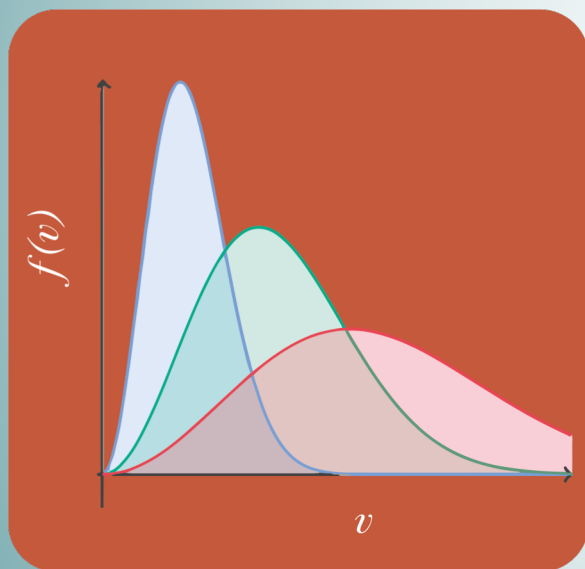


Métodos Matemáticos en la Ingeniería

BLOQUE I. ESTADÍSTICA

TEMA 4. DISTRIBUCIONES COMUNES



Vera Egorova

Sara Pérez Carabaza

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Este material se publica bajo la siguiente licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



ÍNDICE.

- [Introducción](#)
- Distribuciones comunes discretas:
 - [Uniforme discreta](#)
 - [Bernoulli](#)
 - [Binomial](#)
 - [Poisson](#)
- Distribuciones comunes continuas:
 - [Uniforme continua](#)
 - [Normal](#)
- [Aproximaciones](#)

Objetivos

1. Conocer el objeto de la estadística descriptiva.
2. Saber diferenciar entre población y muestra.
3. Distinguir entre tipos de datos.
4. Explorar y analizar datos de una muestra mediante tablas, estadísticos y gráficos.



INTRODUCCIÓN A LAS DISTRIBUCIONES COMUNES.

Las **distribuciones comunes** son distribuciones de probabilidad que aparecen en numerosos experimentos aleatorios reales. Estas suelen tener uno o varios **parámetros** que permiten su ajuste al experimento en concreto.

En este tema veremos algunas de las distribuciones comunes más relevantes, y aprenderemos a detectar aquellos problemas de la vida real que se corresponden con ellas. Una de las **ventajas** de las distribuciones comunes, es que **una vez conocida el tipo de distribución y sus parámetros, podemos obtener distintas características como el valor esperado rápidamente utilizando expresiones conocidas.**

Distribuciones
comunes discretas

[distribución Uniforme \$U\(a,b\)\$](#)
[distribución de Bernoulli \$Ber\(p\)\$](#)
[distribución Binomial \$B\(n,p\)\$](#)
[distribución de Poisson \$Po\(\lambda\)\$](#)

Distribuciones
comunes continuas

[distribución Uniforme \$U\(a,b\)\$](#)
[distribución Normal \$N\(\mu, \sigma\)\$](#)

Notación $X \sim B(n,p)$ (la variable aleatoria X se distribuye de acuerdo a la distribución de probabilidad binomial)

v.a. discretas: $p_X(x) \equiv p_{B(n,p)}(x) \equiv p_B(x; n, p)$ y $F_X(x) \equiv F_{B(n,p)}(x) \equiv F_B(x; n, p)$

v.a. continuas: $f_X(x) \equiv f_{Ex(\alpha)}(x) \equiv f_{Ex}(x; \alpha)$ y $F_X(x) \equiv F_{Ex(\alpha)}(x) \equiv F_{Ex}(x; \alpha)$

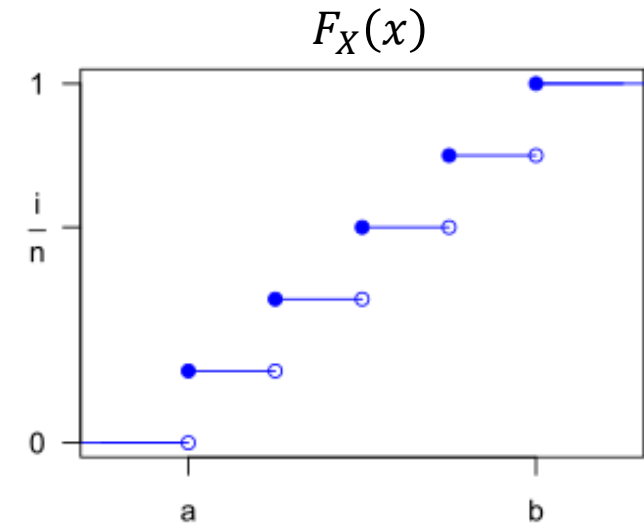
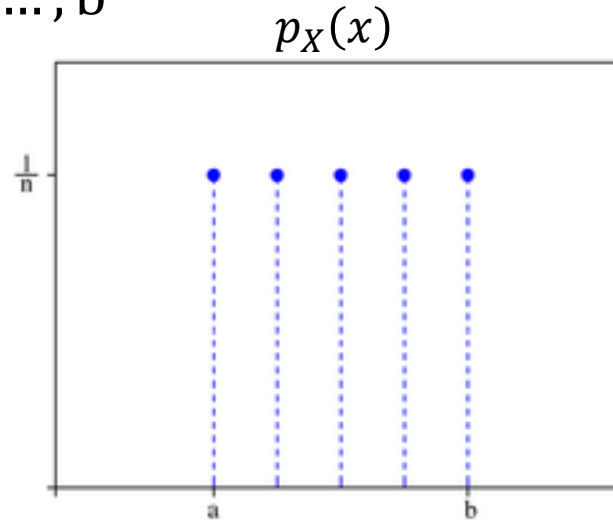


DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA.

La **distribución uniforme discreta** describe las situaciones en las que una variable aleatoria discreta toma n posibles valores equiprobables en el intervalo $[a, b]$.

$$p_X(x) = \frac{1}{n} = \frac{1}{b-a+1} \quad x = a, a+1, \dots, b$$

$$F_X(x) = \frac{x - a + 1}{n}$$



Medidas: $\mu = \frac{a+b}{2} \quad \sigma^2 = \frac{(n^2-1)}{12}$

Pregunta. ¿Qué variables aleatorias se te ocurren que se puedan modelar con una distribución de probabilidad uniforme discreta?



DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI. $\text{Ber}(p)$.

Esta distribución se corresponde al experimento aleatorio más sencillo conocido como **ensayo de Bernoulli**, en el que solo hay dos posibles resultados excluyentes, a los que nos solemos referir como “éxito” y “fracaso”. La **variable aleatoria de Bernoulli asigna 0 al fracaso y 1 al éxito**. El éxito se obtiene con probabilidad p .

