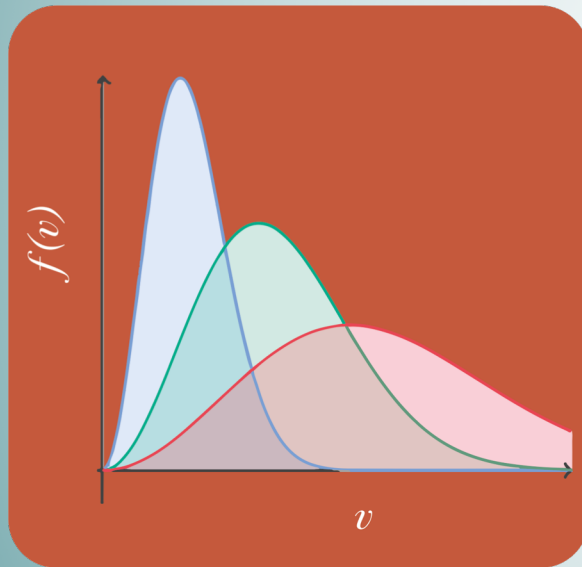


Métodos Matemáticos en la Ingeniería

BLOQUE I. ESTADÍSTICA TEMA 3. VARIABLE ALEATORIA



Vera Egorova

Sara Pérez Carabaza

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Este material se publica bajo la siguiente licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



ÍNDICE.

- [Tipos de variables aleatorias](#)
- [Distribuciones de probabilidad](#)
- [Función de probabilidad](#)
- [Función de densidad](#)
- [Función de distribución](#)
- [Medidas de distribuciones de 4. probabilidad](#)
- [medidas de localización](#)
- [medidas de dispersión](#)
- [medidas de posición \(cuantiles\)](#)
- [Ejercicios](#)

Objetivos

1. Saber definir variables aleatorias y distribuciones de probabilidad.
2. Conocer las características de las funciones de probabilidad, densidad y distribución.
3. Calcular medidas de la distribución de probabilidad.



INTRODUCCIÓN.

Estadística descriptiva

Reunir **datos muestrales** que permiten obtener tablas de frecuencias y **estadísticos** y gráficos.

x_i	n_i	f_i
0	23	0.23
1	48	0.48
2	29	0.29

$n = 100$ lanzamientos

$\bar{x} = 1.06$ cruces
 $S_n = 0.52$ cruces

Experimento aleatorio número
de cruces al lanzar 2 monedas



Probabilidad

Calcular las probabilidades de posibles resultados (sucesos).

$\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$

$P(\{CC\}) = 1/4 = 0.25$

$P(\{CX, XC\}) = 2/4 = 0.5$

$P(\{XX\}) = 1/4 = 0.25$

Variable aleatoria y distribuciones de probabilidad

Crear un modelo teórico que describa la forma en que se espera que se comporte el experimento. La distribución de probabilidad describe la **población** y permite calcular probabilidades y predicciones de los resultados más probables.

Las **medidas** resumen numéricamente ciertas propiedades relevantes de las distribuciones de probabilidad.

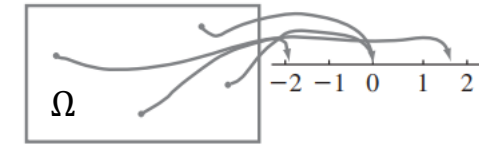
Variable aleatoria X: asigna un valor numérico a cada posible resultado de Ω
p.ej. X: Número de cruces al lanzar dos monedas (v.a. discreta)

ω_i	x_i	$p(x_i)$	$\mu = 1$ cruces $\sigma = 0.71$ cruces
CC	0	0.25	
CX	1	0.50	
XC	1	0.50	
XX	2	0.25	



VARIABLES ALEATORIAS.

Variable aleatoria. Función definida para todos los posibles sucesos del experimento aleatorio que asigna un valor numérico a cada resultado de un experimento aleatorio.



Condición para definición de v.a.: La probabilidad $P(X \leq x)$ del suceso $\{X \leq x\}$ está definida de forma única y consistente con el espacio de probabilidad.

Notación:

$x, Y, Z, W, V \longrightarrow$ Variables aleatorias (mayúsculas)

$x, y, z, w, v \longrightarrow$ Valores de las variables aleatorias (minúsculas)

Ejemplos de variables aleatorias.

X: “Número de puntos que aparecen en la cara superior de un dado al lanzarlo” $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Y: “Suma de los puntos que aparecen en dos dados” $y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Z: “Número de cuatros obtenidos al lanzar dos dados” $z \in \{0, 1, 2\}$

W: “Número de clientes que entran en una tienda al día” $w \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

V: “Altura (metros) de los alumnos de esta asignatura” $v \in [0, \infty]$



TIPOS DE VARIABLES ALEATORIAS.

- **Variables aleatorias discretas:** pueden tomar un conjunto numerable de valores.

X: “Número de puntos que aparecen en la cara superior de un dado al lanzarlo”

$$x \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

W: “Número de clientes que entran en una tienda al día” $w \in \{0,1,2, \dots, n\}$

- **Variables aleatorias continuas:** pueden tomar un conjunto no numerable de valores. Entre dos valores próximos toma un número infinito de valores.

V: “Altura (metros) de los alumnos de una clase” $v \in [0, \infty]$

- **Variables aleatorias mixtas.** Puede tomar un conjunto infinito no numerable de valores pero la probabilidad de al menos uno de ellos no es nula.

V: “Lluvia diaria en la azotea del edificio” $v \in [0, \infty]$



DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria queda completamente determinada si se especifica una de las siguientes funciones:

Función de probabilidad (v.a. discretas) $p_X(x)$ o función de densidad $f_X(x)$ (v.a. continuas)



(veremos cómo obtener $F_X(x)$ a partir de $p_X(x)$ o $f_X(x)$ y viceversa)

Función de distribución $F_X(x)$

Con cualquiera de estas tres distribuciones de probabilidad tenemos por lo tanto una descripción de la población, no de una muestra.

A continuación, definiremos cada una de ellas.



VARIABLES DISCRETAS: FUNCIÓN DE PROBABILIDAD.

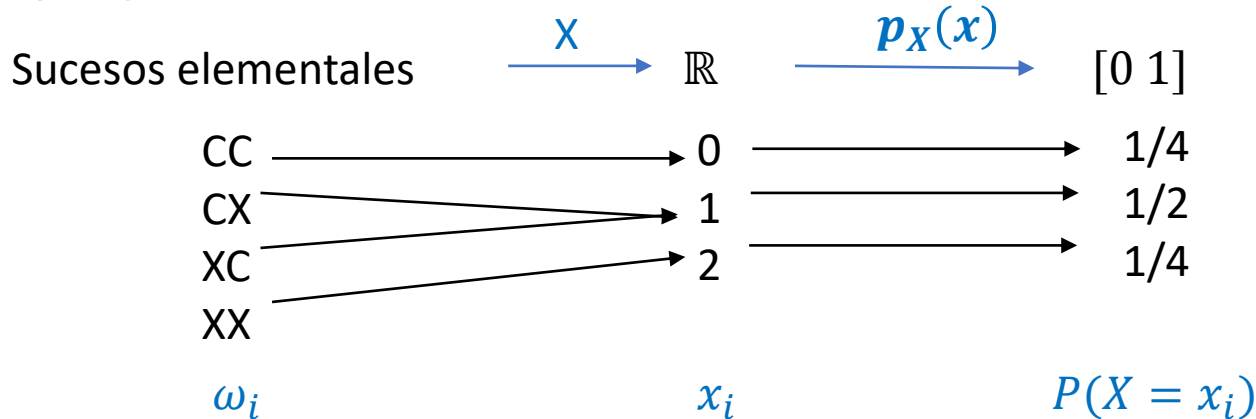
La **función de probabilidad** de una **variable aleatoria discreta** (en inglés *probability mass function*) $p_X(x) \equiv P(X=x)$ (o simplemente $P(x)$) asigna a cada posible valor x de la v.a. discreta X su probabilidad. Una función es una función de probabilidad si cumple las siguientes propiedades:

1) $p_X(x) \geq 0$

2) $\sum_i p_X(x_i) = 1$

Además, se tiene que: $P(a < X \leq b) = \sum_{a < x_i \leq b} p_X(x_i)$

Ejemplo. X : “número de cruces al lanzar dos monedas”.



$$p_X(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x=0 \text{ o } x=2 \\ 1/2 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio. Comprueba que $p_X(x)$ cumple las propiedades de una función de probabilidad.



VARIABLES DISCRETAS: FUNCIÓN DE PROBABILIDAD.

$$P(a < X \leq b) = \sum_{a < x_i \leq b} p_X(x_i)$$

Ejemplo 1. Función de probabilidad $p_X(x)$ asociada a la variable aleatoria X : “número de puntos al lanzar un dado”

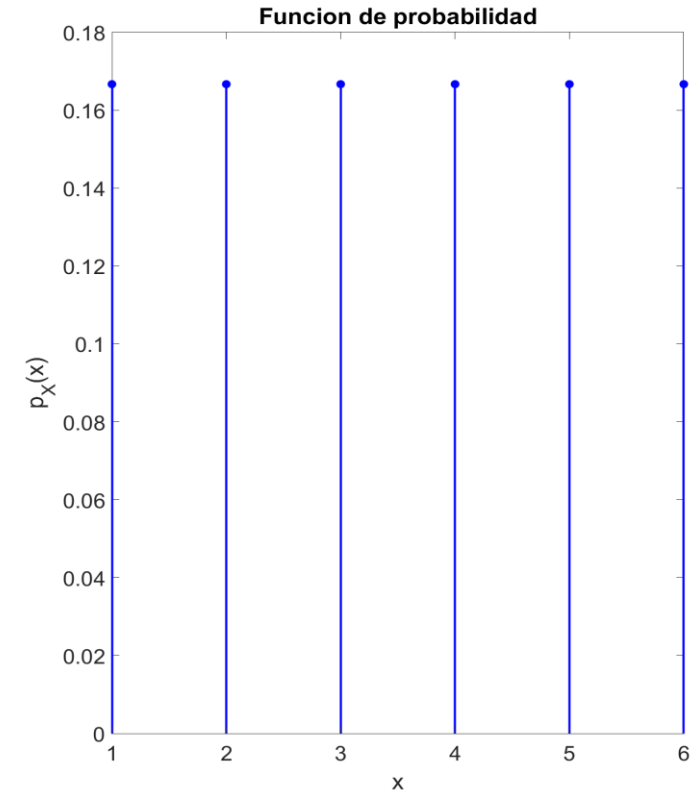
$$p_X(x) = \begin{cases} 1/6 & x=1 \\ 1/6 & x=2 \\ 1/6 & x=3 \\ 1/6 & x=4 \\ 1/6 & x=5 \\ 1/6 & x=6 \end{cases}$$

¿ $P(X = 3)$?

