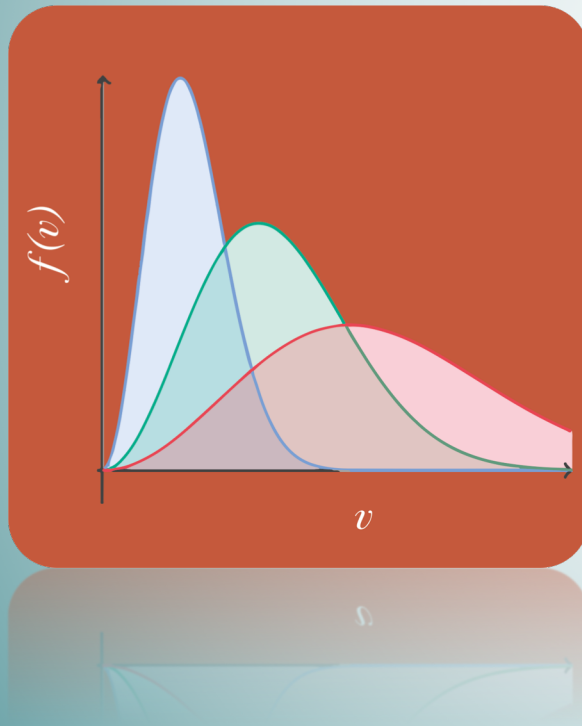


Métodos Matemáticos en la Ingeniería

BLOQUE I. ESTADÍSTICA TEMA 2. PROBABILIDAD



Vera Egorova

Sara Pérez Carabaza

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Este material se publica bajo la siguiente licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



ÍNDICE

[Teoría de la probabilidad](#)

[Operaciones y relaciones entre sucesos](#)

[Probabilidad: definición y propiedades](#)

[Asignación de probabilidad](#)

[Probabilidad condicionada](#)

[Sucesos independientes](#)

[Teorema de la probabilidad total](#)

[Teorema de Bayes](#)

[Ejercicios](#)

Objetivos

1. Saber identificar experimentos aleatorios.
2. Desarrollar la capacidad de calcular probabilidades de sucesos.
3. Saber identificar sucesos independientes e incompatibles.
4. Conocer como calcular probabilidades condicionadas.



INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD.

Antes de ver la teoría de probabilidad necesitamos distinguir los tipos de experimentos:

Experimentos aleatorios. Cualquier situación que, realizada en las mismas condiciones, proporcione un resultado imposible de predecir, conociendo de antemano cuáles son todos los posibles resultados (2 o más resultados posibles).

Experimentos deterministas. Cualquier experimento que al realizarse bajo condiciones específicas conduce siempre al mismo resultado. Lo contrario a experimento aleatorio.

La imprecisión de los resultados de los experimentos aleatorios nos lleva a plantearnos la medición de la incertidumbre ligada a estos resultados, evaluándola numéricamente gracias a la teoría de la probabilidad.

Es decir, la Teoría de la Probabilidad permite analizar los experimentos aleatorios.

Ejercicio. De los siguientes experimentos indica cuales son deterministas y cuales aleatorios.

- a) La temperatura a la que hierve el agua a presión atmosférica.
- b) Lanzar un dado y ver que número sale.
- c) Dejar caer una bola de 1 kg en el vacío desde una altura de 2 metros y medir el tiempo en segundos que tarda en llegar al suelo.



INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD.

Conceptos básicos para trabajar con probabilidades

Suceso (evento) elemental ω . Cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.



$$\omega_1 = \{ \text{1 dot} \} \quad \omega_2 = \{ \text{2 dots} \} \quad \omega_3 = \{ \text{3 dots} \} \quad \omega_4 = \{ \text{4 dots} \} \quad \omega_5 = \{ \text{5 dots} \} \quad \omega_6 = \{ \text{6 dots} \}$$



$$\omega_1 = \{ \text{"cara"} \}, \omega_2 = \{ \text{"cruz"} \}$$

Espacio muestral Ω . Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio (sucesos elementales).



$$\Omega = \{ \text{1 dot}, \text{2 dots}, \text{3 dots}, \text{4 dots}, \text{5 dots}, \text{6 dots} \}$$



$$\Omega = \{ \text{cara}, \text{cruz} \}$$

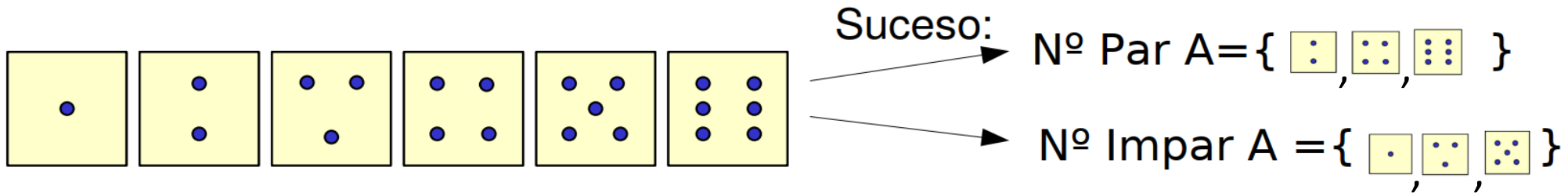


INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD.

Conceptos básicos para trabajar con probabilidades

Suceso compuesto (o simplemente suceso): subconjunto del espacio muestral.

Decimos que ocurre un suceso compuesto si y solo si ocurre alguno de sus sucesos elementales.



Entre los sucesos compuestos destacan:

- el **suceso seguro** Ω (espacio muestral como subconjunto de sí mismo)
- el **suceso imposible (vacío)** $\emptyset$, que nunca ocurre. Este suceso no puede ocurrir como resultado de un experimento aleatorio, pero sí como resultado de operaciones entre conjuntos.