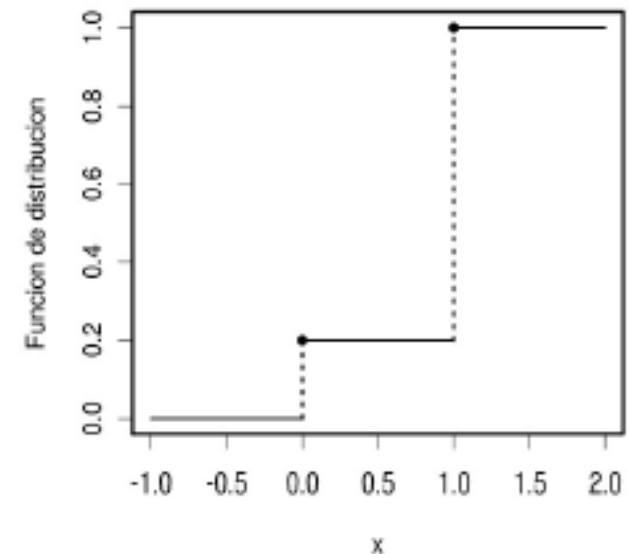
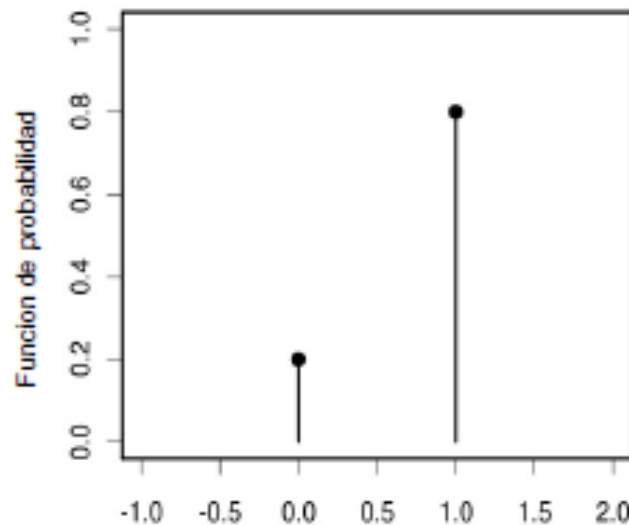
$$p_X(x) = \begin{cases} 1-p & \text{si } x=0 \\ p & \text{si } x=1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Medidas: $\mu_X = p$
 $\text{Var}(X) = p(1 - p)$

$$X \sim \text{Ber}(p)$$

Parámetro p : probabilidad de éxito



DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI. $\text{Ber}(p)$.

X : variable aleatoria de Bernoulli asigna 0 al fracaso y 1 al éxito (con probabilidad de éxito p).

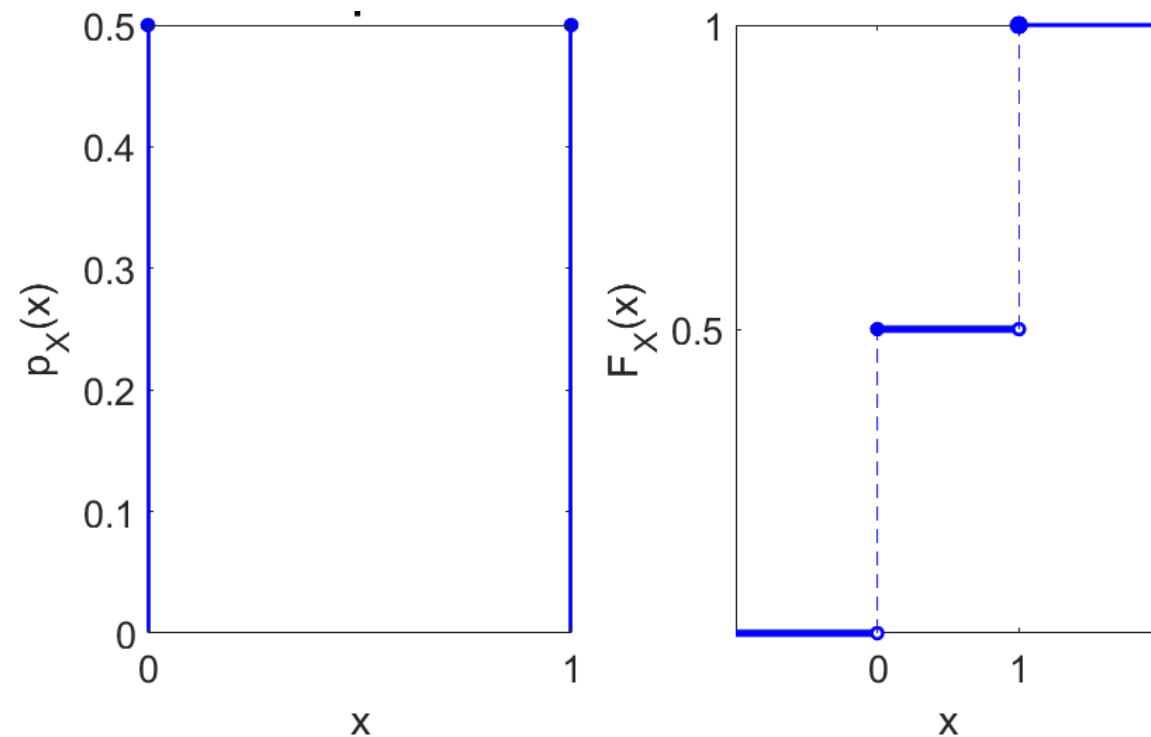
Ejemplo 1. Distribuciones de v.a.: X : “1 si al lanzar una moneda al aire sale éxito, 0 si sale cruz.”

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.5 & x=0 \\ 0.5 & x=1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Medidas: $E(X)=p=0.5$ éxitos

$\text{Var}(X)=p(1-p)=0.25$ éxitos²



DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI. $\text{Ber}(p)$.

X : variable aleatoria de Bernoulli asigna 0 al fracaso y 1 al éxito (con probabilidad de éxito p).

Ejemplo 2.

