = \text{diag}([2 \ 3])$$

$$P = [\text{baseV2} \ \text{baseV3}]$$

DIAGONALIZACIÓN. EJEMPLOS.

Ejemplo 8. Diagonalización de la matriz A .

1) hallamos sus autovalores y comprobamos que sea diagonalizable.

$$\begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) \rightarrow \lambda = 1, \lambda = 0$$

A es diagonalizable ✓

2)

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \langle (1, 1) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_0 = \langle (-1, 1) \rangle$$

$B = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ base de autovectores

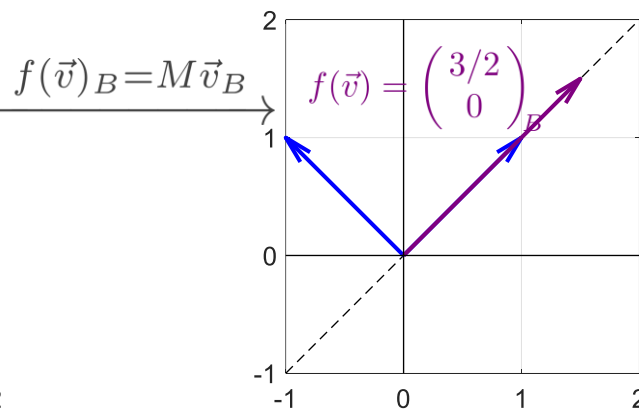
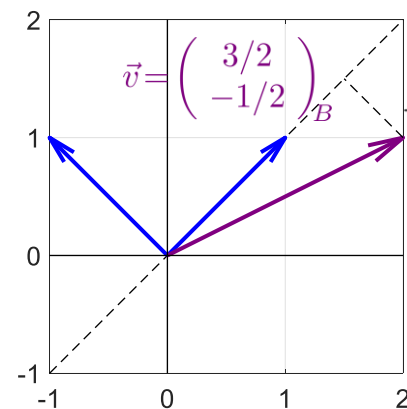
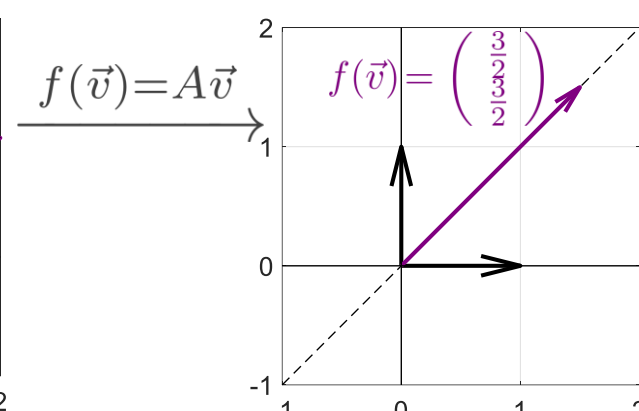
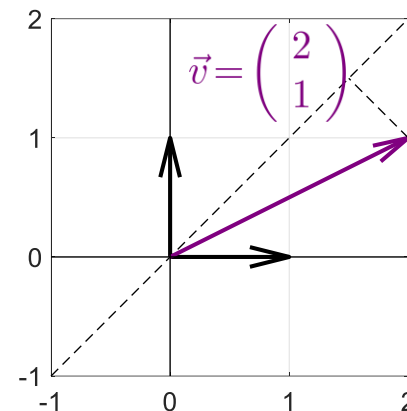
3) construimos las matrices D y P :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

comprobamos:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \checkmark$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$



APLICACIÓN. CÁLCULO DE LAS POTENCIAS DE UNA MATRIZ.

Cálculo de potencias. Si A es una matriz diagonalizable, el cálculo de se simplifica notablemente, ya que $A = PD(P)^{-1}$. Por tanto:

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ veces}} = \underbrace{PDP^{-1} \cdots PDP^{-1}}_{k \text{ veces}} = P \underbrace{D \cdots D}_{k \text{ veces}} P^{-1} = PD^k P^{-1}$$

Ejemplo 9. Cálculo de la novena potencia de la matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^9 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^9 & 0 \\ 0 & 3^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$