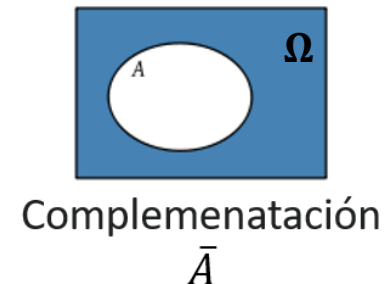
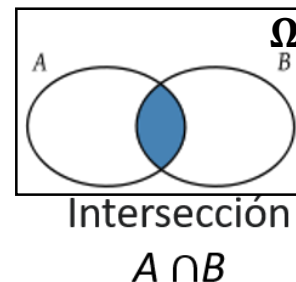
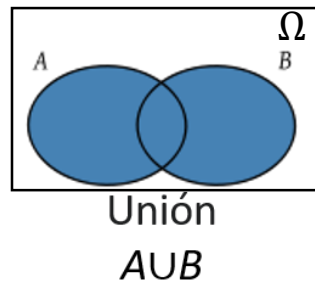
OPERACIONES ENTRE SUCESOS.

Un suceso es un subconjunto del espacio muestral. Por tanto, son aplicables las operaciones entre conjuntos (**álgebra de conjuntos**).

Unión. Dados dos sucesos A y B, el suceso $A \cup B$ está formado por todos los sucesos elementales de A y los de B.

Intersección. Dados dos sucesos A y B, el suceso $A \cap B$ está formado por los sucesos elementales que pertenecen tanto al suceso A como al suceso B.

Complementación. Dado un suceso A, el suceso complementario $\bar{A}$ o A^c está formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral que no pertenecen al suceso A.



$$\begin{aligned}\bar{A} \cup A &= \Omega \\ A \cap \bar{A} &= \emptyset\end{aligned}$$

Los **diagramas de Venn** representan el espacio muestral con un rectángulo de área 1.



INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD.

Ejercicio. En el control de calidad de una fábrica clasifican las piezas como buenas, reparables o irreparables:

- a) Define el espacio muestral y los sucesos elementales correspondientes.
- b) Define el suceso compuesto A que engloba a las piezas defectuosas y el suceso compuesto B que engloba las piezas no descartables.
- c) El operario obtiene una pieza reparable, ¿Se ha dado el suceso A? ¿Y el B?
- d) Define los eventos:
 - a) $A \cup B$
 - b) $A \cap B$
 - c) $\bar{A}$
 - d) $\bar{B}$



OPERACIONES ENTRE SUCESOS.

Las operaciones de unión e intersección de sucesos cumplen las siguientes propiedades:

Conmutativas: $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$

Asociativas: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C = A \cup B \cap C$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C = A \cap B \cup C$$

Distributivas: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes de De Morgan. Muestran como las operaciones se relacionan entre sí.

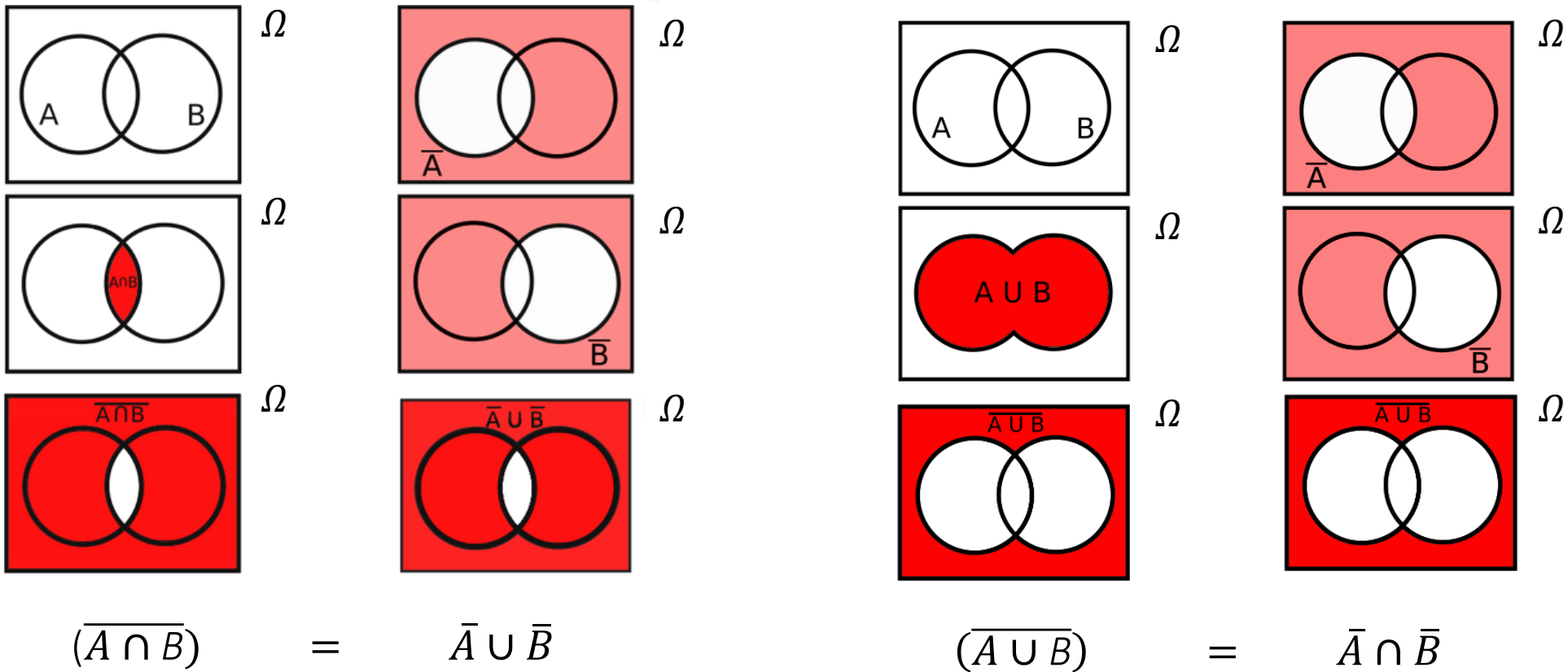
$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



OPERACIONES ENTRE SUCESOS.