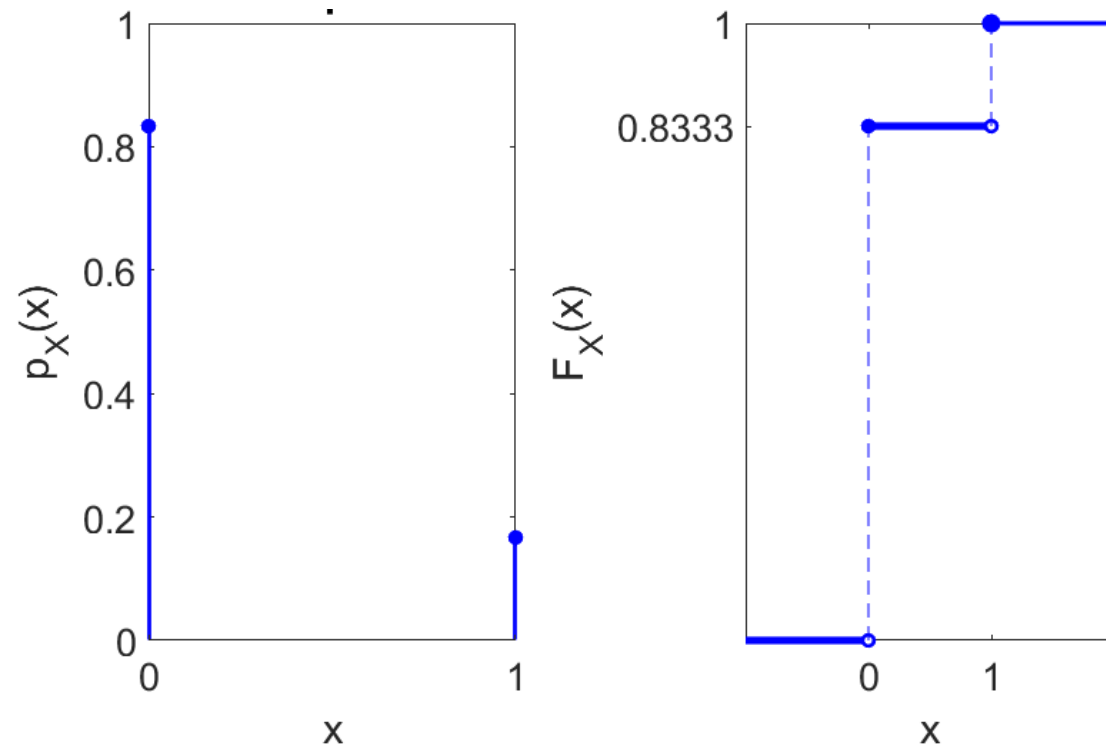
X : “1 si al lanzar un dado al aire sale un 2, 0 si obtenemos otro resultado.”

$$p_X(x) = \begin{cases} 5/6 & x=0 \\ 1/6 & x=1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 5/6 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Medidas: $E(X) = p = 1/6 = 0.1667$ éxitos

$$\text{Var}(X) = p(1-p) = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = 0.1389 \text{ éxitos}^2$$



DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. $B(n,p)$.

Una variable aleatoria X se llama binomial si su valor es igual al número de éxitos que ocurren en n pruebas independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito p .

Para que X sea una variable aleatoria Binomial:

- La probabilidad de éxito p es la misma en todos los ensayos de Bernoulli.
- Los intentos son independientes.

número de ensayos de Bernoulli

$$X \sim B(n,p)$$

probabilidad de éxito de
cada ensayo de Bernoulli

$$p_X(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$\searrow \frac{n!}{(n-x)!x!}$ (nC r en tu calculadora)

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$$

Medidas: $\mu_X = np$, $Var(X) = np(1-p)$

$$B(1,p) = \text{Ber}(p)$$

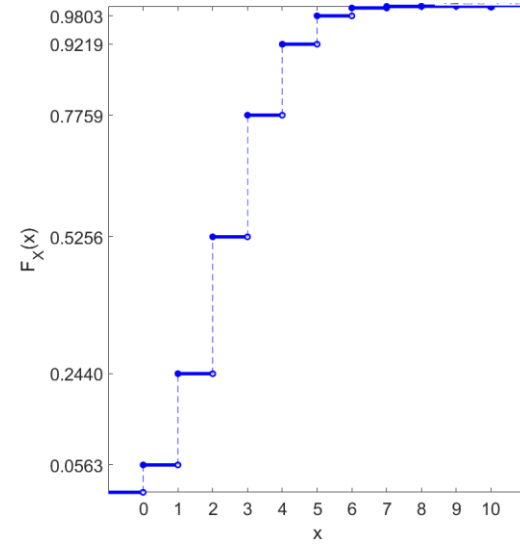
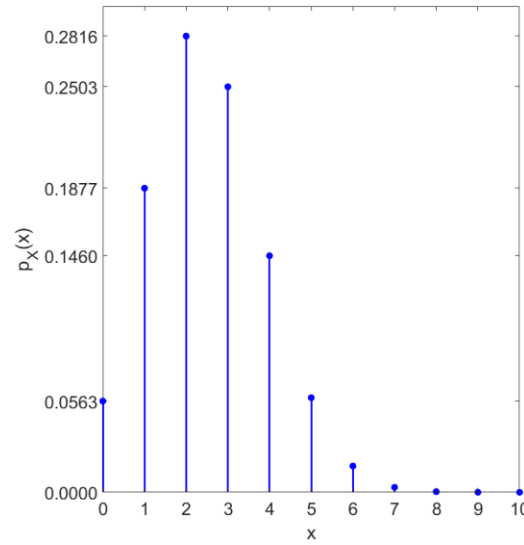


DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. B(n,p).

Ejemplo 1. Binomial B(10,0.25).

X: “número de éxitos que ocurren en $n=10$ ensayos independientes de Bernoulli teniendo todos la misma probabilidad de éxito $p=0.25$ ”

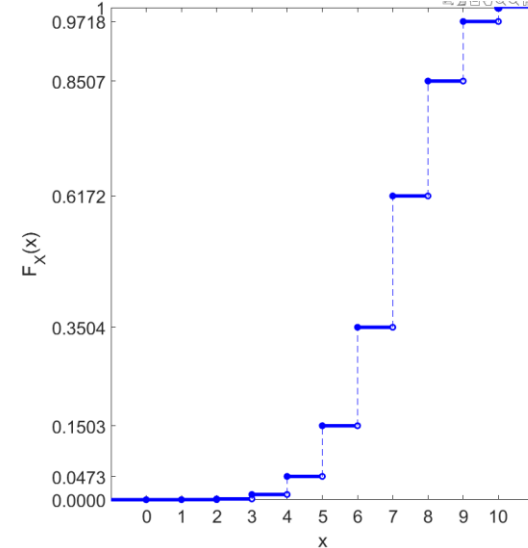
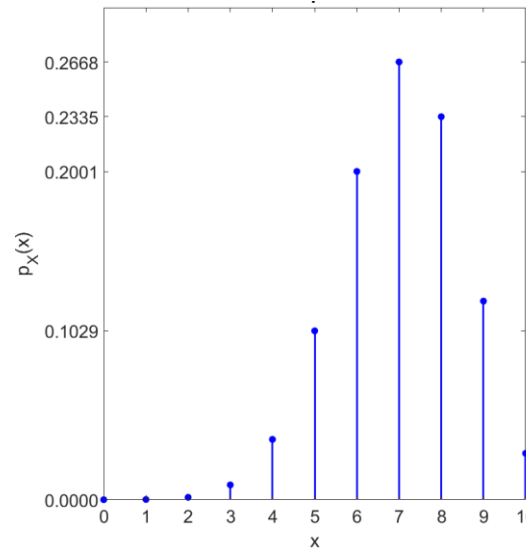
$$p_X(x) = \binom{10}{x} \cdot 0.25^x (1 - 0.25)^{10-x} \quad x=0,1,\dots,9,10$$



Ejemplo 2. Binomial B(10,0.7).