¿ $P(2 < X \leq 5)$?

¿ $P(1 \leq X \leq 3)$?

¿ $P(X > 5)$?



VARIABLES CONTINUAS: FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD.

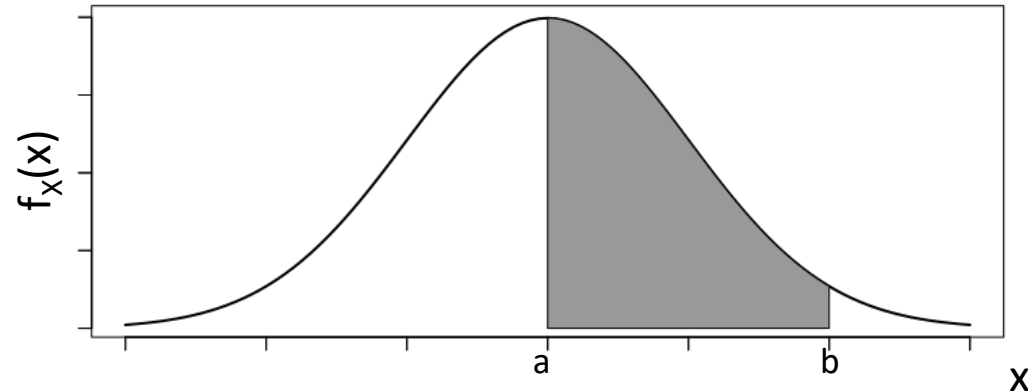
Para una v. a. continua $P(X=x)=0$ por lo que se define la **función de densidad de probabilidad** $f_X(x)$ (*probability density function* or pdf en inglés) que cumple las siguientes propiedades:

- 1) $f_X(x) \geq 0$
- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

¡ $f_X(x)$ no es una probabilidad!

Las probabilidades de que las variables aleatorias tomen valores comprendidos en un intervalo $[a,b]$ vienen dadas por el área bajo la función de densidad $f_X(x)$:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$



Al ser variable aleatoria continua $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$

VARIABLES CONTINUAS: FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD.

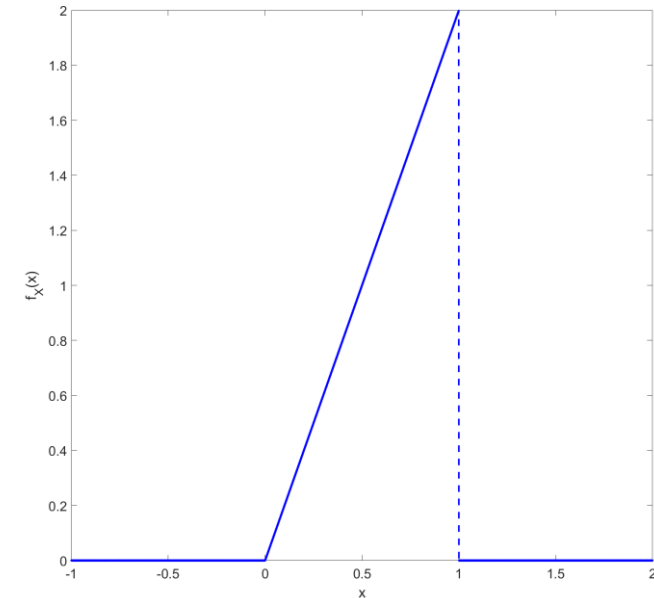
Propiedades:

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Ejercicio 1. Dada la siguiente función de densidad $f_X(x) = 2x$ si $0 < x \leq 1$.

- ¿ $f_X(0.8)$? ¿Es posible que el valor de la función de densidad sea mayor que 1?
- Calcula la probabilidad de que la v.a. X tome un valor entre 0 y 0.5
- Calcula la probabilidad de que la v.a. X tome un valor entre 0.5 y 1.



VARIABLES CONTINUAS: FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD.

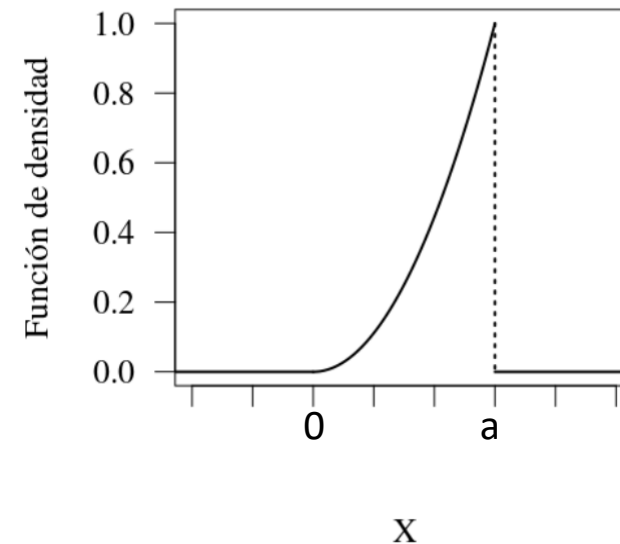
Propiedades:

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Ejercicio 2. Determinar el valor de la constante de normalización a .

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{ax^2}{27} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

La **función de distribución** de una variable aleatoria X es una función real definida mediante

$$F_X(x) \equiv P(X \leq x)$$

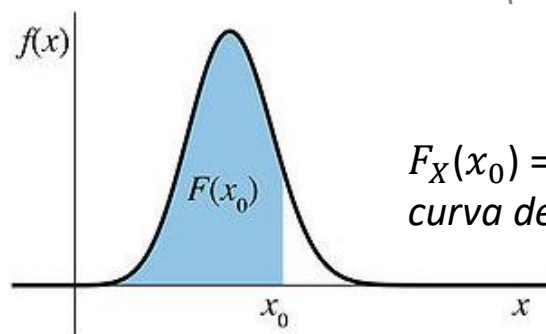
para cualquier valor de x en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Es decir, $F_X(x)$ coincide con la probabilidad de que la v.a. X tome un valor menor o igual que x , que ocurra el suceso $\{X \leq x\}$.

Si X es v.a. discreta: $F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = P(-\infty < X \leq x_0) = \sum_{-\infty < x_i \leq x_0} p_X(x_i) = \sum_{x_i \leq x_0} p_X(x_i)$

Si X es v.a. continua: $F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = P(-\infty < X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x) dx \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

(Teorema fundamental del Cálculo)



$F_X(x_0) = P(X \leq x_0)$ coincide con área bajo la curva de $f_X(x)$ en el intervalo $(-\infty, x_0]$

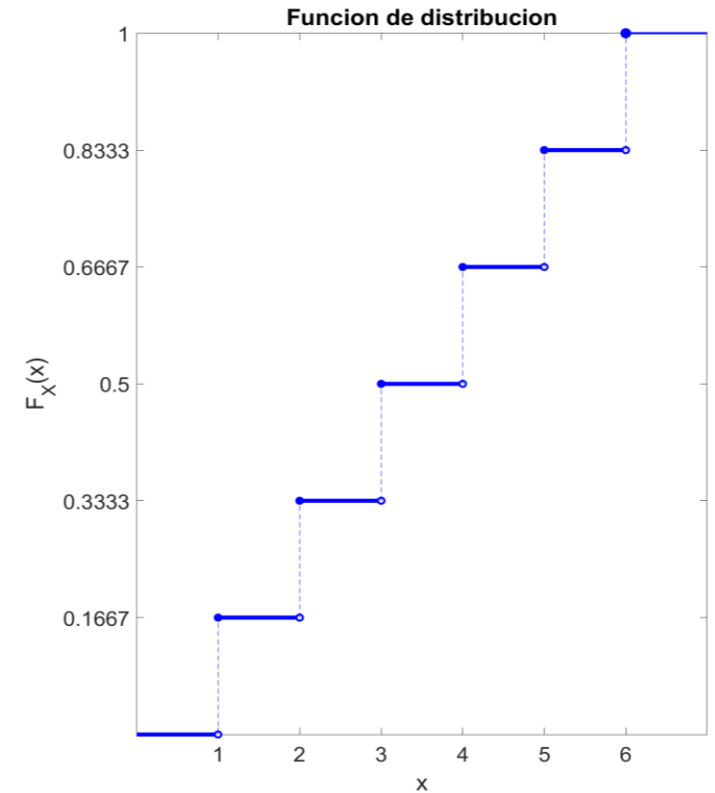
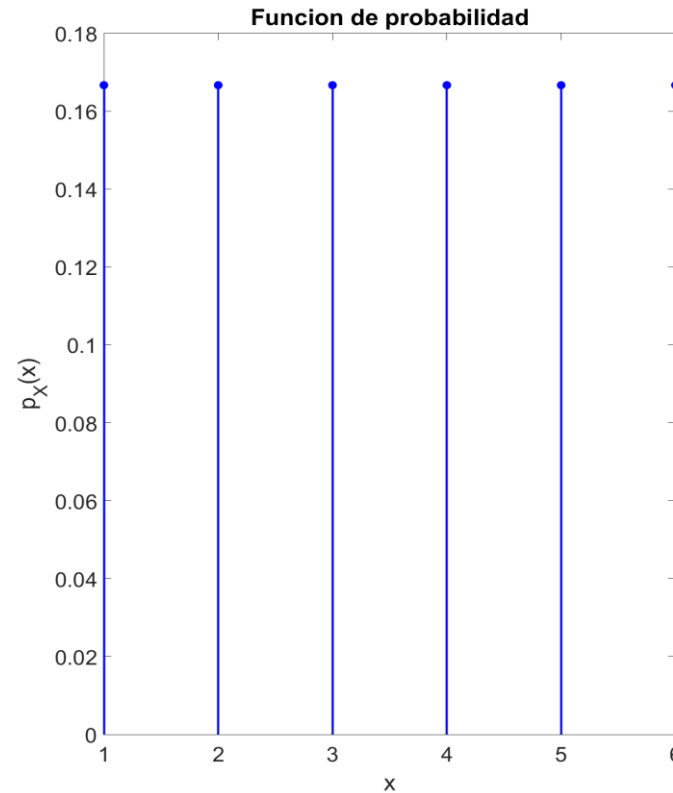
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN. EJERCICIO.