Representación visual de las leyes de De Morgan.



OPERACIONES ENTRE SUCESOS.

Ejercicio. Dado el experimento aleatorio consistente en tirar un dado y ver el número que sale se consideran los siguientes sucesos. $A=\{2,3,6\}$, $B=\{1,2\}$.

a) ¿ $A \cup B$?

b) ¿ $A \cap B$?

c) ¿ $\overline{A \cup B}$?

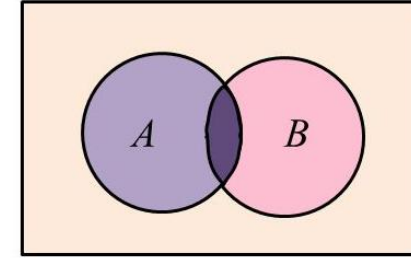
d) ¿ $\overline{A \cap B}$?



RELACIONES ENTRE SUCESOS.

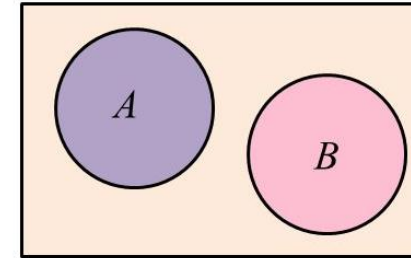
↗ **Sucesos compatibles.** Dos sucesos son compatibles si pueden ocurrir en la misma realización del experimento aleatorio.

Si $A \cap B \neq \emptyset$ A y B son compatibles



↘ **Sucesos incompatibles.** Dos sucesos son incompatibles si no pueden ocurrir en la misma realización del experimento aleatorio.

Si $A \cap B = \emptyset$ A y B son incompatibles



Ejercicio. Siguiendo con el experimento aleatorio tirar un dado $A=\{2,3,6\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{1,5\}$

- a) ¿Son A y B sucesos compatibles o incompatibles?
- b) ¿Son A y C sucesos compatibles o incompatibles?

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD.

Definición axiomática.

Dado un experimento aleatorio y su espacio muestral asociado Ω la probabilidad P es una aplicación que asocia a cada suceso un número real no negativo

$$P: f(A) \rightarrow R$$

y que verifica los siguientes axiomas de Kolmogorov.

- 1) La probabilidad del suceso seguro es la unidad. $P(\Omega) = 1$
- 2) Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ es una sucesión de sucesos incompatibles dos a dos ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) entonces la probabilidad de la unión de todos ellos es la suma de sus probabilidades.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$



PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD.

De los axiomas anteriores se deducen las siguientes propiedades:

1. La probabilidad de un suceso más la de su complementario suman 1.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \rightarrow \quad \underset{1^\circ \text{ axioma}}{P(\Omega) = 1} = \underset{2^\circ \text{ axioma}}{P(\bar{A} \cup A) = P(A) + P(\bar{A})} = 1$$

2. La probabilidad del suceso imposible es nula.

$$P(\emptyset) = 0 \quad \rightarrow \quad \underset{\text{propiedad 1}}{P(\emptyset) = 1 - P(\bar{\emptyset})} = \underset{1^\circ \text{ axioma}}{1 - P(\Omega) = 1 - 1} = 0$$

3. Si A es un suceso que incluye al suceso B ($B \subseteq A$), se tiene que $P(B) \leq P(A)$

4. La probabilidad de cualquier suceso no puede ser mayor de 1.

$$P(A) \leq 1 \quad \rightarrow \quad P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

propiedad 3 ($A \subseteq \Omega$), axioma 1

5. (**Regla de la adicción**) Si A y B son dos sucesos cualesquiera: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6. Sea A y B dos sucesos cualesquiera $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$



EJERCICIO CÁLCULO PROBABILIDADES.

Ejercicio. Sean A y B sucesos de un espacio muestral tales que:

$$P(B)=0.4, P(A \cup B)=0.7 \text{ y } P(A \cap B)=0.3$$

¿Son A y B sucesos compatibles o incompatibles?

Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(\bar{A})$

b) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

c) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$



ASIGNACIÓN DE PROBABILIDAD.

Una vez tenemos una definición y teoría de probabilidad **¿Cómo asignamos probabilidades?**. Se distinguen tres escuelas/métodos diferentes:

- **Clásica o de Laplace**. Para un número finito de resultados igualmente verosímiles (equiprobables) y mutuamente excluyentes (incompatibles). Este método es útil prácticamente solo en juegos de azar.

$$P(A) = \frac{\text{numero resultados favorables}}{\text{numero resultados posibles}}$$

- **Frecuentista**. Las probabilidades de los sucesos que pueden repetirse en condiciones idénticas se pueden estimar observando las frecuencias relativas de estos sucesos. Este método resulta útil en muchas situaciones reales ya que permite asignar probabilidades mediante la experimentación.