X: “número de éxitos que ocurren en $n=10$ ensayos independientes de Bernoulli teniendo todos la misma probabilidad de éxito $p=0.7$ ”

$$p_X(x) = \binom{10}{x} \cdot 0.7^x (1 - 0.7)^{10-x} \quad x=0,1,\dots,9,10$$

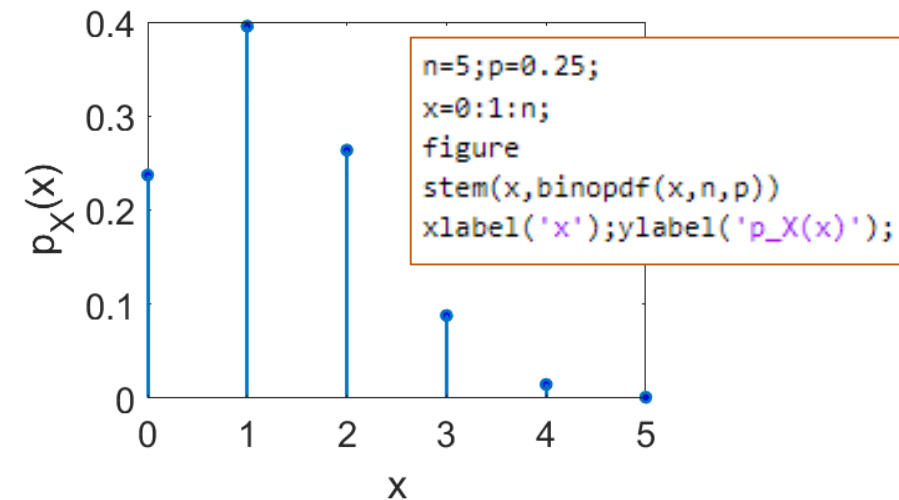


DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. $B(n,p)$.

X : número de éxitos que ocurren en n pruebas independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito p . $X \sim B(n,p)$

Ejercicio 1. ¿Siguen las variables aleatorias X e Y una distribución binomial? ¿Con qué parámetros?

a) X : “Número de oros al sacar 5 cartas de una baraja española y devolverlas a la baraja (con remplazo)”.



b) Y : “Número de bastos al sacar 10 cartas de una baraja española, sin devolverlas a la baraja (sin remplazo)”.



DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. $B(n,p)$.

Ejercicio 2. La probabilidad de que una pieza sea de mala calidad es 0.1, ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 piezas fabricadas una sea de mala calidad? ¿Y de que al menos una sea de mala calidad?

Y: “1 si una pieza es de mala calidad 0 si es de buena calidad”. $Y \sim \text{Ber}(0.1)$

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0.9 & y=0 \text{ buena calidad "fracaso"} \\ 0.1 & y=1 \text{ mala calidad "éxito"} \end{cases}$$

X: “número de piezas de mala calidad en 10 piezas”. $X \sim B(10,0.1)$

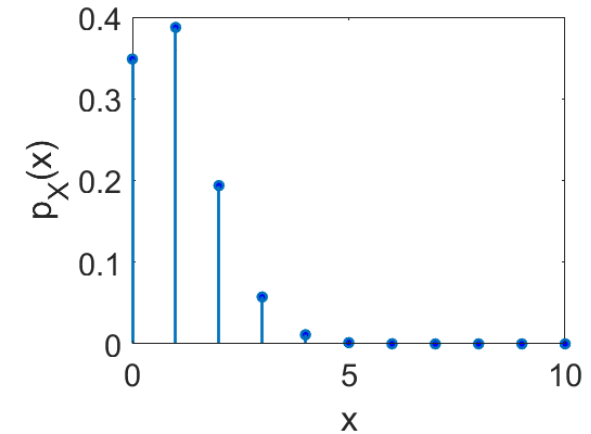
$$p_X(x) = \binom{10}{x} 0.1^x (1 - 0.1)^{10-x} \quad x=0,1,2,\dots,10$$

$$\text{¿P}(X=1)? \quad p_X(1) = \binom{10}{1} \cdot 0.1^1 (1 - 0.1)^{10-1} = 10 \cdot 0.1 \cdot 0.9^9 = \mathbf{0.387}$$

$$\text{¿P}(X \geq 1)? \quad P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = 1 - p_X(0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.1^0 (1 - 0.1)^{10-0} = \mathbf{0.6513}$$

$$P(X \geq 1) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) + p_X(4) + p_X(5) + p_X(6) + p_X(7) + p_X(8) + p_X(9) + p_X(10) = 0.6513$$

Ejercicio 3. Comprueba que al repetir el ejercicio anterior considerando “pieza de buena calidad” como éxito obtenemos los mismos resultados.



`binopdf(1,10,0.1)`
`1-binopdf(0,10,0.1)`

`binopdf(9,10,0.9)`
`binocdf(9,10,0.9)`



DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. $B(n,p)$.

¿De donde viene la expresión de $p_X(x)$ para X una variable aleatoria binomial? $p_X(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x (1-p)^{n-x}$

Realizamos 4 lanzamientos de una moneda, ¿probabilidad obtener 2 caras (“éxitos”)?

$p=0.5$

Moneda ($p=0.5$):

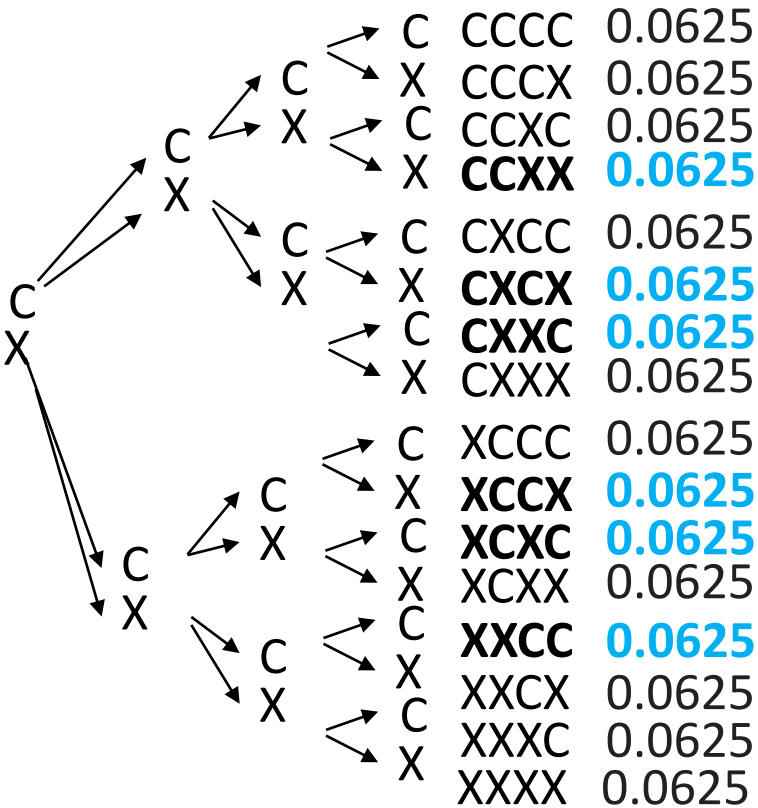
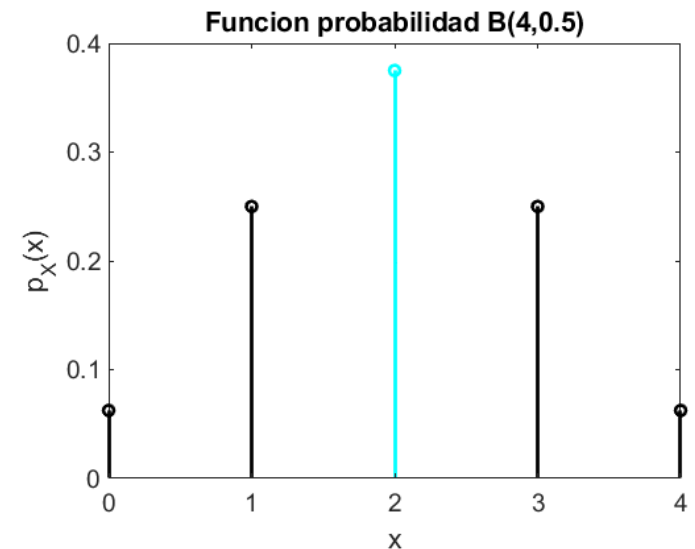
X : “número de caras obtenidas en 4 lanzamientos”