Si X es una v.a. discreta: $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$

Ejemplo 1. ¿Cuál es la función de distribución $F_X(x)$ asociada a la variable aleatoria X : “número de puntos al lanzar un dado”?

$$p_X(x) = 1/6 \text{ si } x=1,2,3,4,5,6$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/6 & 1 \leq x < 2 \\ 2/6 & 2 \leq x < 3 \\ 3/6 & 3 \leq x < 4 \\ 4/6 & 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$



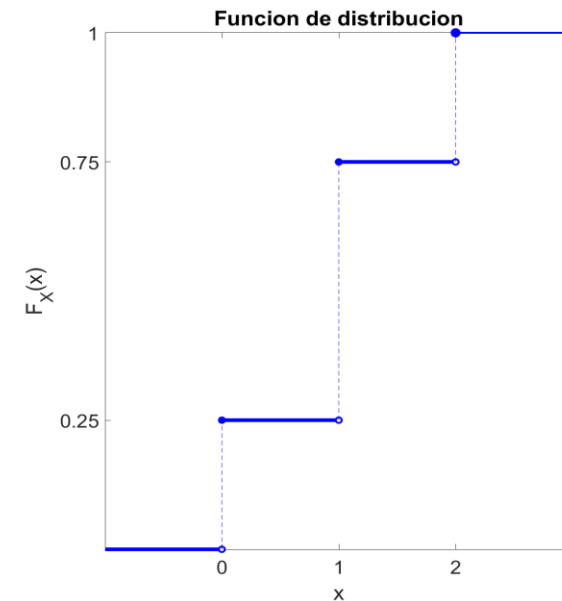
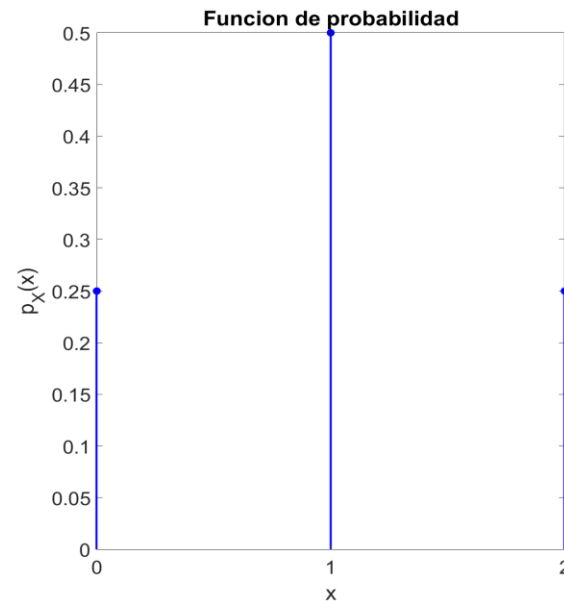
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN. EJERCICIO.

Si X es una variable aleatoria discreta: $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$

Ejercicio 2. ¿Cuál es la función de distribución $F_X(x)$ asociada a la variable aleatoria X : “número de cruces al lanzar dos monedas”? Representala y obtén los valores $F_X(0)$, $F_X(0.5)$ y $F_X(1.5)$.

ω_i	X	x_i	$P(x_i)$
CC	→	0	0.25
CX	→	1	0.50
XC	→	1	0.50
XX	→	2	0.25

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{si } x=0 \\ 0.50 & \text{si } x=1 \\ 0.25 & \text{si } x=2 \end{cases}$$
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.25 & 0 \leq x < 1 \\ 0.75 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$



$F_X(0) = P(X \leq 0)$: probabilidad de sacar 0 cruces o menos al lanzar dos monedas



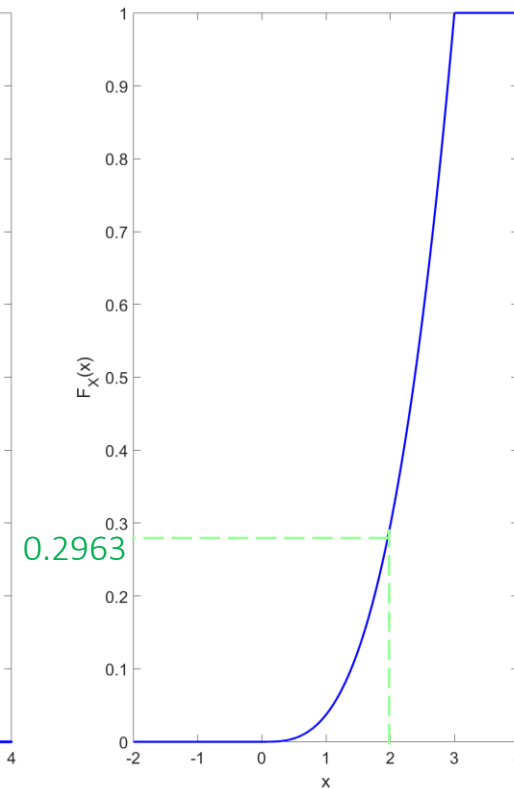
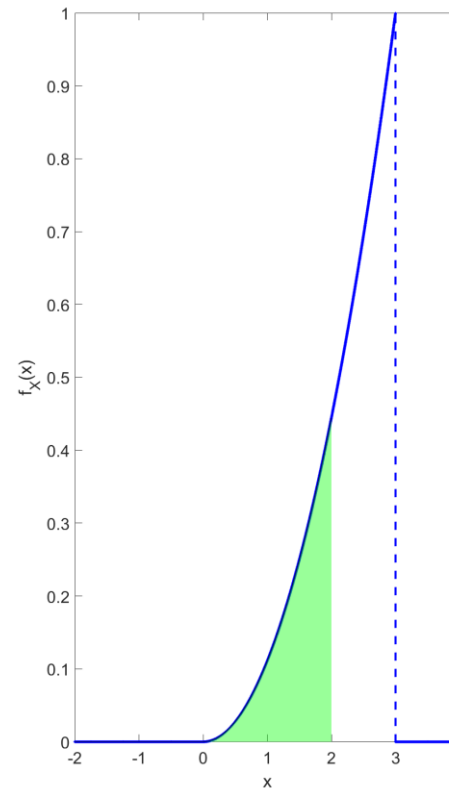
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN. EJERCICIO.

Si X es una v.a. continua: $P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$ $F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$

Ejercicio 2. Dadas las siguientes distribuciones de probabilidad de una variable aleatoria continua. Obtén ¿ $P(X \leq 2)$, $P(X=2)$, $P(X<2)$)?

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2/27 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3/27 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



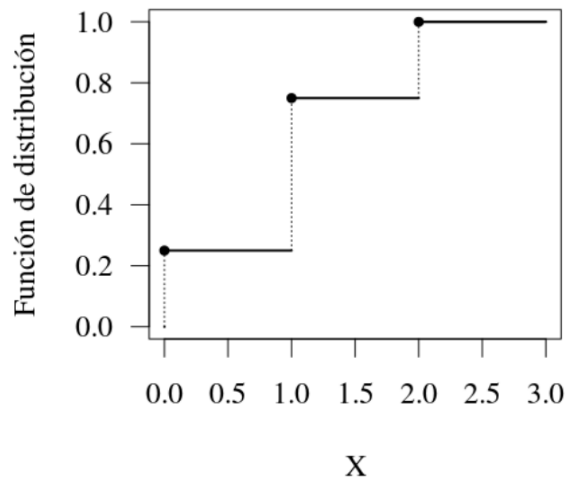
PROPIEDADES DE FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

Según la forma de $F_X(x)$ podemos determinar fácilmente si X se trata de una variable aleatoria discreta o continua.

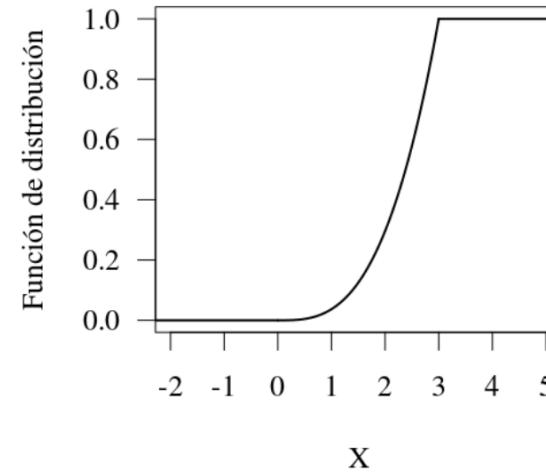
Si $F_X(x)$ es escalonada $\Rightarrow X$ es una variable aleatoria discreta

Si $F_X(x)$ es continua $\Rightarrow X$ es una variable aleatoria continua

Si $F_X(x)$ no es discreta ni continua $\Rightarrow X$ es una variable aleatoria mixta



X es v.a. discreta



X es v.a. continua



PROPIEDADES DE FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

De acuerdo con la definición $F_X(x) = P(X \leq x)$, los valores que toma $F_X(x)$ tienen que ser probabilidades y por tanto $F_X(x)$ hereda ciertas propiedades de la probabilidad:

1. $F_X(-\infty) = 0 \rightarrow F_X(-\infty) = P(X \leq -\infty) = 0$

2. $F_X(\infty) = 1 \rightarrow F_X(\infty) = P(X \leq \infty) = 1$

3. No decreciente (o creciente).

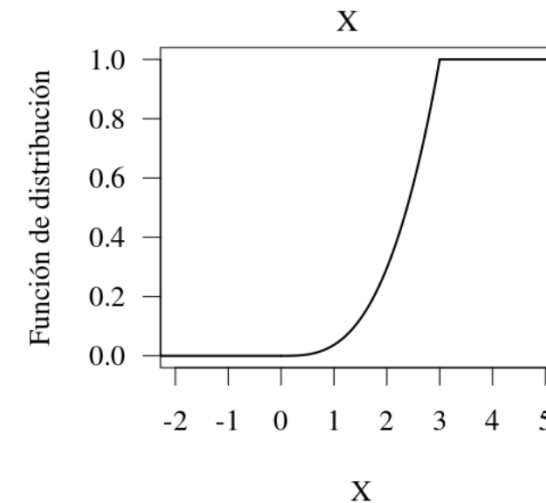
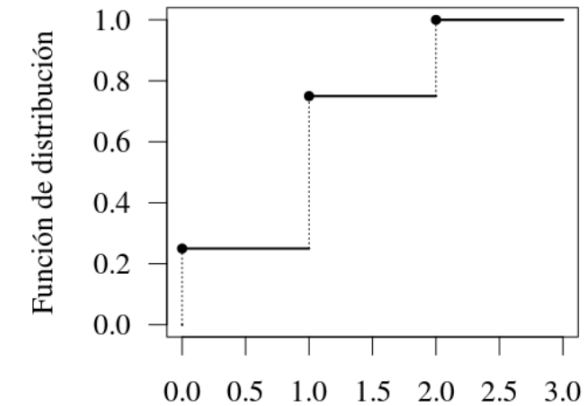
4. Continua por la derecha $F_X(x^+) = F_X(x)$

5. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

6. $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$

En caso de que X es una variable continua $P(X = x) = 0 \forall x$

Nota: F_X es una función creciente (no confundir con estrictamente creciente)



PROPIEDADES DE FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

De acuerdo con la definición $F_X(x) = P(X \leq x)$, los valores que toma $F_X(x)$ tienen que ser probabilidades y por tanto $F_X(x)$ hereda ciertas propiedades de la probabilidad:

1. $F_X(-\infty) = 0 \rightarrow F_X(-\infty) = P(X \leq -\infty) = 0$

2. $F_X(\infty) = 1 \rightarrow F_X(\infty) = P(X \leq \infty) = 1$

3. **No decreciente (o creciente).**

4. **Continua por la derecha $F_X(x^+) = F_X(x)$**

5. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

6. $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$

En caso de que X es una variable continua $P(X = x) = 0 \forall x$

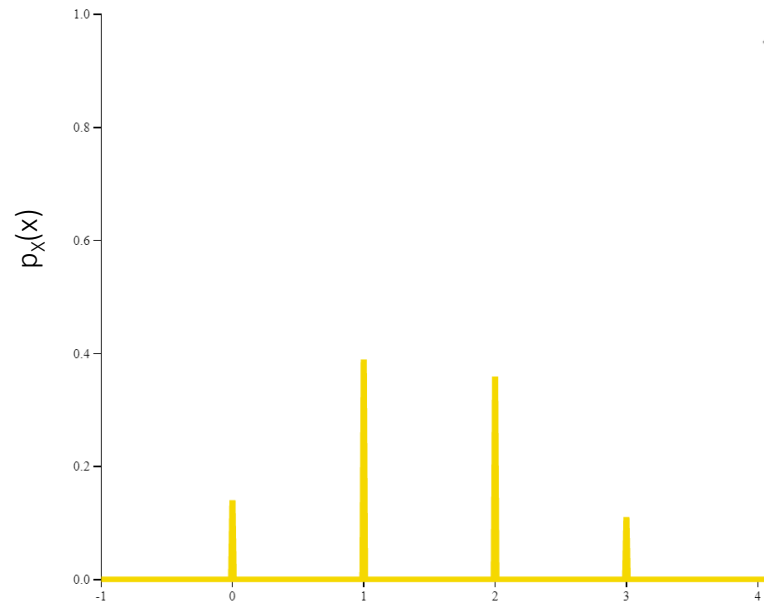
Cualquier función matemática que verifique estas cuatro propiedades es una función de distribución de una variable aleatoria.



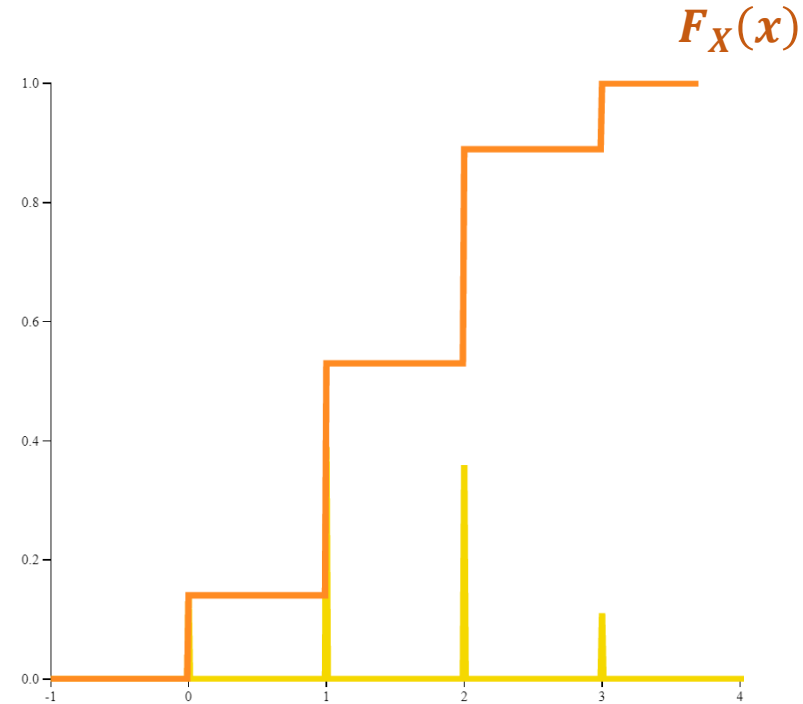
EJEMPLOS DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

Ejemplo 1. A continuación, se muestra un ejemplo de distribución de una v.a. discreta; su **función de probabilidad** y **funciones de distribución**.

ejemplo a) distribución binomial



función de probabilidad $p_X(x)=P(X=x)$



función de distribución $F_X(x)=P(X \leq x)$

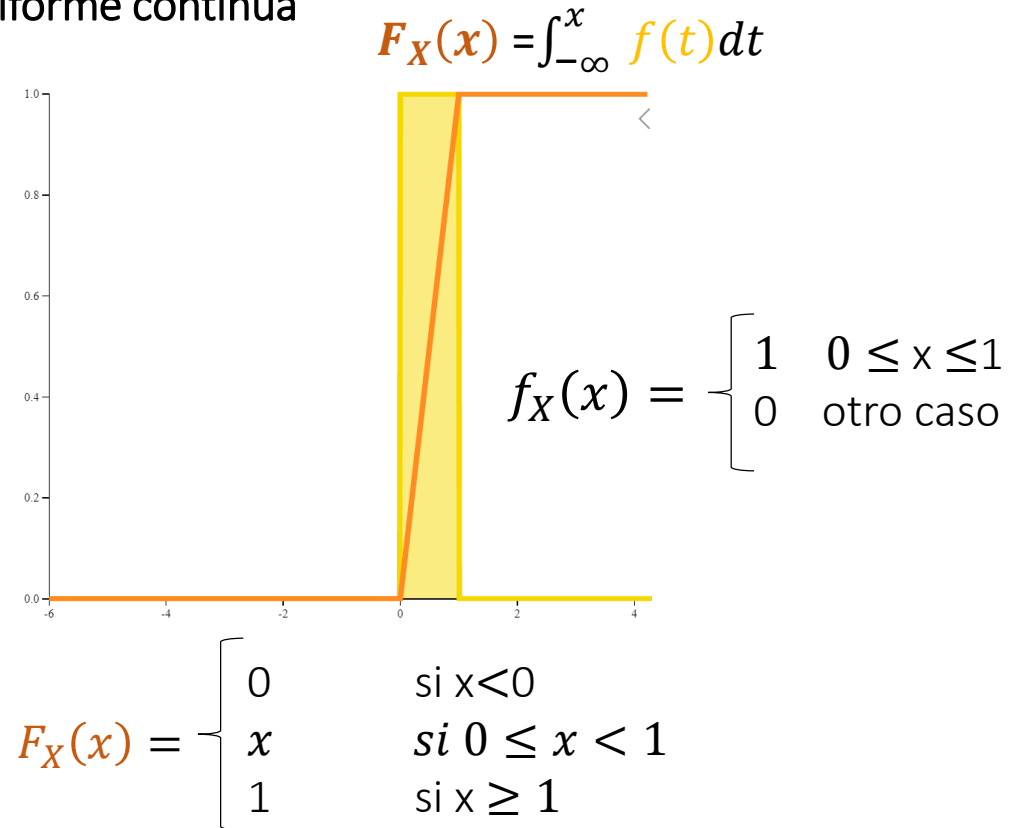
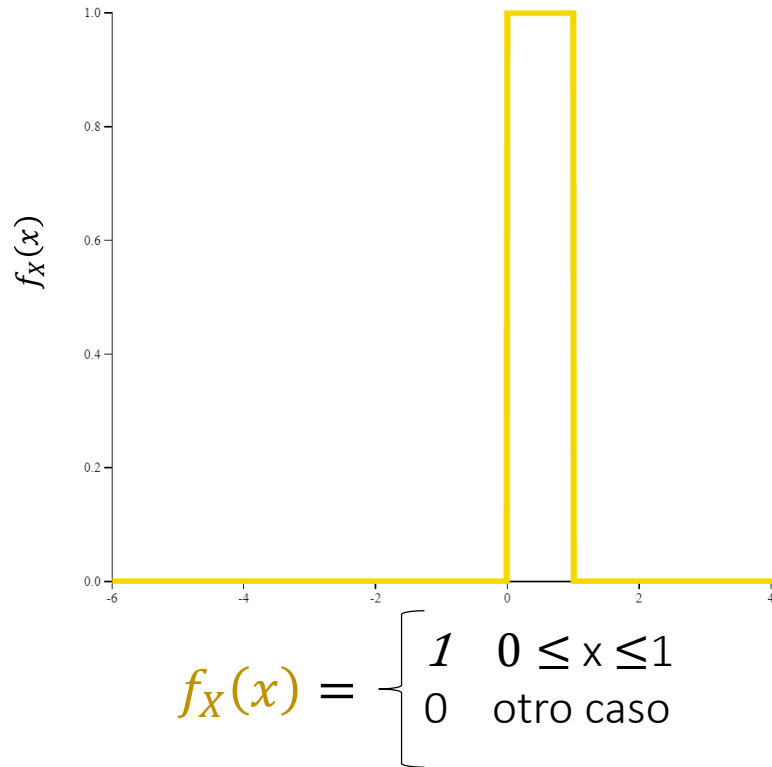
Mira una versión animada [aquí](#)



EJEMPLOS DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

Ejemplo 2. A continuación se muestra un ejemplo de distribución de una v.a. continua, su **función de densidad** y sus correspondientes **funciones de distribución**.

ejemplo b) distribución uniforme continua



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

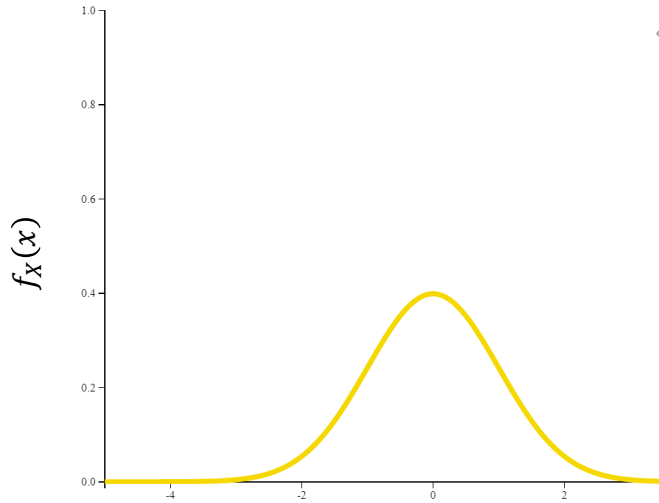
Mira una versión animada [aquí](#)