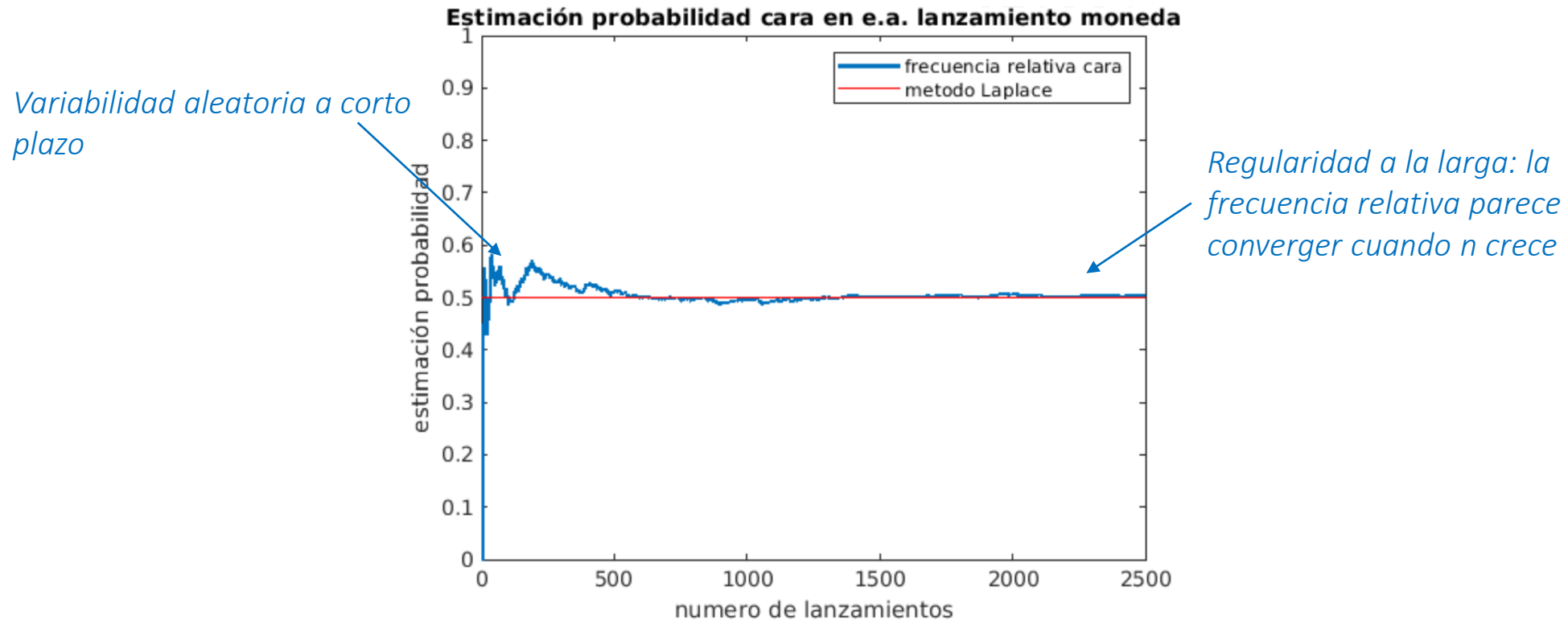
$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{veces que ocurrio } A}{\text{numero de veces que se repitio el experimento}}$$

- **Subjetiva**. Se asigna una probabilidad a un suceso en función del grado de confianza que tiene de que ocurra un determinado suceso.



ASIGNACIÓN DE PROBABILIDAD.

Ejemplo. Estimación probabilidad obtener cara en el experimento aleatorio lanzar una moneda mediante método de Laplace y el método frecuentista.



PROBABILIDAD CONDICIONADA.

La **probabilidad condicionada** surge de la necesidad de conocer como quedan las probabilidades de un suceso modificadas, por una cierta información que reduce el espacio muestral inicial.

Dado un espacio muestral y un suceso B tal que $P(B) > 0$ se define:

$$P(A|B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

"**Probabilidad del suceso A condicionada por el suceso B**"

probabilidad de que ocurra el suceso A dado que ha ocurrido el suceso B.

$A|B$ no es un suceso ya que $|$ no es una operación entre sucesos

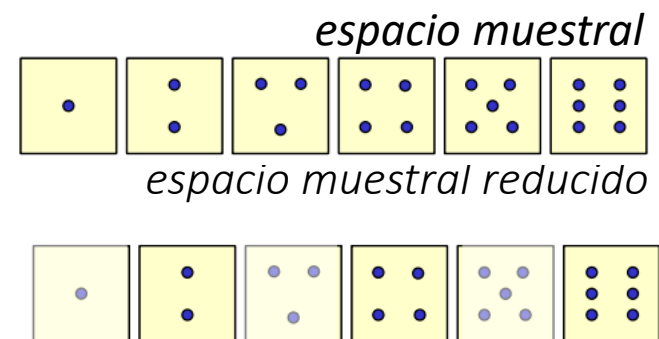
Ejemplo. Experimento aleatorio lanzamiento dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ¿Cuál es la probabilidad de que obtengamos un 2 sabiendo que ha salido un número par?

$A = \{2\}$ $B = \{2, 4, 6\}$,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{2, 4, 6\})} = \frac{1/6}{3/6} = 1/3$$

En este ejemplo, también podemos calcular $P(A|B)$ aplicando Laplace al espacio muestral reducido

$$P(A|B) = \frac{1 \text{ caso favorable}}{3 \text{ casos totales del espacio muestral reducido}} = 1/3$$



PROBABILIDAD CONDICIONADA.

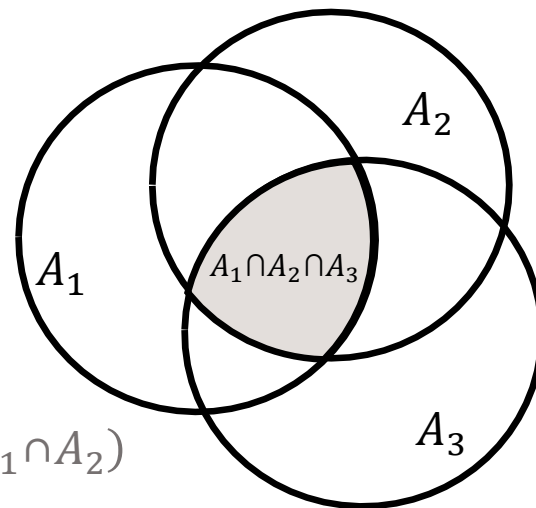
Despejando de la expresión de la probabilidad condicionada obtenemos la probabilidad de la intersección (regla del producto):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P(A \cap B) = P(A|B)P(B)}$$

regla del producto

La regla del producto se puede generalizar:

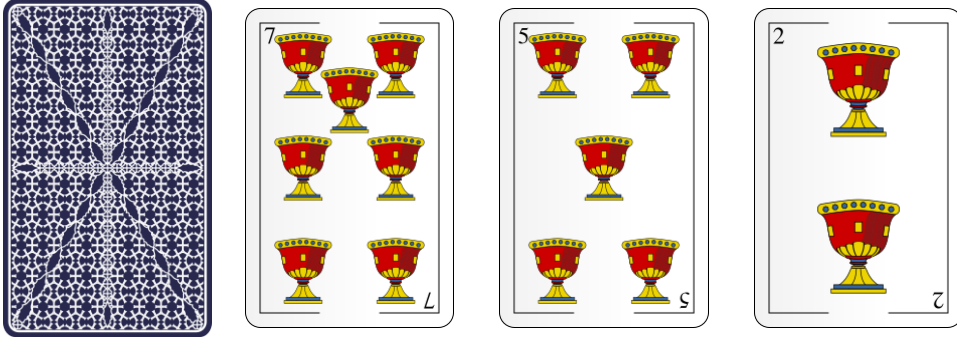
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$



$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$



EJERCICIO PROBABILIDAD. REGLA DEL PRODUCTO.