$X \sim B(4,0.5)$

$$p_X(2) = \binom{4}{2} \cdot 0.5^2 (0.5)^2 = 6 \cdot 0.0625 = 0.375$$

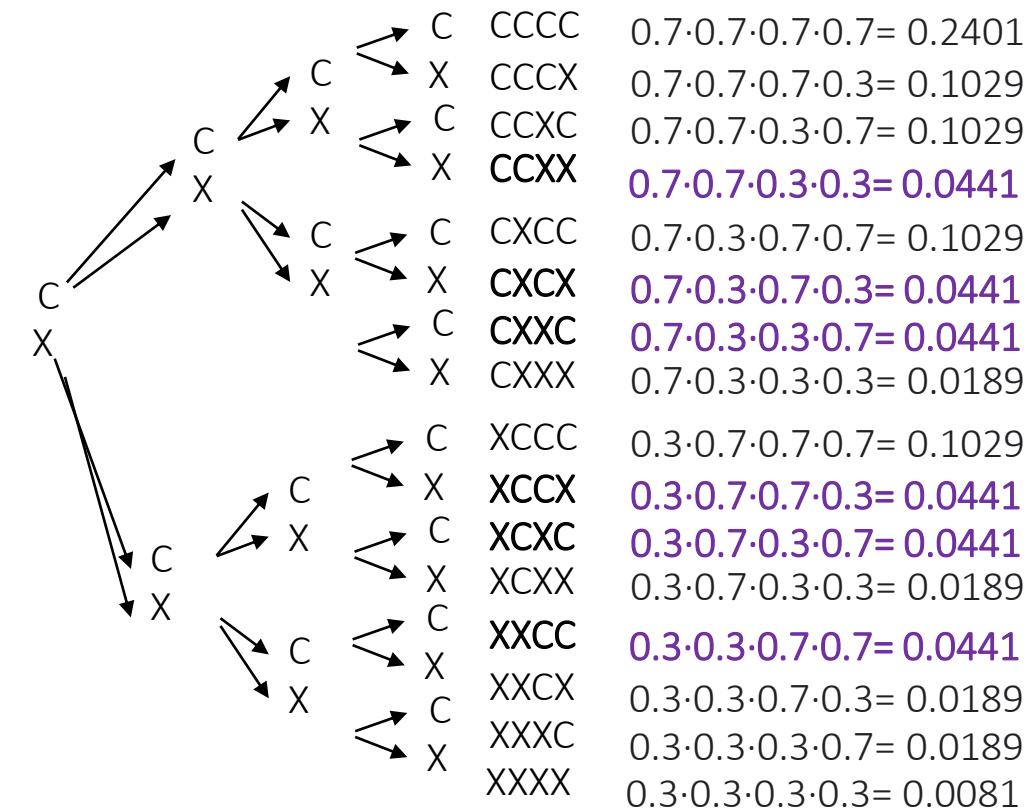
Laplace: $P(X = 2) = 6/16 = 0.375$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(\{CCXX\} \cup \{CXCX\} \cup \{CXXC\} \cup \{XCCX\} \cup \{XCXC\} \cup \{CXXC\}) = \\ &= P(\{CCXX\}) + P(\{CXCX\}) + P(\{CXXC\}) + P(\{XCCX\}) + P(\{XCXC\}) + P(\{CXXC\}) = \\ &= 6 \cdot 0.0625 = 0.375 \end{aligned}$$



DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. $B(n,p)$.

Pregunta. Has apostado una cena con tu amigo a que salen dos caras en 4 lanzamientos de moneda, ¿prefieres usar una moneda común o una trucada con probabilidad de cara $p = 0,7$?

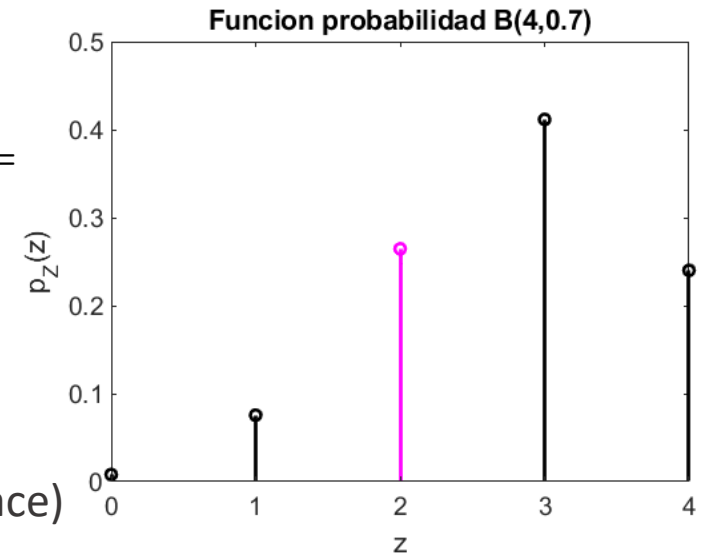


Moneda ($p = 0.7$):

Z: "número de caras obtenidas en 4 lanzamientos de una moneda con probabilidad de éxito 0.7"

$Z \sim B(4, 0.7)$

$$p_Z(2) = \binom{4}{2} \cdot 0.7^2 (0.3)^2 = 6 \cdot 0.0441 = 0.2646$$



(no se puede aplicar Laplace)

$$\begin{aligned} P(Z = 2) &= P(\{CCXX\} \cup \{CXCX\} \cup \{CXXC\} \cup \{XCCX\} \cup \{XCXC\} \cup \{CXXC\}) = \\ &= P(\{CCXX\}) + P(\{CXCX\}) + P(\{CXXC\}) + P(\{XCCX\}) + P(\{XCXC\}) + P(\{CXXC\}) = \\ &= 6 \cdot 0.0441 = 0.2646 \end{aligned}$$