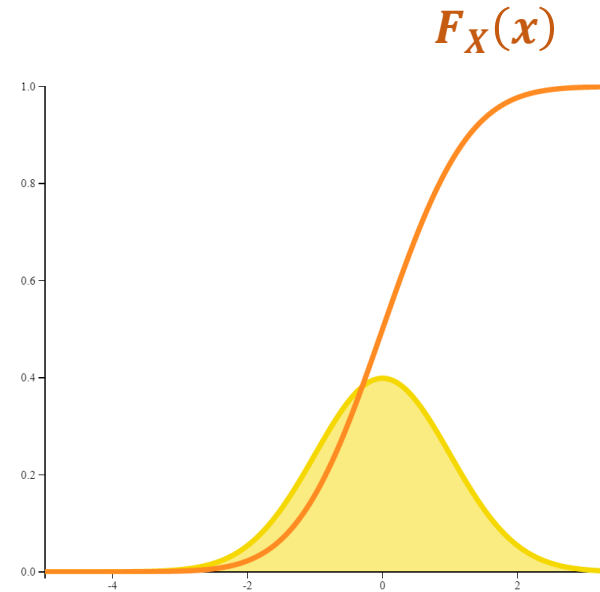
EJEMPLOS DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

Ejemplo 3. A continuación se muestra un ejemplo de distribución de una v.a. continua, su **función de densidad** y su correspondientes **funciones de distribución**.

ejemplo c) distribución normal



$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

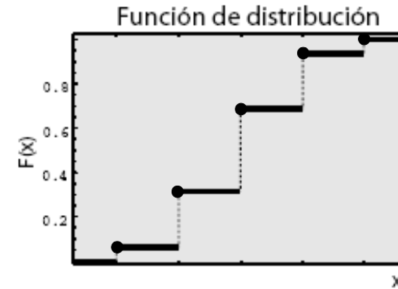
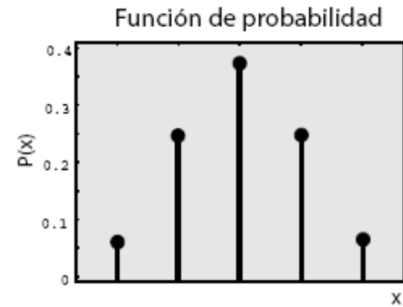


Mira una versión animada [aquí](#)

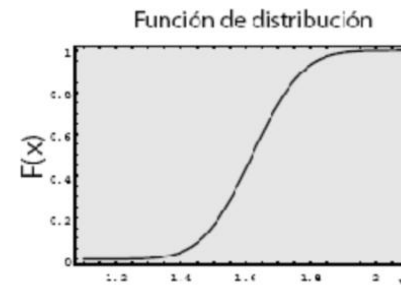
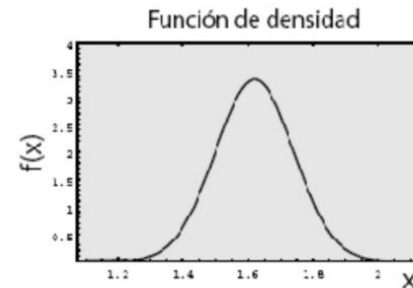


FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

Ejercicio. Determina el tipo de variable aleatoria y comprueba que las tres funciones de distribución cumplen las **4 propiedades que debe cumplir cualquier función de distribución**.

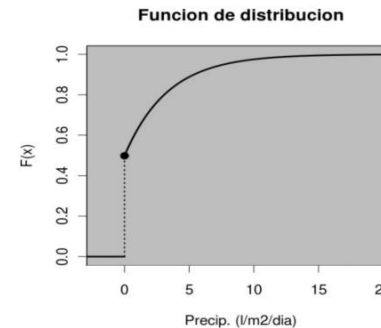


X: "número de caras al lanzar 4 monedas"



X: "Altura (metros) individuos"

1. $F_X(-\infty) = 0$
2. $F_X(\infty) = 1$
3. $F_X(x)$ no decreciente
4. $F_X(x)$ continua por la derecha



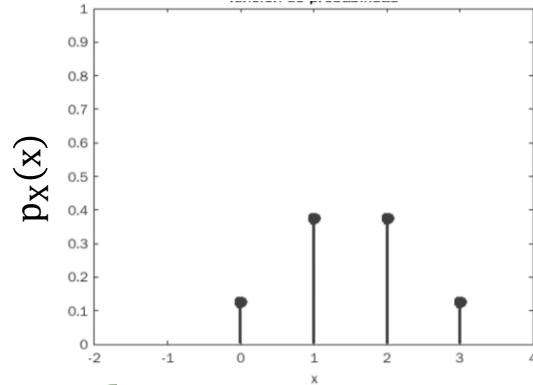
X: "Lluvia diaria en Santander "



RESUMEN DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Función de probabilidad $p_X(x) \equiv P(X=x)$



$$P(a < X \leq b) = \sum_{a < x_i \leq b} p_X(x_i)$$

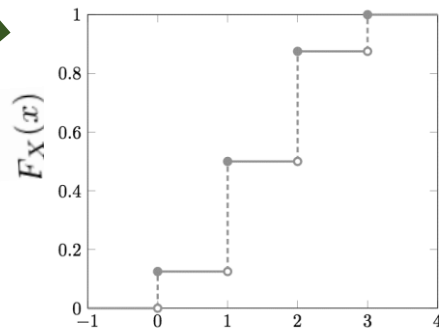
Propiedades $p_X(x)$:

$$p_X(x) \geq 0$$

$$\sum_{\forall i} p_X(x_i) = 1$$

$$P(X=x) = p_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

$$F_X(x_0) = \sum_{x_i \leq x_0} p_X(x_i)$$



$F_X(x)$ escalonada

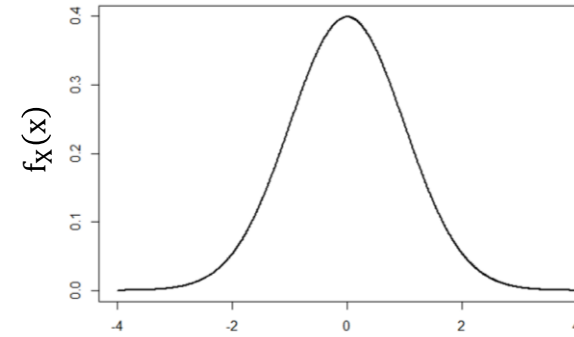
Función de distribución
 $F_X(x) \equiv P(X \leq x)$

Propiedades $F_X(x)$:

1. $F_X(-\infty) = 0$
2. $F_X(\infty) = 1$
3. Monótona no decreciente
4. $F_X(x^+) = F_X(x)$
5. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
6. $P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-)$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Función de densidad $f_X(x)$



$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

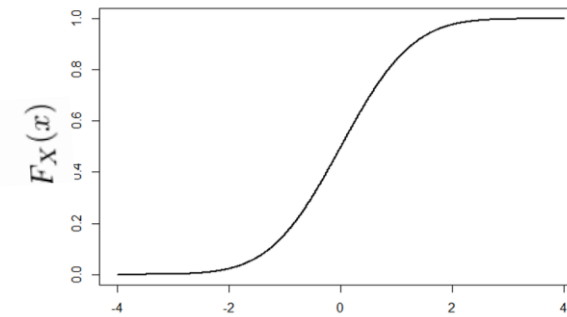
Propiedades $f_X(x)$:

$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x) dx$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$



$F_X(x)$ continua



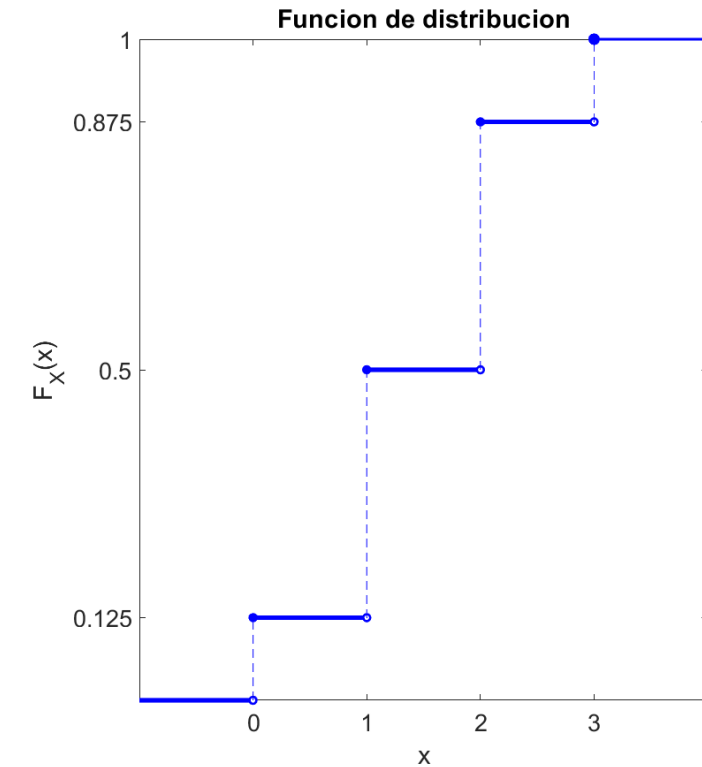
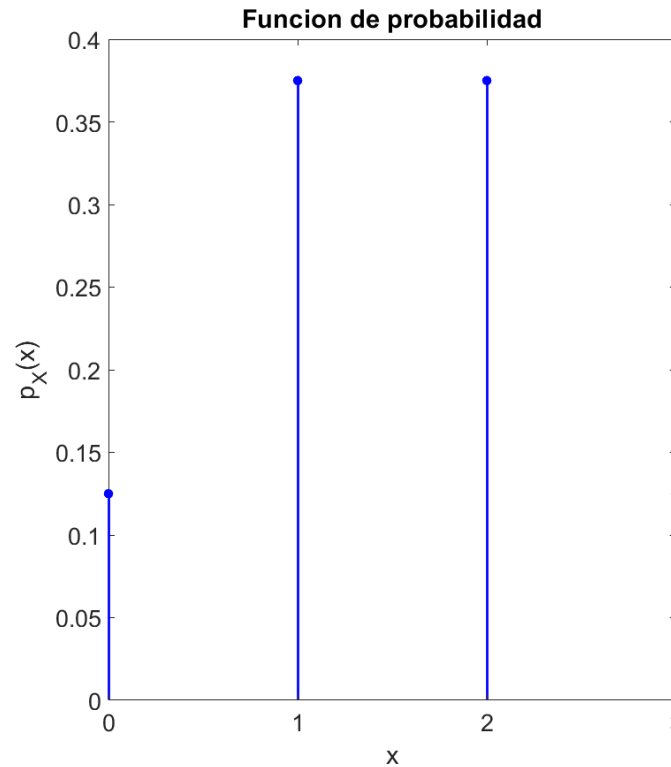
EJERCICIOS.

Si X es una v.a. discreta: $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$

Ejercicio. Dado las siguientes distribuciones de la v.a. X obtén $P(X=2)$, $P(X \leq 2)$, $P(X < 2)$, $P(X \leq 2.5)$.

