

G414: Álgebra y Geometría*Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales*

Universidad de Cantabria

Tema 6: Endomorfismos y Diagonalización

1) Clasifica (sobreyectivo, inyectivo, biyectivo) los siguientes endomorfismos:

a) En $\mathbb{R}^3$, dado por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) En $\mathbb{R}^2$, dado por la ecuación $f(x, y) = (2x + 5, 4x + 10)$

c) En $\mathbb{R}^2$, la aplicación identidad (matriz identidad)

2) Halla los valores propios de los siguientes endomorfismos:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

3) Dado el endomorfismo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ determina si los siguientes vectores son o no vectores propios.

En caso afirmativo, halla su valor propio.

a) $\vec{u} = (0, 3, 0)$

b) $\vec{v} = (1, 0, -1)$

c) $\vec{w} = (2, 2, 1)$

4) Dado el siguiente endomorfismo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores y vectores propios del siguiente endomorfismo asociado a la matriz A . Indica además las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada autovalor.

b) Diagonaliza el endomorfismo (si es posible).

5) Dado el endomorfismo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Halla sus valores propios y multiplicidades algebraicas.

b) Halla sus vectores propios y multiplicidades geométricas.

c) Comprueba si es diagonalizable. En caso afirmativo, diagonalízalo

6) Dado el endomorfismo definido por $f(x, y, z) = (3x - 3z, 3y + 9z, -3z)$ en $\mathbb{R}^3$

a) Halla sus valores propios

b) Halla sus vectores propios

c) Comprueba si es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentra la matriz diagonal D y la matriz de paso P .

7) De una matriz $A_{2 \times 2}$, se sabe que es diagonalizable y que los valores propios son 0 y 3, con vectores propios respectivamente $(1, 1)$ y $(4, 1)$. ¿Cuál es esa matriz?

8) Dado el endomorfismo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow (-x, -y, x + z) \end{aligned}$$

Halla la matriz de f en la base $B = \{(1, 0, 2), (1, 0, -1), (0, 3, 0)\}$.

Nota: puedes utilizar MATLAB.