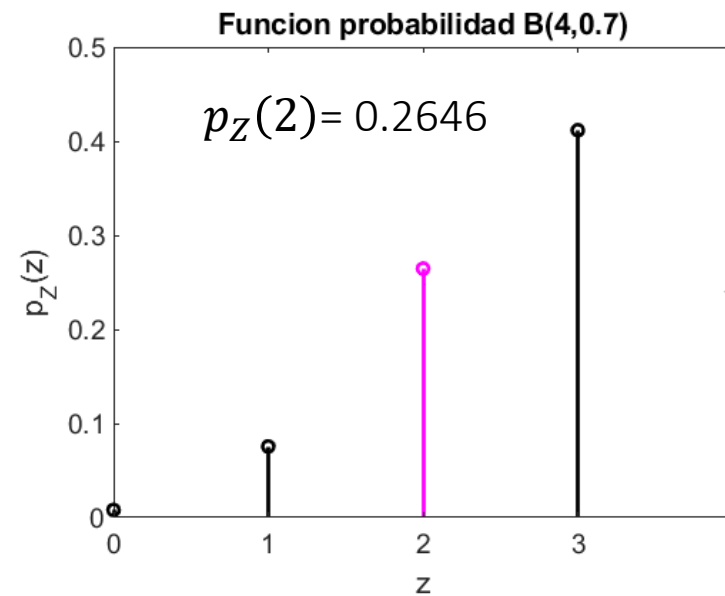
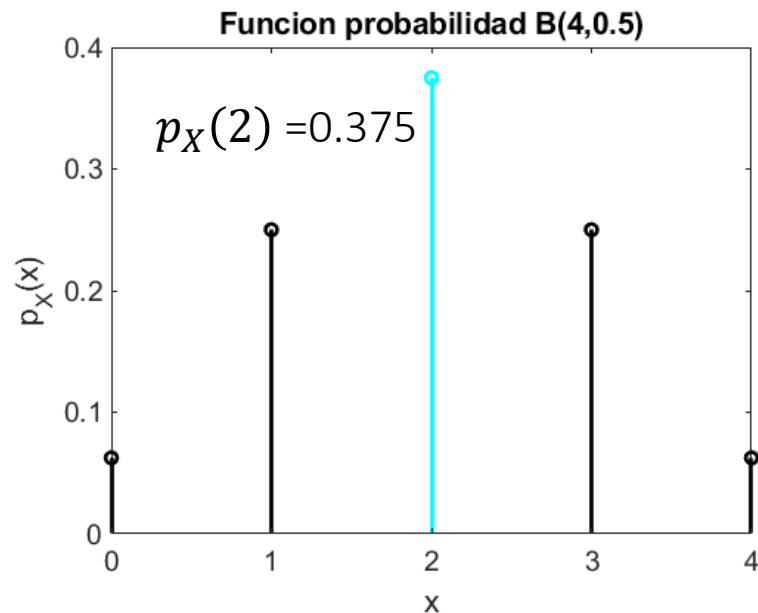


DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. $B(n,p)$.

Pregunta. Has apostado una cena con tu amigo a que salen dos caras en 4 lanzamientos de moneda, ¿prefieres usar una moneda común o una trucada con probabilidad de cara $p = 0,7$?

X : “número de caras obtenidas en 4 lanzamientos de una moneda con probabilidad de éxito 0.5”

Z : “número de caras obtenidas en 4 lanzamientos de una moneda con probabilidad de éxito 0.7”



DISTRIBUCIÓN UNIFORME CONTINUA. $U(a,b)$

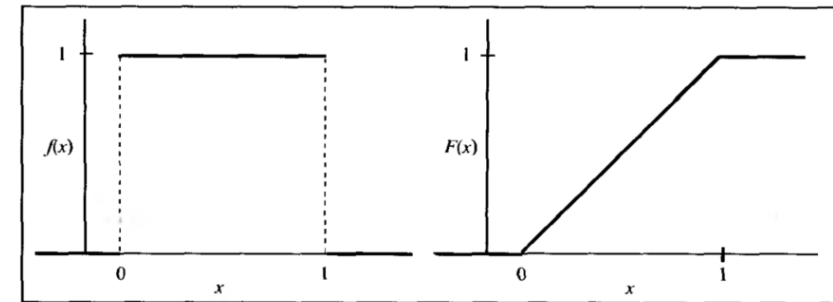
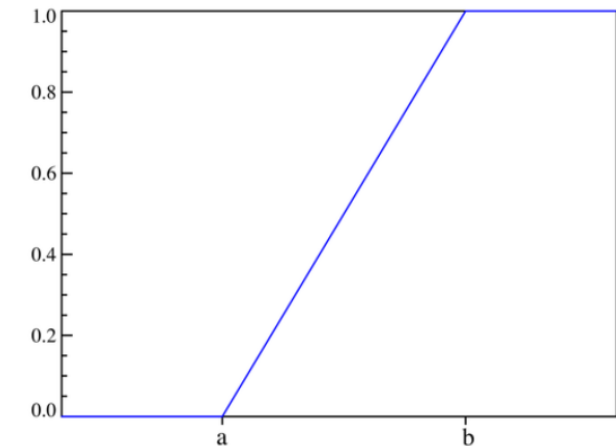
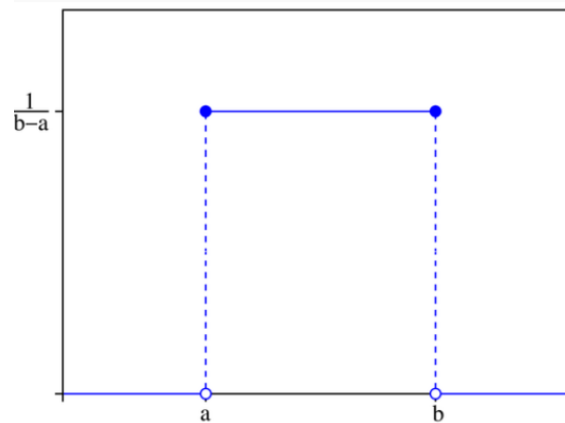
La **distribución uniforme continua** $U(a,b)$ distribución describe las situaciones en las que una variable aleatoria continua puede tomar cualquier valor en el intervalo $[a,b]$, siendo equiprobable cualquier subintervalo de igual longitud.

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

La **distribución uniforme estándar** $U(0,1)$ es un caso particular de distribución uniforme.