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/8 = 0.125 & \text{si } x=0 \\ 3/8 = 0.375 & \text{si } x=1 \\ 3/8 = 0.375 & \text{si } x=2 \\ 1/8 = 0.125 & \text{si } x=3 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ 4/8, & 1 \leq x < 2 \\ 7/8, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$



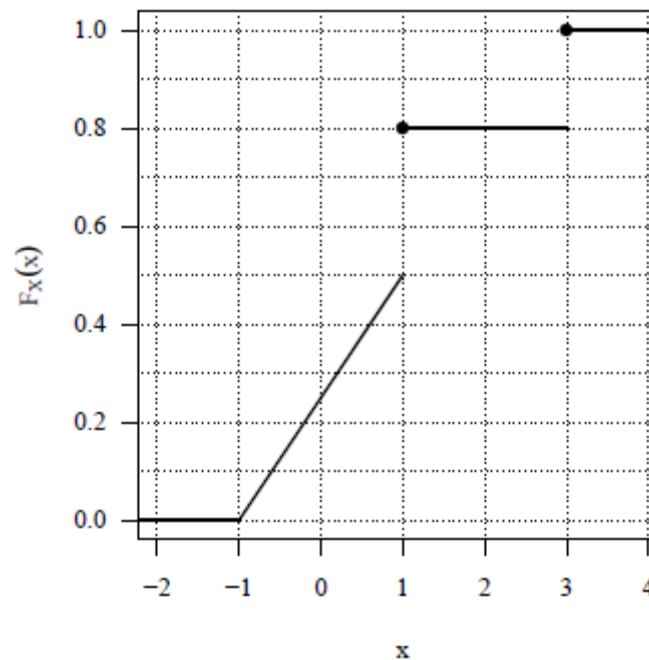
EJERCICIOS.

Ejercicio. Contestar razonadamente a las siguientes preguntas referidas a la figura de la derecha:

- a) La función representada, ¿puede ser función de distribución de alguna variable aleatoria?. Si es así, ¿de qué tipo de variable aleatoria se trata?
- b) ¿Cuánto vale $P(X = 0)$?
- c) ¿Cuánto vale $P(X = 1)$?
- d) ¿Cuánto vale $P(X \leq 2)$?

Propiedades $F_X(x)$:

1. $F_X(-\infty) = 0$
2. $F_X(\infty) = 1$
3. Monótona no decreciente
4. $F_X(x^+) = F_X(x)$
5. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
6. $P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-)$



MEDIDAS DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

Las distribuciones de probabilidad caracterizan por completo una v. a. y por tanto describen una población.

Las **medidas de las distribuciones de probabilidad** de variables aleatorias son valores numéricos que permiten describir o resumir ciertas propiedades características de las distribuciones de probabilidad, aunque proporcionan descripciones incompletas.

Tipos de
medidas de
distribuciones
de probabilidad

- medidas de tendencia central o de localización. (valor esperado, moda)
- medidas de dispersión (varianza, desviación típica)
- medidas de posición (cuantiles)



MEDIDAS DE LOCALIZACIÓN: ESPERANZA MATEMÁTICA.

La **esperanza matemática, valor esperado o media, $E(X)$** es el valor medio que esperaríamos que tomase la variable aleatoria X si realizásemos el experimento aleatorio un número infinito de veces. Es un concepto análogo a la media aritmética de un conjunto de datos.

Si X es una variable aleatoria discreta:

$$E(X) \equiv \mu_X = \sum_i x_i p_X(x_i)$$

Si X es una variable aleatoria continua:

$$E(X) \equiv \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Propiedades. El operador esperanza es un operador lineal

$$E(cX) = cE(X)$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$



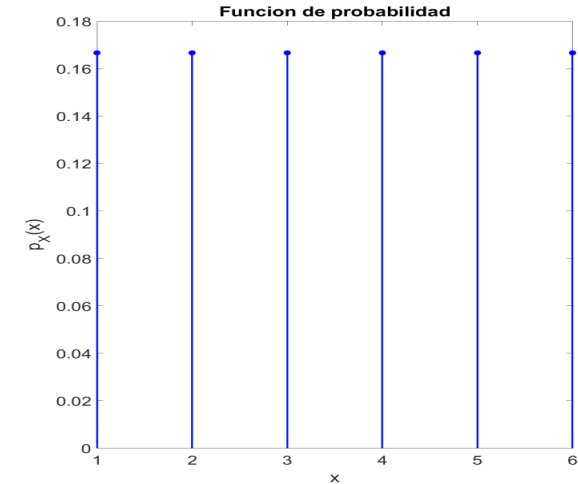
MEDIDAS DE LOCALIZACIÓN: ESPERANZA MATEMÁTICA.

Si X es una v.a. discreta: $E(X) \equiv \mu_x = \sum_i x_i p_X(x_i)$ Si X es una v.a. continua: $E(X) \equiv \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$

Ejercicio 1 Calcula el valor esperado asociado al experimento aleatorio lanzar un dado, donde X ="número de puntos obtenidos al lanzar un dado".

$$p_X(x) = 1/6 \text{ si } x=1,2,3,4,5,6$$

$$E(X) = \sum_i x_i p_X(x_i)$$



Ejercicio 2. Calcula el valor esperado de la siguiente variable aleatoria X ="número de caras al lanzar una moneda".

Ejercicio 3. Calcula el valor esperado asociado a la variable aleatoria Y dada la siguiente función de densidad.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

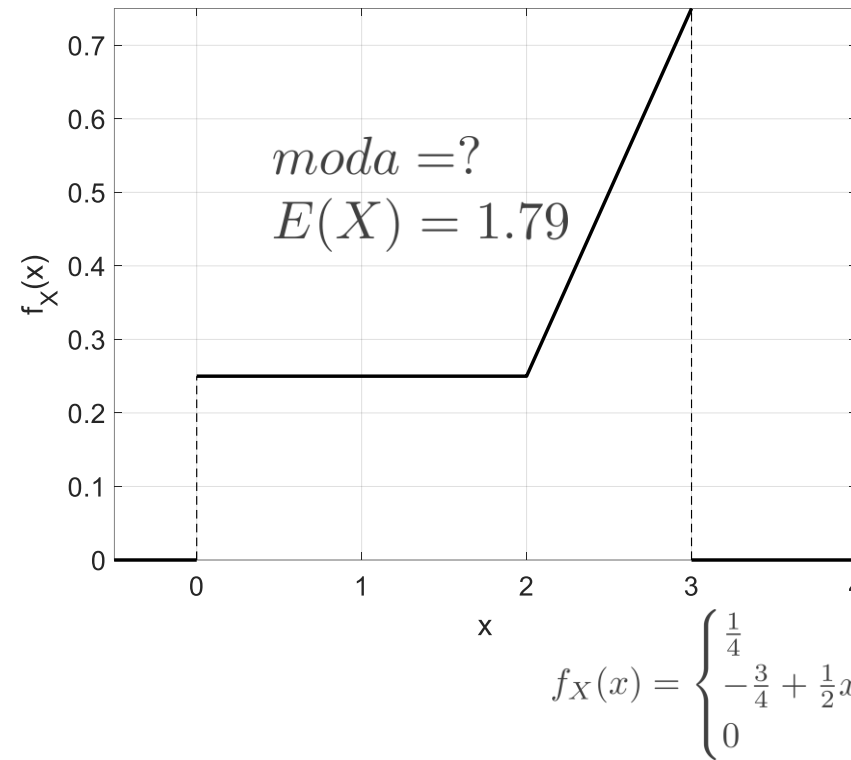
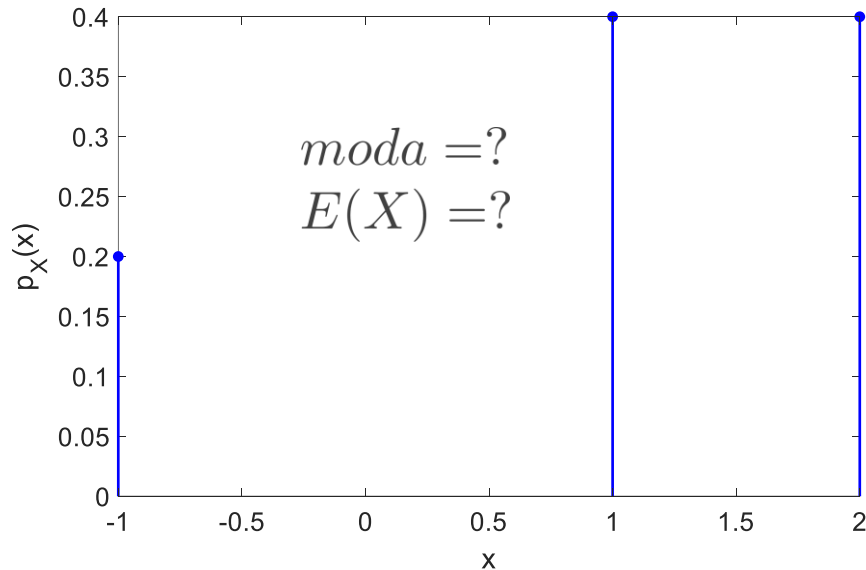


MEDIDAS DE LOCALIZACIÓN: MODA.

La **moda de una variable aleatoria** nos informa sobre el valor (o valores) más probables que puede tomar una variable aleatoria.

La moda de una variable aleatoria discreta es el valor que tiene mayor probabilidad y en el caso de variable aleatoria continua el valor con mayor función de densidad.

Ejercicio.



MEDIDAS DE DISPERSIÓN.

La **varianza** de una variable aleatoria, se designa como $\sigma_X^2 = \text{var}(\mathbf{X}) \equiv E((\mathbf{X} - \mu_X)^2)$ se define como la esperanza matemática de $(X - \mu_X)^2$.

$$\text{Var}(X) \equiv E((X - \mu_X)^2) = E(X^2) - \mu_X^2$$

Si X es una variable aleatoria discreta: $\text{var}(X) = E((X - \mu_X)^2) = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p_X(x_i)$

Si X es una variable aleatoria continua: $\text{var}(X) = E((X - \mu_X)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$

La **desviación típica** de una variable aleatoria y el coeficiente de variación se definen como:

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

$$CV = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

Ejercicio.

$$\text{a) } p_X(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{para } x = 0, \\ 0.8 & \text{para } x = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \begin{matrix} \mu_X = 0.8 \\ \text{Var}(X) = 0.16 \end{matrix}$$

$$\text{b) } f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \begin{matrix} \mu_Y = 0.5 \\ \text{Var}(Y) = 0.08 \end{matrix}$$



MEDIDAS DE POSICIÓN.

El **cuantil** q_α de orden α de una variable aleatoria X es cualquier valor numérico tal que

$$P(X \leq q_\alpha) \geq \alpha \quad y \quad P(X \geq q_\alpha) \geq 1 - \alpha \quad \longrightarrow \quad F_X(q_\alpha) - P(X = q_\alpha) \leq \alpha \leq F_X(q_\alpha)$$

donde α puede tomar valores entre 0 y 1.

