

G414: Álgebra y Geometría

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Universidad de Cantabria

Tema 3: Espacios vectoriales

Nota: Estos ejercicios están pensados para realizar a mano. Es muy recomendable resolverlos, además de a mano, con la ayuda de MATLAB. Se pueden resolver todos con Matlab a excepción del ejercicio 1.

- 1) En el espacio vectorial $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ (matrices 2×2 con términos reales),
 - a) ¿forman un subespacio las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & c \end{pmatrix}$?
 - b) ¿y las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b^2 \\ b & c \end{pmatrix}$?
- 2) Dadas las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B_1 = \{(1, 1), (-1, 0)\}$, $B_2 = \{(2, 1), (-1, 1)\}$ y la base canónica de $\mathbb{R}^2$ $BC = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Obtener:
 - a) Obtener las coordenadas del vector $(2, 3)$ expresado en la base canónica en la base B_1
 - b) Obtener las coordenadas del vector $(5, -5)_{B_1}$ en la base canónica.
 - c) Obtener las coordenadas del vector $(1, 1)_{B_1}$ en la base B_2 .
 - d) Obtener las coordenadas del vector $(4, 1)_{B_2}$ en la base B_1 .
- 3) Dadas las bases $B \equiv \{(1, 0), (0, 1)\}$ (canónica) y $B' \equiv \{(0, -1), (1, 2)\}$ hallar:
 - a) la matriz de cambio de base de B' a B .
 - b) la matriz de cambio de base de B a B' .
 - c) las coordenadas del vector $v = (-3, -8)$ en la base B' .
- 4) Dadas las bases $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ y $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{(1, 1, 0), (2, -1, 0)\}$ del subespacio S de $\mathbb{R}^3$ hallar:
 - a) la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 .
 - b) la matriz de cambio de base de B_2 a B_1 .
 - c) Obtén las coordenadas vector $\vec{w} = (3, 2)_{B_1}$ en la base B_2 .
- 5) Dado el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^4$ en implícitas, $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0; y - 2z - t = 0\}$ hallar una base y determinar la dimensión del subespacio.

```
coefImpS=[1 1 1 1; 0 1 -2 -1];  
null(coefImpS,'rational')
```
- 6)
 - a) Determinar si $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.
 - b) Determinar si $(1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ forman una base del subespacio $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\}$.
 - c) Determinar si $(1, 0, 1)$, $(-1, 0, 2)$ forman una base del subespacio $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\}$
- 7) Determina las ecuaciones implícitas del siguiente subespacio $S = \{(\alpha - \beta, \alpha, 3\beta, 2\alpha) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Para ello obtén primero una base de S . ¿Cuántas ecuaciones implícitas tendrá S ? Una vez obtengas las ecuaciones implícitas recuerda comprobar que los vectores de la base de S verifican dichas ecuaciones.
- 8) Determina si las soluciones de los siguientes dos sistemas lineales homogéneos forman el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$. En caso afirmativo, proporciona una base para ese subespacio. Si definen subespacios diferentes, proporciona una base para cada uno.
$$I: \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 &= 0 \end{cases} \quad II: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 + x_5 &= 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 &= 0 \end{cases}$$
- 9) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - z - t = 0, 2x + 2y - z - t = 0\}$ y $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - y = 0, z - t = 0\}$, calcular:
 - a) las ecuaciones implícitas y dimensión del subespacio $S \cap T$.
 - b) una base del subespacio $S + T$.

- 10)** Determinar si los siguientes subespacios están en suma directa:
- $S = \langle (1, 2, 0, 0), (1, 0, 0, 2) \rangle$ y $T = \langle (0, 0, 2, 1), (2, 0, 0, 1) \rangle$ en $\mathbb{R}^4$.
 - $S = \langle (1, 2, 0), (1, 0, 2) \rangle$ y $T = \langle (0, 2, 1), (2, 0, 1) \rangle$ en $\mathbb{R}^3$.
- 11)** En $\mathbb{R}^4$, sean los subespacios $S = \{(\alpha + \beta, 0, \alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{(\gamma, \lambda, 0, \gamma) | \gamma, \lambda \in \mathbb{R}\}$
- Halla las ecuaciones implícitas de S y de T .
 - ¿Cuál será el subespacio $S \cap T$? Proporciona el subespacio en forma implícita y mediante una base.
 - ¿Cuál será el subespacio $S + T$? Proporciona el subespacio en forma implícita y mediante una base.
 - En caso de que S y T no estén en suma directa, encuentra un subespacio suplementario de $S + T$
- 12)** Dado el subespacio de $\mathbb{R}^5$ en forma paramétrica $S = \{(a, a + b, a + b + c, c, 2a - b) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ obtener un sistema generador del subespacio.
- 13)** En $\mathbb{R}^4$, S tiene como sistema generador $\langle (1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0) \rangle$ y T tiene como sistema generador $\langle (0, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 0) \rangle$, hallar:
- un sistema generador del subespacio $S + T$.
 - ¿ $\dim(S + T)$?
 - una base de $S + T$.
- 14)** En $\mathbb{R}^4$, sean los subespacios $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = z, y = t\}$ y $T = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$
- Halla las ecuaciones implícitas del subespacio T .
 - Encuentra una base del subespacio $S + T$. ¿Cuál es su dimensión?
 - Halla las ecuaciones implícitas de $S \cap T$ y determina una base. ¿Cuál es su dimensión?
 - ¿Están S y T en suma directa?
 - Verifica que la fórmula de Grassmann se cumple para este ejercicio.