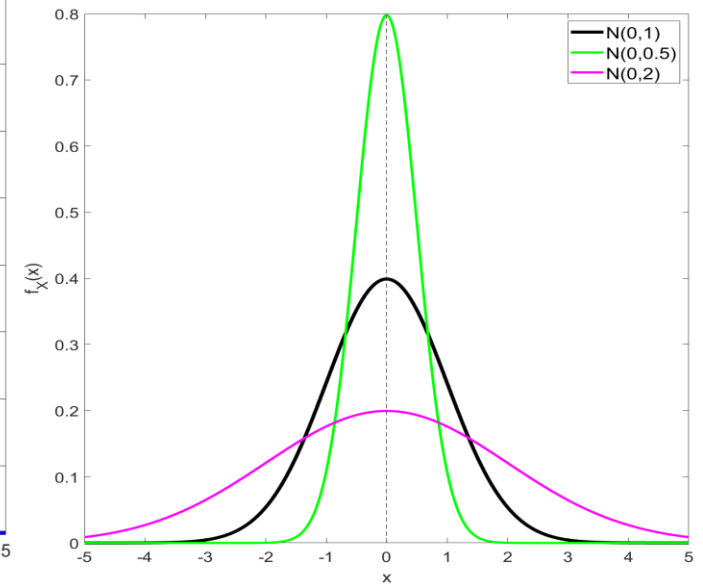
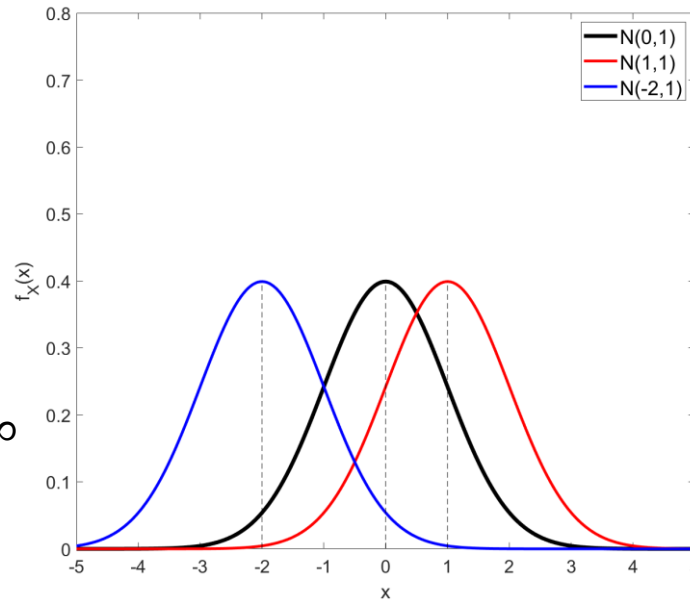
DISTRIBUCIÓN NORMAL. $N(\mu, \sigma)$.

La **distribución normal $N(\mu, \sigma)$** es una de las distribuciones más importantes y útiles ya que multitud de fenómenos se comportan como esta distribución: distribución de alturas, errores de medida, etc.

Media o valor esperado

$N(\mu, \sigma)$ → Desviación típica

$$f_{N(\mu, \sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$



Medidas: coinciden con los parámetros de la distribución.

Es una distribución simétrica (respecto a $x = \mu$) y unimodal. La media, moda y mediana coinciden.



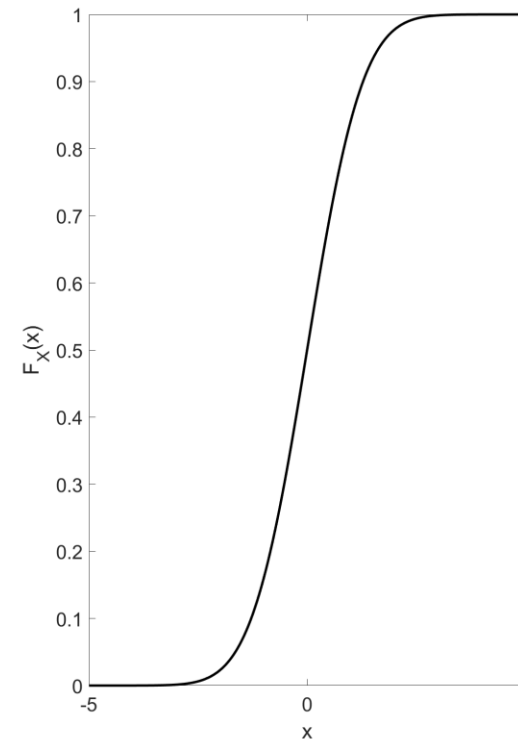
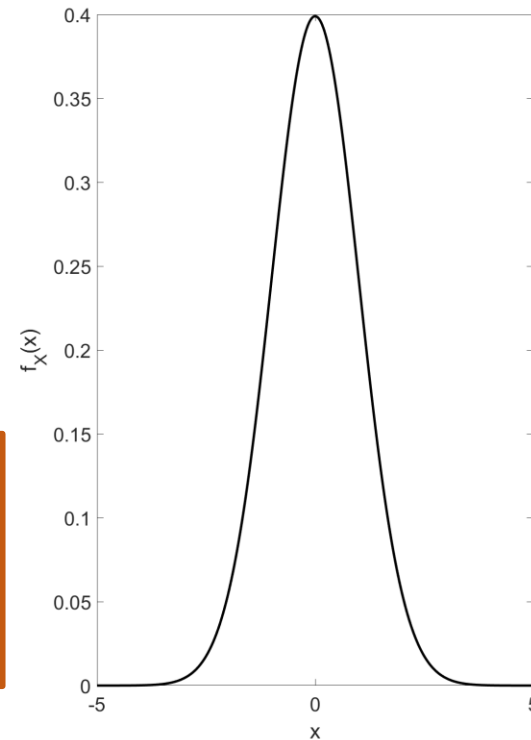
DISTRIBUCIÓN NORMAL. $N(\mu, \sigma)$.

$N(0, 1)$: distribución normal estándar o tipificada:

$$f_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad -\infty < x < \infty$$

$F_{N(0,1)}(x)$ no tiene expresión analítica

```
figure
x=-5:0.01:5;
plot(x,normpdf(x,0,1))
xlabel('x');ylabel('f_X(x)')
```



```
figure
x=-5:0.01:5;
plot(x,normcdf(x,0,1))
xlabel('x');ylabel('F_X(x)')
```



DISTRIBUCIÓN NORMAL. $N(\mu, \sigma)$.

Como $F_{N(\mu, \sigma)}(x)$ no tiene expresión analítica es habitual consultar tablas que contienen los valores de $F_{N(0,1)}(x)$ para distintos valores de x .

¿ $P(X \leq 1.02)$?

0.8461

`normcdf(1.02,0,1)`

Tabla 1. Función de distribución de la Normal $N(0,1)$.