Ejercicio 1. ¿Probabilidad de sacar 3 copas de una baraja sin reemplazamiento?

Ejercicio 2. ¿Probabilidad de sacar 3 copas de una baraja con reemplazamiento?

INDEPENDENCIA ENTRE SUCESOS.

Cuando un suceso no suministra ninguna información sobre otro se dice que son independientes.

Definición. Dos sucesos A y B se dice que son independientes si la ocurrencia de uno no altera la probabilidad de que ocurra el otro:

Si $P(A|B)=P(A)$ entonces A y B son independientes

A partir la regla del producto podemos obtener la probabilidad de la intersección de los sucesos A y B a partir de sus probabilidades individuales si A y B son sucesos independientes.

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B) \rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

↓

A y B independientes

Generalizando a un conjunto de n sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ independientes entre sí:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots P(A_n)$$



EJERCICIOS INDEPENDENCIA ENTRE SUCESOS.

Recapitulemos:

Sean A y B sucesos cualesquiera

$$P(A|B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Si A y B son independientes

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

Ejercicio 1. Demuestra que, si A es independiente de B, el suceso B tiene que ser independiente de A.



EJERCICIO.

Ejercicio 2. El 26% de la gente fuma, el 6% ha padecido cáncer de pulmón y el 5% es fumadora y padeció cáncer de pulmón. a) ¿Qué probabilidad tienen los fumadores de padecer cáncer? .

b) ¿Son los sucesos padecer cáncer y fumar independientes? c) ¿Qué probabilidad tiene un no fumador elegido al azar de padecer cáncer?

F: Fumar $\Omega = \{ "F", " \bar{F} " \}$ $P(F)+P(\bar{F})=1$ $P(F)=0.26$

C: Haber padecido cáncer $\Omega = \{ "C", " \bar{C} " \}$ $P(C)+P(\bar{C})=1$, $P(C)=0.06$

$P(F \cap C)=0.05$

	F	$\bar{F}$
C	$C \cap F$	$C \cap \bar{F}$
$\bar{C}$	$\bar{C} \cap F$	$\bar{C} \cap \bar{F}$

$$a) P(C|F) \equiv \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F \cap C)}{P(F)} = \frac{0.05}{0.26} = 0.1923$$

probabilidad de que un fumador escogido al azar haya padecido cáncer de pulmón

b) ¿ $P(C|F) = P(C)$? No, C y F son eventos dependientes

$$c) P(C|\bar{F}) = \frac{P(C \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(C) - P(C \cap F)}{P(\bar{F})} = \frac{0.06 - 0.05}{1 - 0.26} = 0.0135$$

probabilidad de que un no fumador escogido al azar haya padecido cáncer de pulmón

$$P(C|\bar{F}) = 0.0135 < P(C) = 0.06 < P(C|F) = 0.1923$$



EJERCICIO.

Ejercicio 2. El 26% de la gente fuma, el 6% ha padecido cáncer de pulmón y el 5% es fumadora y padeció cáncer de pulmón. a) ¿Qué probabilidad tienen los fumadores de padecer cáncer? .

b) ¿Son los sucesos padecer cáncer y fumar independientes? c) ¿Qué probabilidad tiene un no fumador de padecer cáncer?

F: Fumador
C: Ha padecido cáncer de pulmón

$P(C \cap F)$ probabilidad de que una persona escogida al azar haya padecido de pulmón y sea fumadora

Se puede estimar a partir de los datos de una muestra (obtenida por ejemplo con una encuesta) como

la proporción de fumadores que han padecido cáncer de pulmón de la muestra

$$a) P(C \cap F) = \frac{\text{número de personas fumadoras y que padecieron cancer}}{\text{número total de personas de la muestra}}$$

b) ¿F y C son independientes?

$P(C|F)$ probabilidad de que un fumador escogido al azar padezca cáncer de pulmón

Se puede estimar a partir de la proporción de personas que han tenido cáncer entre las personas fumadoras

