

G414: Álgebra y Geometría

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Universidad de Cantabria

Tema 4: Espacio Vectorial Euclídeo

Nota: Estos ejercicios están pensados para realizar a mano. Es muy recomendable resolverlos, además de a mano, con la ayuda de MATLAB. Se pueden resolver todos con MATLAB a excepción del ejercicio 2.c) y 3.c).

- 1) Sean los vectores $\vec{u} = (1, 0, 0, 0)$ y $\vec{v} = (1, \sqrt{3}, 0, 0)$ en $\mathbb{R}^4$.
 - a) Calcula la distancia entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
 - b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, proporciona la solución tanto en grados como en radianes.
 - c) Calcula $\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u})$, es decir, el vector proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, y la norma de dicho vector.
- 2) Comprobar si los siguientes vectores son ortogonales:
 - a) $(1, 0, 0, 3, 4)$ y $(1, 2, 3, 1, -1)$ en $\mathbb{R}^5$ con el producto escalar usual.
 - b) $(3, 3, 1)$ y $(-1, 1, -1)$ en $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar $(a, b, c) \cdot (a', b', c') = aa' + 2bb' + 3cc'$.
- 3) Normalizar el vector $\vec{v} = (2, 1, 3, -2)$ en $\mathbb{R}^4$:
 - a) con el producto escalar usual.
 - b) con el producto escalar $(a, b, c, d) \cdot (a', b', c', d') = aa' + bb' + 2cc' + 2dd'$
- 4) Sea la base ortogonal $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, y sea el vector $\vec{v} = (2, 1, 3)$.
 - a) Comprueba que $\mathcal{B}$ es una base ortogonal y calcula las coordenadas del vector $\vec{v}$ en dicha base.
 - b) Calcula las proyecciones ortogonales de $\vec{v}$ sobre cada uno de los vectores de la base y comprueba que su suma es igual a $\vec{v}$.
- 5) Comprobar si S y T son subespacios ortogonales en $\mathbb{R}^4$, siendo $\{(-3, -3, 0, 1), (1, 0, 2, 0)\}$ base de S y $\{(0, 1, 0, 3), (1, 1, -1, 6)\}$ base de T .
- 6) Dado el vector $\vec{v} = (0, 3, 2)$, hallar su proyección ortogonal sobre los siguientes subespacios.
 - a) sobre la recta generada por el vector $(1, 2, 1)$.
 - b) sobre el plano P generado con base $B_P = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \{(1, 2, 1), (0, -1, 2)\}$.
- 7) Hallar una base ortonormal del plano S generado por $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$ y $\vec{v}_2 = (3, 2, 1)$ en $\mathbb{R}^3$ y la proyección del vector $\vec{w} = (1, 1, 0)$ sobre S .
- 8) Hallar una base del complemento ortogonal de los siguientes subespacios $\mathbb{R}^3$. Determina además qué lugar geométrico representan dichos complementos ortogonales.
 - a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0, x + y + z = 0\}$
 - b) S con sistema generador $\{(1, 0, 2)\}$.
 - c) T con sistema generador $\{(1, 0, 2), (1, 1, 1)\}$

Pista: para determinar fácilmente la dimensión recordar que un subespacio y su complemento ortogonal son subespacios complementarios.

- 9) Dado el subespacio $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = 0, -x + t = 0\}$ con sistema generador $\{(1, 1, -1, 1), (0, 2, 0, 2)\}$ en $\mathbb{R}^4$:
 - a) Halla una base ortogonal de S y proyecta el vector $\vec{v} = (0, 0, 0, 5)$ sobre S .
 - b) Calcular la proyección sobre S utilizando su matriz de proyección. Comprueba que obtienes el mismo resultado. ¿Cuál será el rango de P_S ?

Pista: si los vectores columna de A son ortonormales $A'A = I$ y se simplifican los cálculos a mano.

Importante: recuerda siempre comprobar que $\text{proy}_S(\vec{v}) \in S$. Además, P_S debe ser simétrica.

- 10) Dado el siguiente sistema, a) comprobar que es incompatible, b) obtener solución aproximada por mínimos cuadrados y c) hallar el error cuadrático.

$$\begin{cases} 2x + y &= 2 \\ x + y &= 3 \\ x + y &= 0 \end{cases}$$