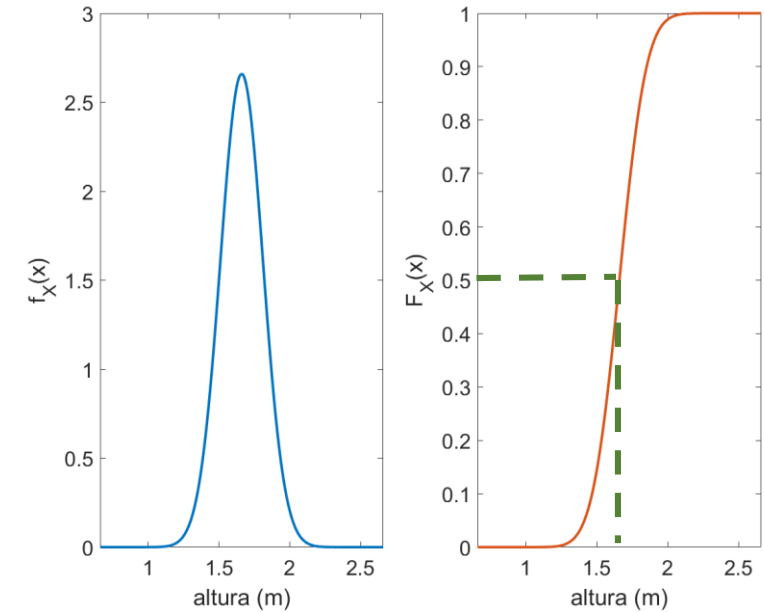
Para variables aleatorias continuas la función cuantil es la inversa de la función de distribución.

$$F_X(q_\alpha) \equiv P(X \leq q_\alpha) = \alpha$$

Mediana: $q_{0.5}$

Cuartiles: $Q_1 = q_{0.25}$
 $Q_2 = q_{0.5}$
 $Q_3 = q_{0.75}$

Rango intercuartílico: $Q_3 - Q_1$



$$q_{0.5} = 1.66m$$

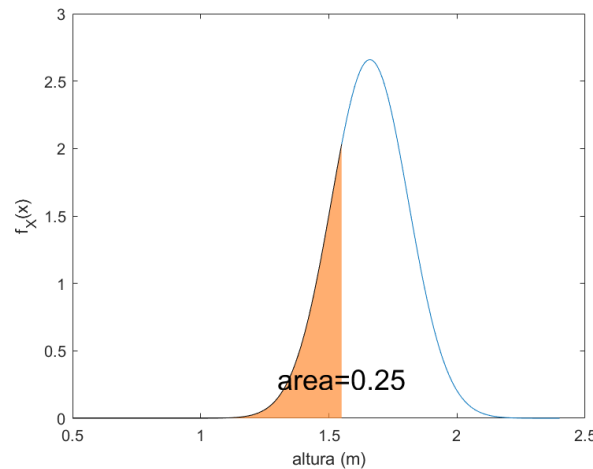
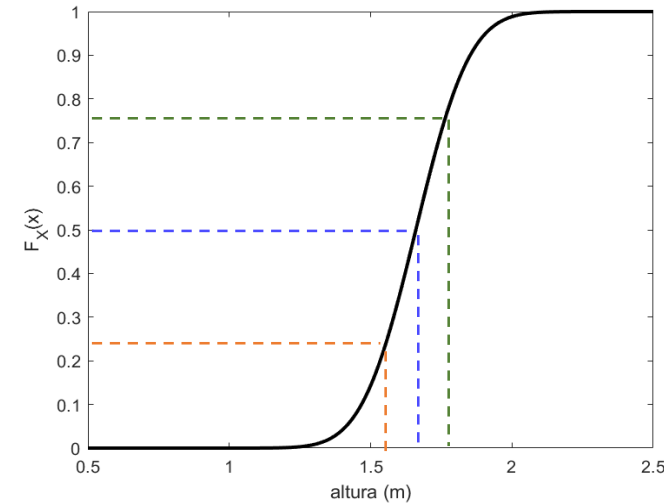


MEDIDAS DE POSICIÓN.

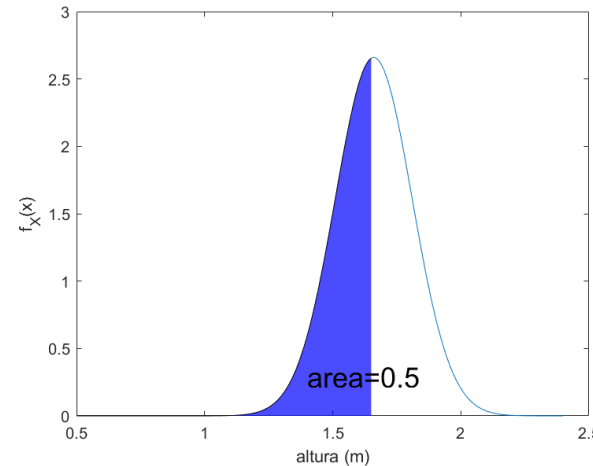
Ejemplo. Cuartiles de la variable aleatoria:
X: “altura (metros) de un alumno”.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1.66}{0.15}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

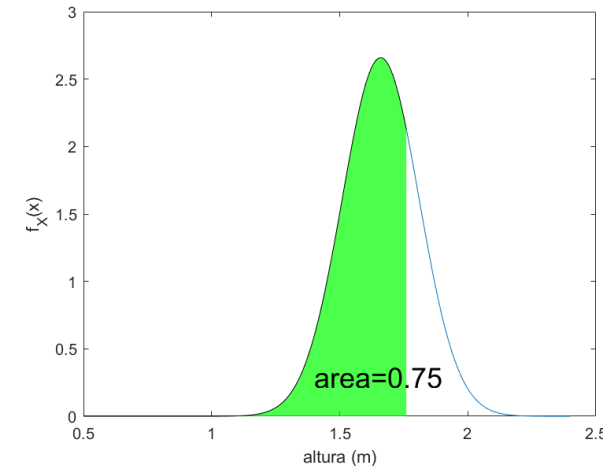
$F_X(x)$ no tiene expresión analítica



$$F_X(q_{0.25}) = P(X \leq 1.558) = \int_{-\infty}^{1.558} f_X(x) dx = 0.25$$



$$F_X(q_{0.5}) = P(X \leq 1.66) = \int_{-\infty}^{1.66} f_X(x) dx = 0.5$$



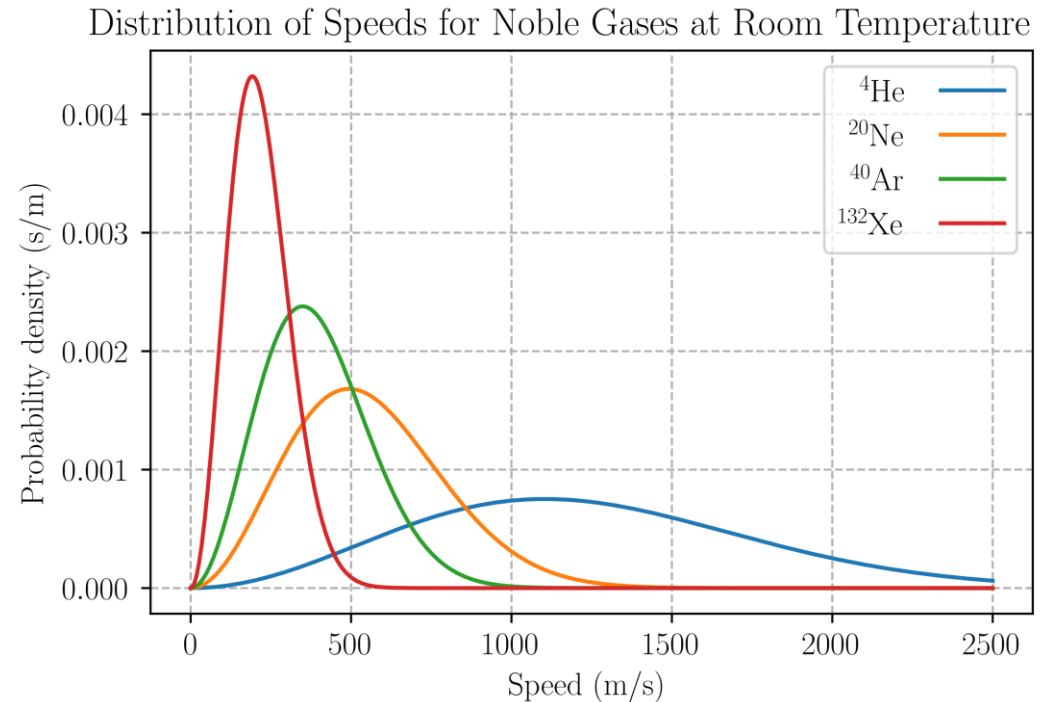
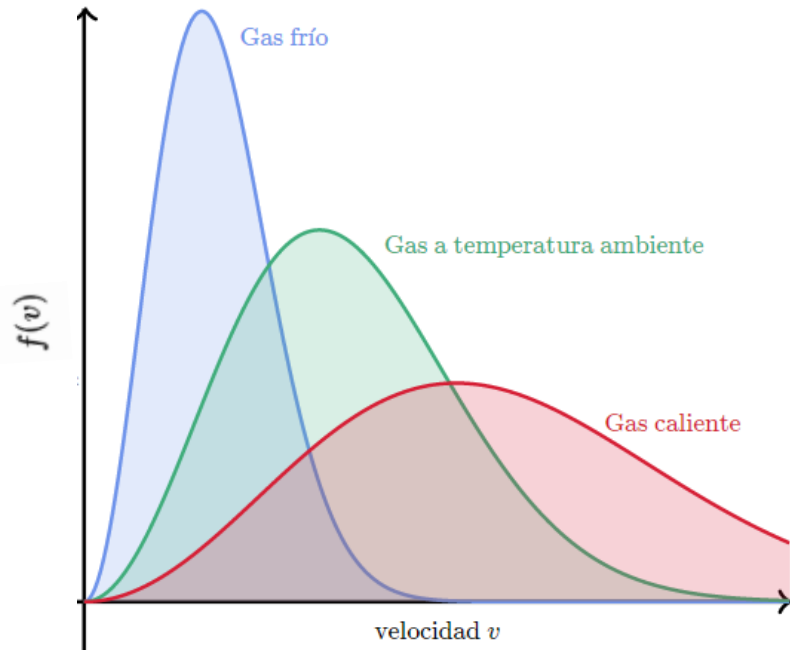
$$F_X(q_{0.75}) = P(X \leq 1.761) = \int_{-\infty}^{1.761} f_X(x) dx = 0.75$$



EJEMPLO DE APLICACIÓN.