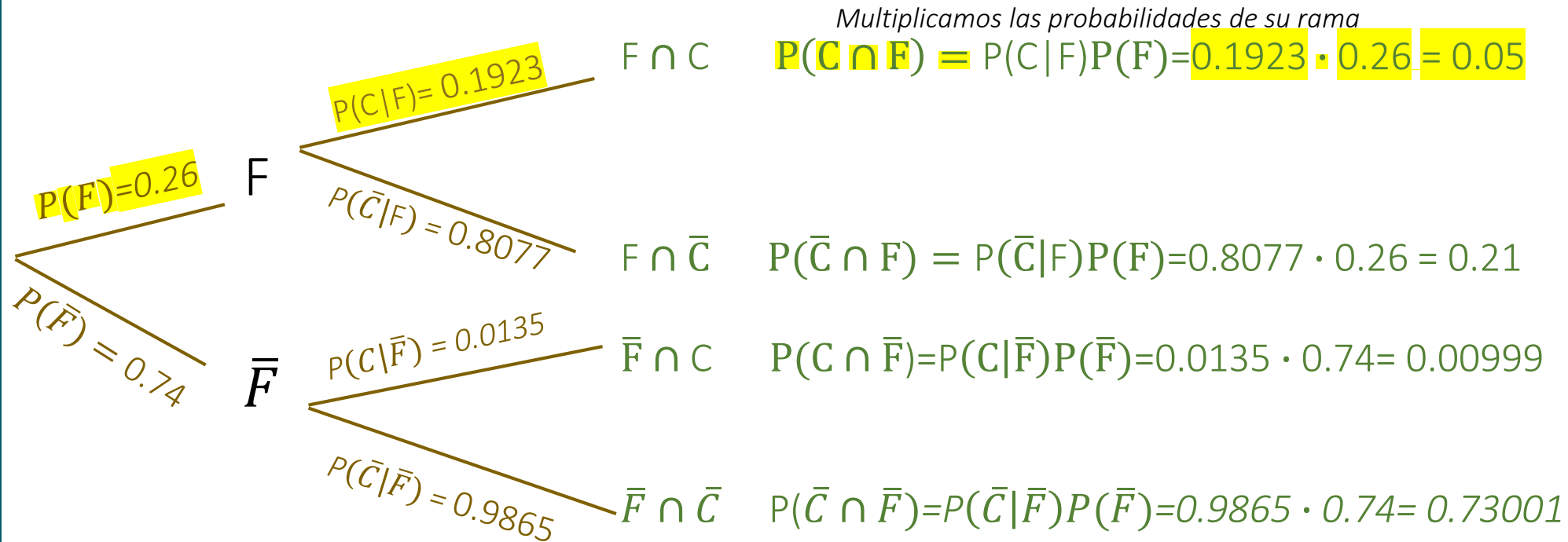
$$c) P(C|F) = \frac{\text{número de personas fumadoras y que padecieron cáncer}}{\text{número de fumadores de la muestra}}$$

$$P(C|F) = 0.0155 < P(C) = 0.06 < P(C|F) = 0.1923$$



EJERCICIO. ÁRBOLES DE PROBABILIDAD.

Ejercicio 2. Los árboles de probabilidad pueden facilitar el cálculo de probabilidades.



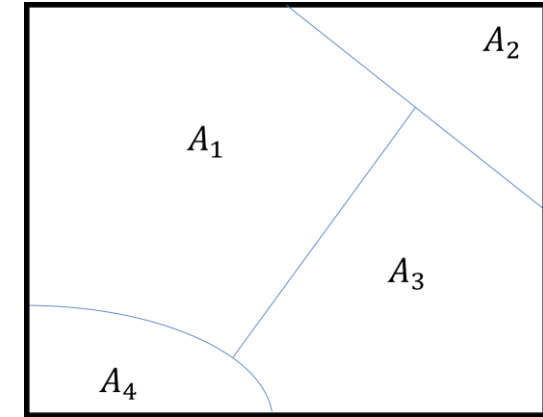
PARTICIONES DEL ESPACIO MUESTRAL.

Antes de ver el problema de la probabilidad necesitamos conocer la siguiente definición.

Definición. Una **partición del espacio muestral** $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es un conjunto de sucesos incompatibles dos a dos y tales que la unión de todos ellos sea igual al espacio muestral.

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$



Observación. $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$

Ejercicio 1. Dados los siguientes sucesos compuestos del experimento aleatorio lanzar un dado: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{3\}$, $D = \{4\}$, $E = \{5, 6\}$. Determina si los siguientes conjuntos de sucesos forman o no una partición muestral.

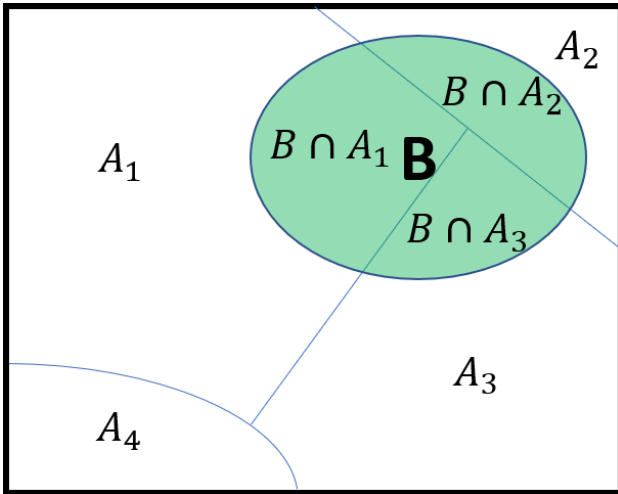
- a) ¿son A , B y E una partición muestral?
- b) ¿son A , C , D y E una partición muestral?



TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL.

Teorema de la probabilidad total. La probabilidad de cualquier suceso B se puede expresar en función de las probabilidades de los elementos de una partición $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ de acuerdo a la siguiente expresión:

$$P(B) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(B \cap A_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(B|A_i)P(A_i)$$



Demostración.

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4)$$

$$P(B) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4))$$

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4)$$

2º axioma de Kolmogorow



EJERCICIO.

Teorema de la probabilidad total: $P(B) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(B \cap A_i)$ siendo un $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$ partición

Ejercicio 2. El 26% de la gente fuma, el 6% ha padecido cáncer de pulmón y el 5% es fumadora y padeció cáncer de pulmón. a) ¿Qué probabilidad tienen los fumadores de padecer cáncer? . b) ¿Son los sucesos padecer cáncer y fumar independientes?

$P(F \cup \bar{F}) = 1$ y $P(F \cap \bar{F}) = 0 \rightarrow F$ y $\bar{F}$ son una partición del espacio muestral

$P(C \cup \bar{C}) = 1$ y $P(C \cap \bar{C}) = 0 \rightarrow C$ y $\bar{C}$ son una partición del espacio muestral

$P(F) = P(F \cap C) + P(F \cap \bar{C})$ $P(\bar{F}) = P(\bar{F} \cap C) + P(\bar{F} \cap \bar{C})$

$P(C) = P(C \cap F) + P(C \cap \bar{F})$

$P(\bar{C}) = P(\bar{C} \cap F) + P(\bar{C} \cap \bar{F})$

	F $P(F)=0.26$	$\bar{F}$ $P(\bar{F})=1-0.26=0.84$
C $P(C)= 0.0613$	$P(C \cap F)=0.05$	$P(C \cap \bar{F})=0.00999$
$\bar{C}$ $P(\bar{C})=1-0.06=0.94$	$P(\bar{C} \cap F)=0.21$	$P(\bar{C} \cap \bar{F})=0.7301$

TEOREMA DE BAYES.

