

G414: Álgebra y Geometría*Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales*

Universidad de Cantabria

Tema 5: Aplicaciones lineales

Nota: Estos ejercicios están pensados para realizar a mano. Es muy recomendable resolverlos, además de a mano, con la ayuda de MATLAB. Se pueden resolver todos con MATLAB a excepción del ejercicio 1.

1) Determina si las siguientes aplicaciones son aplicaciones lineales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \rightsquigarrow (x + 1, y + 1, x + 1)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \rightsquigarrow (y, x)$

2) Dada la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z, t) \rightsquigarrow (x + 2y + t, y + 3z - t, 0)$$

a) Obtén una base de $\ker(f)$

b) Obtén una base de $\text{Im}(f)$

c) Obtén una base de la imagen de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

■ $S = \langle (1, 0, 1, 0), (2, 3, 0, -1) \rangle$

■ $T = \langle (0, 0, 3, 2), (4, 6, 3, -1), (1, 0, 0, 2) \rangle$

3) a) Dada la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(x, y, z) \rightsquigarrow (x + y + z, z, y, x)$$

halla todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea $(4, 1, 3, 0)$

b) Dada la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \rightsquigarrow (x + y, y - z)$$

halla todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea $(1, 1)$

4) Clasifica las siguientes aplicaciones:

a) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z, t) \rightsquigarrow (x - z, y - t)$

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \rightsquigarrow (-x - y, 2x + 2y, z)$

c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \rightsquigarrow (3x + y, 3y + z, 3z)$

5) Halla una base de la imagen del subespacio S de $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación implícita $z = 2y$, mediante la aplicación lineal cuya matriz estándar es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Determina las matrices estándar asociadas a las siguientes aplicaciones lineales:

a) Determina la matriz de la aplicación lineal f tal que $f(1, 0) = (1, 0, 0)$ y $f(0, 1) = (0, -1, 0)$

b) Determina la matriz de la aplicación lineal g tal que $g(1, 1) = (2, 1, 2)$ y $g(-1, 2) = (1, -4, -2)$

c) Determina la matriz de la aplicación lineal h tal que $h(1, 1, 1) = (3, -1)$, $h(-1, 0, 1) = (0, -3)$ y $h(1, 0, 2) = (3, -3)$

7) Dadas las bases $B_1 = \{(1, 4), (1, 3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B_2 = \{(2, 0, 1), (0, -1, 0), (3, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$:

a) Halla la matriz en bases B_1 y B_2 de una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, si su matriz estándar es $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- b) Halla la matriz en bases canónicas de otra aplicación $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, si su matriz en bases B_1 y B_2 es $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Utiliza MATLAB en el apartado b).

- 8) Dada la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (-x, -y, x + z)$$

Halla la matriz de f en la base $B = \{(1, 0, 2), (1, 0, -1), (0, 3, 0)\}$. Puedes utilizar MATLAB.

- 9) Dadas las aplicaciones lineales f y g

$$\begin{aligned} \blacksquare f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\rightsquigarrow (x + y + z, z, y, x) \\ \blacksquare g : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, t) &\rightsquigarrow (x - 2z, y - 2t) \end{aligned}$$

a) Halla la aplicación compuesta $h = g \circ f$

b) Calcula la imagen del vector $(1, 0, 2)$ bajo la aplicación compuesta $h = g \circ f$