Ejemplo. La distribución de Maxwell–Boltzmann

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad v > 0$$

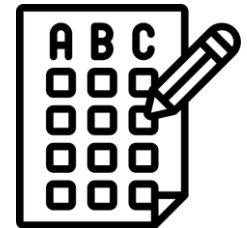


Completa la frase. A igual temperatura, la velocidad de las partículas con mayor masa atómica es _____ que las de menor masa atómica.



Ejercicio.

- a) En una pregunta tipo test con dos opciones posibles, el estudiante obtiene una puntuación s si acierta y una puntuación $-a \cdot s$ si falla, siendo a un factor de penalización. Determinar el valor del factor de penalización a para que el valor esperado de la puntuación de un estudiante que responde al azar sea igual a cero.
- b) Determina dicho factor de penalización a en el caso de tratarse de una pregunta con tres respuestas posibles.
- c) Determinar dicho factor de penalización en el caso de tratarse de una pregunta con n respuestas posibles.



EJERCICIOS.

Ejercicio 1. La demanda, expresada en toneladas, de un determinado producto es una variable aleatoria cuya función de densidad es. ¿Cuáles son la media, la varianza y la mediana de esta demanda?

$$f_X(x) = \begin{cases} x/6 & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

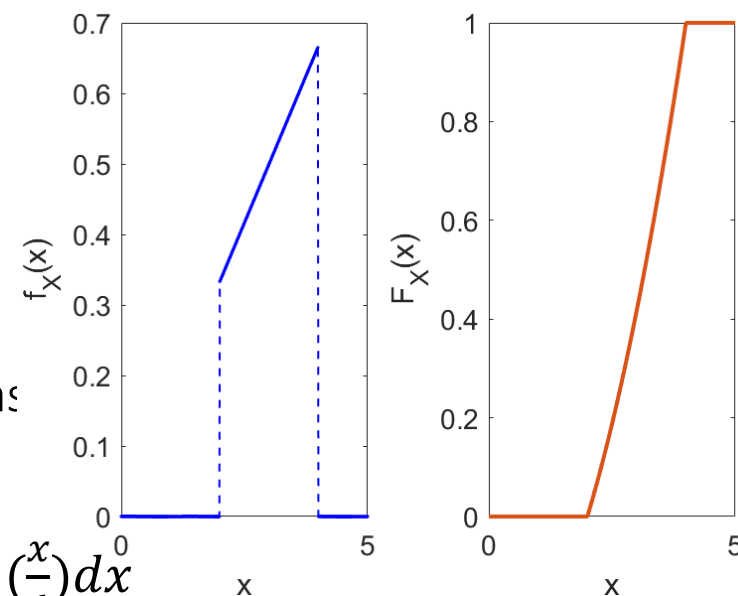
$$a) E(X) = \int_2^4 x f_X(x) dx = \int_2^4 x \frac{x}{6} dx = \frac{x^3}{18} \Big|_2^4 = \frac{x^3}{18} = \frac{56}{18} = 3.11 \text{ toneladas}$$

$$b) \text{Var}(X) \equiv E((X - \mu_X)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx = \int_2^4 (x - 3.11)^2 \left(\frac{x}{6}\right) dx$$

(otra opción)

$$\text{Var}(X) = \sigma_x^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = 10 - \left(\frac{56}{18}\right)^2 = \mathbf{0.32 \text{ toneladas}^2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_2^4 x^2 \frac{x}{6} dx = \frac{x^4}{24} \Big|_2^4 = 10 \text{ toneladas}^2$$



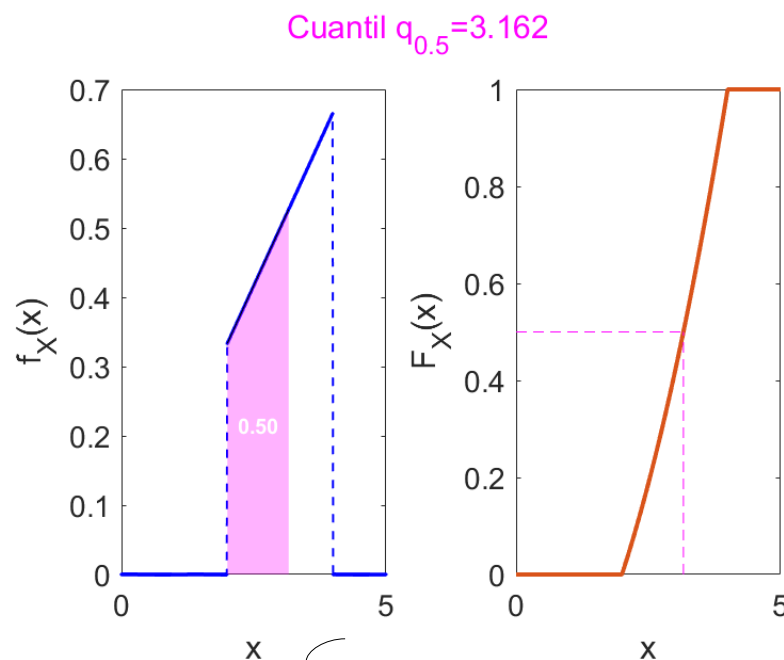
EJERCICIOS.

Ejercicio 1. La demanda, expresada en toneladas, de un determinado producto es una variable aleatoria cuya función de densidad es. ¿Cuáles son la media, la varianza y la mediana de esta demanda?

$$f_X(x) = \begin{cases} x/6 & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$c) F_X(q_{0.5}) \equiv P(X \leq q_{0.5}) = \int_{-\infty}^{q_{0.5}} f_X(x) dx = 0.5$$

$$\int_{-\infty}^{q_{0.5}} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{q_{0.5}} \frac{x}{6} dx = \frac{x^2}{12} \Big|_2^{q_{0.5}} = \frac{q_{0.5}^2 - 4}{12} = 0.5 \rightarrow q_{0.5} = \sqrt{10} = \mathbf{3.162 \text{ toneladas}}$$

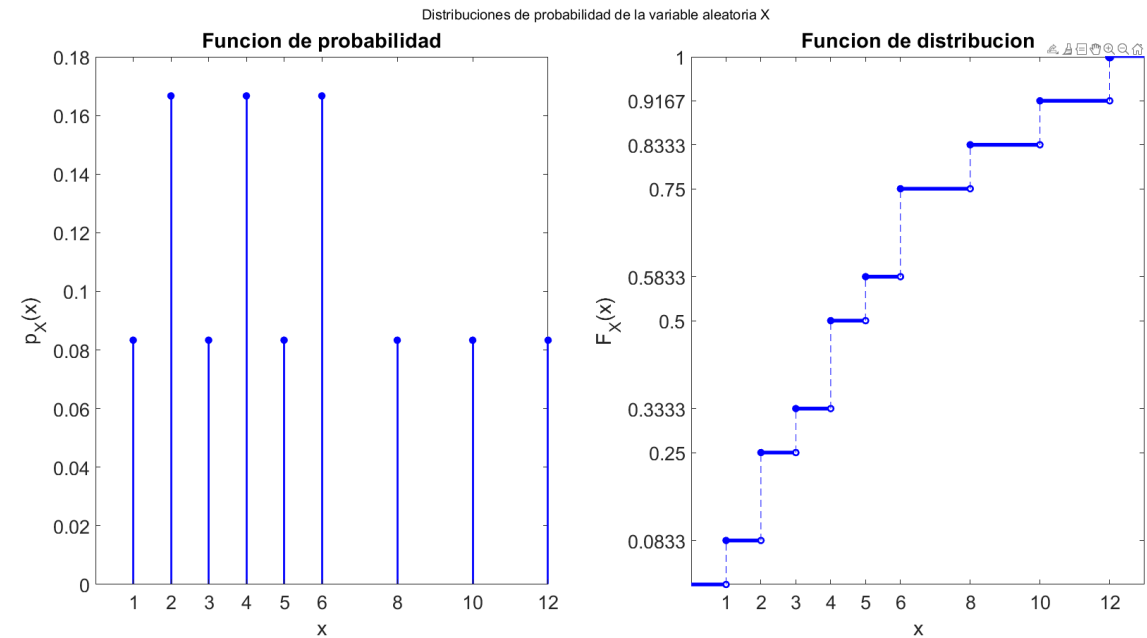


$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^2 - 4}{12} & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$



EJERCICIOS PROPUESTOS.

Ejercicio. Se tira un dado y una moneda. Si sale cara se apunta la puntuación que marca el dado. Si sale cruz se apunta la puntuación del dado multiplicada por dos. Sea X la puntuación total obtenida. Calcular la función de probabilidad de X , su esperanza y su desviación típica.



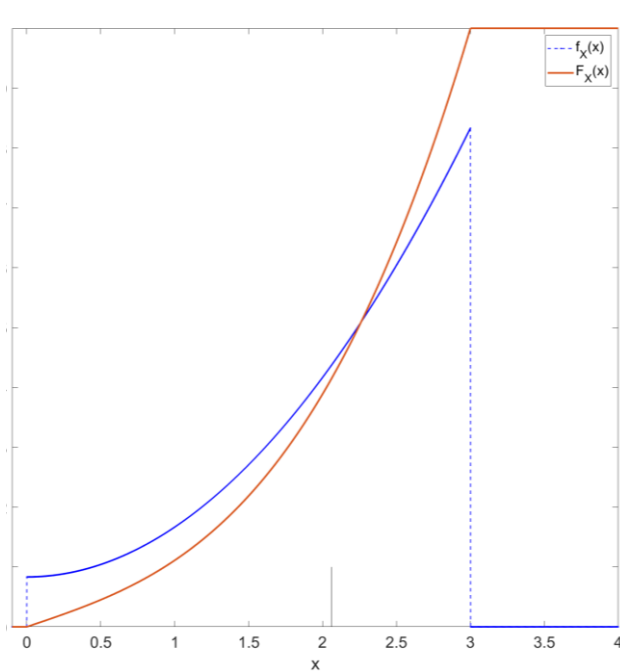
► 5.25 puntos, 10.35 puntos², 3.218 puntos



EJERCICIOS PROPUESTOS.

Ejercicio. Dada la función $f(x) = a(1 + x^2)$ si $x \in [0, 3]$ (y 0 en otro caso)

- a) Hallar el valor de a para que sea una función de densidad.
- b) Hallar el valor esperado y la varianza de la distribución.
- c) Hallar la probabilidad de que la variable aleatoria sea mayor que su valor esperado.



```
x=-0.1:0.001:4;
figure(1)
%funcion de densidad
fX = @(x)(1/12)*(1+x.^2).*(x>=0 & x<=3);
plot(x,fX(x),'--o')
%función de distribución
FX = @(x)(1/12*x+1/36*x.^3).*(x>=0 & x<3) + 1*(x>=3);
hold on
plot(x,FX(x),'LineWidth',2)
legend('f_X(x)', 'F_X(x)')
```

► a) 1/12, b) 2.0625, 0.5461, c) 0.5844