Teorema de Bayes. Este teorema que juega papel fundamental en la rama de la Estadística moderna llamada Estadística Bayesiana.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$P(A|B)$: probabilidad a posteriori

$P(A)$: probabilidad a priori

$P(B|A)$: verosimilitud

Demostración:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

↓ ↓ ↓
def. probabilidad propiedad regla del producto
condicionada conmutativa

A partir del teorema de la probabilidad total obtenemos una expresión del teorema de Bayes que permite obtener $P(A_i|B)$ siendo A_i un evento de una partición del espacio muestral dada $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{1 \leq i \leq n} P(B|A_i)P(A_i)}$$



TEOREMA DE BAYES.

Ejercicio 1. A través de una encuesta realizada en una multinacional se ha determinado que la probabilidad de que a un empleado seleccionado al azar le guste el café es del 0.7, mientras que la probabilidad de que le guste el té es del 0.36. Además, se sabe que la probabilidad de que a un empleado que le gusta el té, le guste también el café es del 0.8. Calcular la probabilidad de que a un empleado le guste el té sabiendo que le gusta el café.



RESUMEN TEOREMAS DE PROBABILIDAD.

Regla del producto: $P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$

Si A y B incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, $\rightarrow P(A \cap B) = 0$

Si A y B independientes, $P(A|B) = P(A) \rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Regla de la adición: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Si A y B incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, $\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\emptyset)$

Si A y B independientes, $P(A|B) = P(A)$, $\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

Teorema de la probabilidad total:

Sea $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ una partición $\bigcup_{i=1:n} A_i = \Omega$ $P(B) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(B \cap A_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(B|A_i)P(A_i)$
 $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

Teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{1 \leq i \leq n} P(B|A_i)P(A_i)}$$



RESUMEN TEOREMAS DE PROBABILIDAD.

Regla del producto: $P(A \cap B) = P(A|B) P(B) \longrightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$

Si A y B incompatibles, $A \cap B = \emptyset, \rightarrow P(A \cap B) = 0$ $\xrightarrow{A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j} P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = 0$

Si A y B independientes, $P(A|B) = P(A) \rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$ $\xrightarrow{P(A_i | A_j) = P(A_i), \forall i \neq j} P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$

Regla de la adición: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Si A y B incompatibles, $A \cap B = \emptyset, \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\emptyset)$ $\xrightarrow{A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j} P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

Si A y B independientes, $P(A|B) = P(A) \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

Teorema de la probabilidad total:

Sea $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$ una partición $\bigcup_{i=1:n} A_i = \Omega$
 $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$$P(B) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(B \cap A_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(B|A_i)P(A_i)$$

Teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{1 \leq i \leq n} P(B|A_i)P(A_i)}$$



EJERCICIOS.

Ejercicio 1. Dado el experimento aleatorio lanzar dos dados. Obtén:

a) Probabilidad de sacar un 2 en el primer lanzamiento y un 6 en el segundo.

$$P('2' \cap '6') = (1/6)(1/6) \quad \text{Suponemos independencia ya que no indica lo contrario y son lanzamientos diferentes}$$
$$P(6 | 2) = P(6) = 1/6$$

b) Probabilidad de sacar un 1 en alguno de los dos dados

probabilidad de sacar un 1 en el primer dado o en el segundo

$$P('1' \cup '1') = P('1') + P('1') - P('1' \cap '1') = 1/6 + 1/6 - (1/6)(1/6) = 0.3056$$

Los 36 sucesos elementales son equiprobables. Podemos utilizar Laplace:

$$P('1' \cup '1') = \frac{11 \text{ casos favorables}}{36 \text{ resultados posibles}} = 0.3056$$

		Segundo dado					
		1	2	3	4	5	6
Primer dado	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)



EJERCICIOS.

Ejercicio. En un instituto el 40 % de los alumnos están en primer curso, el 35 % en segundo y el 25 % restante, en tercero. Al final de curso, suspenden el 20 % de los alumnos de primero y el 15 % de los de tercer curso. Elegido un alumno al azar, tiene un 20 % de probabilidad de haber suspendido.

Partición curso $\{“1^{\circ}”, “2^{\circ}”, “3^{\circ}”\}$ $P(1^{\circ})+P(2^{\circ})+P(3^{\circ})=1$

Partición pasar o no de curso $\{“S”, “\bar{S}”\}$ $P(S)+P(\bar{S})=1$

$P(1^{\circ})=0.4$, $P(2^{\circ})=0.35$ y $P(3^{\circ})=0.25$

$P(S) = 0.2 \rightarrow P(\bar{S})=1-P(S)=0.8$

$P(S|1^{\circ})=0.2$, $P(S|3^{\circ})=0.15 \rightarrow P(\bar{S}|1^{\circ})=0.8$ y $P(\bar{S}|3^{\circ})=0.85$

	S	$\bar{S}$
1º	$1^{\circ} \cap S$	$1^{\circ} \cap \bar{S}$
2º	$2^{\circ} \cap S$	$2^{\circ} \cap \bar{S}$
3º	$3^{\circ} \cap S$	$3^{\circ} \cap \bar{S}$

- a) ¿Cuál es la probabilidad de estar en primero y suspender?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de estar en primero o suspender?
- c) Son los sucesos “ser de primer curso” y “suspender” dependientes o independientes?
- d) Hallar la probabilidad de que un alumno de segundo suspenda.

► a)0.08, b)0.52, d) 0.2357



EJERCICIOS.

Ejercicio. En un instituto el 40 % de los alumnos están en primer curso, el 35 % en segundo y el 25 % restante, en tercero. Al final de curso, suspenden el 20 % de los alumnos de primero y el 15 % de los de tercer curso. Elegido un alumno al azar, tiene un 20 % de probabilidad de haber suspendido.

$$P(S) = P(S \cap 1^\circ) + P(S \cap 2^\circ) + P(S \cap 3^\circ) = 0.20$$

No confundir $P(S \cap 1^\circ)$ y $P(S|1^\circ)$

$P(S \cap 1^\circ)$ probabilidad de que un alumno escogido al azar sea de primero y haya suspendido

Se puede estimar a partir de la proporción de los alumnos de primero que suspendieron respecto al total de alumnos de una muestra

$$\frac{\text{número de alumnos de primero que suspendieron}}{\text{número total de alumnos}}$$

$P(S|1^\circ)$ probabilidad de que un alumno de primero escogido al azar haya suspendido.

Se puede estimar a partir de la proporción de alumnos de primero que han suspendido:

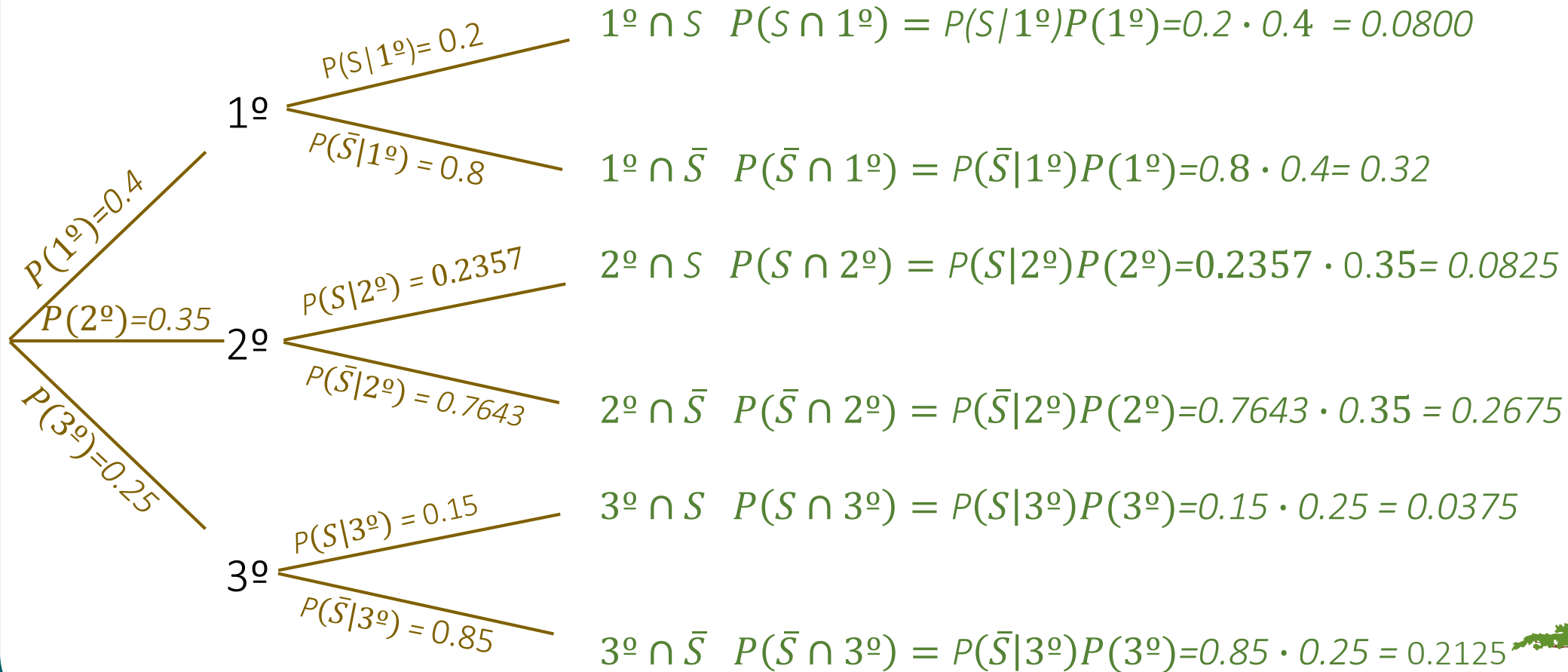
$$\frac{\text{número de alumnos de primero que suspendieron}}{\text{número de alumnos de primero}}$$

► a) 0.08, b) 0.52, d) 0.2357



EJERCICIOS.

Ejercicio. Árbol de probabilidad *completo correspondiente al ejercicio.*



EJERCICIOS.

Ejercicio. En un instituto el 40 % de los alumnos están en primer curso, el 35 % en segundo y el 25 % restante, en tercero. Al final de curso, suspenden el 20 % de los alumnos de primero y el 15 % de los de tercer curso. Elegido un alumno al azar, tiene un 20 % de probabilidad de haber suspendido.

$P(S \cup \bar{S}) = 1$ y $P(S \cap \bar{S}) = 0 \rightarrow S$ y $\bar{S}$ son una partición del espacio muestral

$P(1^\circ \cup 2^\circ \cup 3^\circ) = 1$, $P(1^\circ \cap 2^\circ) = 0$, $P(1^\circ \cap 3^\circ) = 0$, $P(2^\circ \cap 3^\circ) = 0 \rightarrow 1^\circ, 2^\circ$ y 3° son una partición del espacio muestral

	S $P(S)=0.2$	$\bar{S}$ $P(\bar{S})=0.8$
1° $P(1^\circ)=0.4$	$P(1^\circ \cap S)=0.0800$	$P(1^\circ \cap \bar{S})=0.32$
2° $P(2^\circ)=0.35$	$P(2^\circ \cap S)=0.0825$	$P(2^\circ \cap \bar{S})=0.2675$
3° $P(3^\circ)=0.25$	$P(3^\circ \cap S)=0.0375$	$P(3^\circ \cap \bar{S})=0.2125$