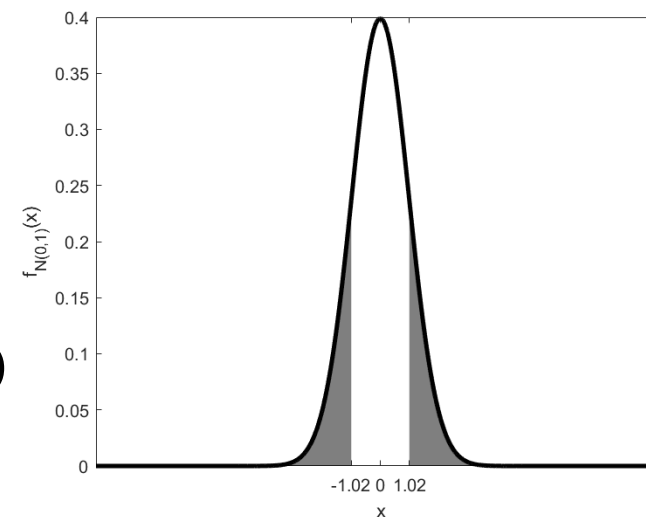
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706

Podemos utilizar la simetría respecto de $N(0,1)$ respecto al eje y para obtener su valor para valores de x negativos.

$$F_{N(0,1)}(-x) = 1 - F_{N(0,1)}(x)$$

simetría respecto a $x = 0$

$$\begin{aligned} P(X \leq -1.02) &\stackrel{\downarrow}{=} P(X \geq 1.02) = 1 - P(X \leq 1.02) = 1 - F_{N(0,1)}(1.02) \\ &= 1 - 0.8461 = 0.1539 \end{aligned}$$



TIPIFICACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL.

Tipificación. Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ mediante el cambio de variable $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ transforma la variable X en otra variable $Z \sim N(0, 1)$, a la que se le denomina Normal tipificada.

Ejemplo: Si $X \sim N(5, 2)$ entonces $Z = \frac{X - 5}{2} \sim N(0, 1)$

Podemos utilizar esta propiedad para buscar valores de cualquier función de distribución normal en la tabla de la función de distribución normal estándar/tipificada.

$$F_{N(\mu, \sigma)}(x) = F_{N(0, 1)}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Ejemplo. Si $X \sim N(5, 2)$ ¿ $P(X \leq 5)$ y $P(X \leq 4)$?

$$P(X < 5) = F_{N(5, 2)}(5) = P(X \leq 5) = P\left(\frac{X - 5}{2} \leq \frac{5 - 5}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{5 - 5}{2}\right) = F_{N(0, 1)}\left(\frac{5 - 5}{2}\right) = F_{N(0, 1)}(0) = 0.5$$

$$P(X < 4) = F_{N(5, 2)}(4) = P\left(\frac{X - 5}{2} \leq \frac{4 - 5}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{-1}{2}\right) = F_{N(0, 1)}(-0.5) = 1 - F_{N(0, 1)}(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

Tabla 1. Función de distribución de la v.a. normal $N(0, 1)$. [Fuente](#)

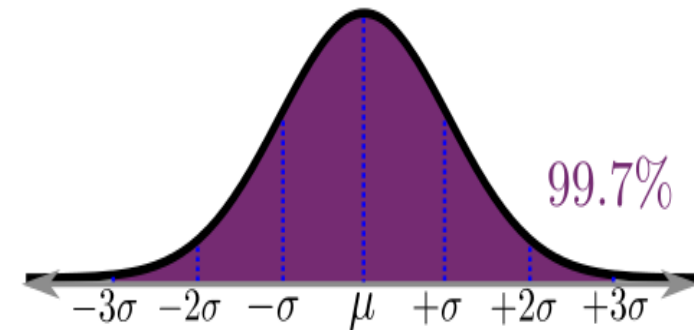
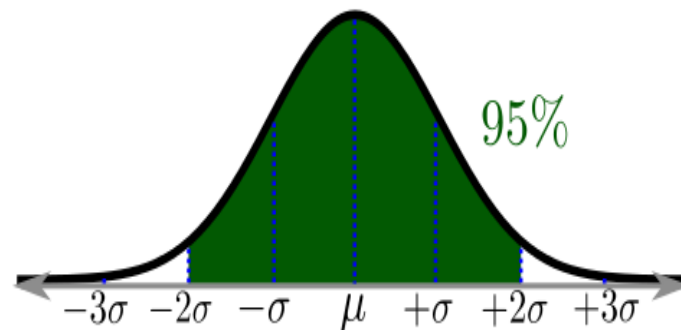
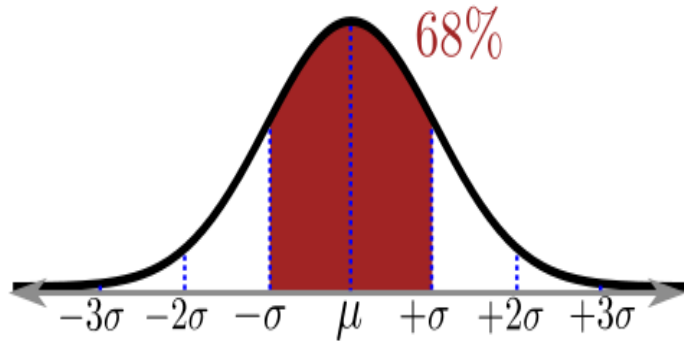
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706



DISTRIBUCIÓN NORMAL. $N(\mu, \sigma)$.

En las distribuciones normales, la probabilidad dentro de intervalos centrados en la media, $[\mu - \alpha\sigma, \mu + \alpha\sigma]$ con α un número real, es constante independientemente de la media μ y la desviación típica σ consideradas.

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827 \quad P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545 \quad P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$



DISTRIBUCIÓN NORMAL. $N(\mu, \sigma)$.

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827 \quad P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545 \quad P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

Ejercicio. Obtén las siguientes probabilidades.

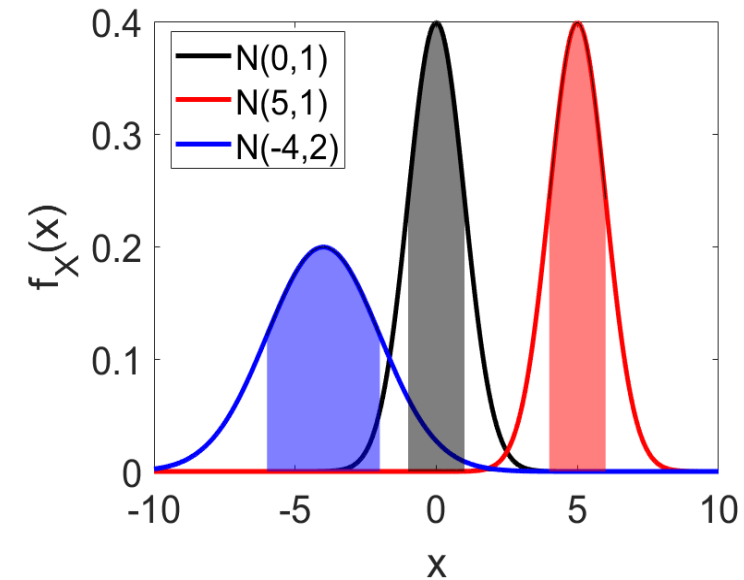
a) Si $X \sim N(0,1)$ ¿ $P(-1 < X < 1)$?

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(-1 < X < 1) = F_{N(0,1)}(1) - F_{N(0,1)}(-1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6827$$

b) Si $X \sim N(5,1)$ ¿ $P(4 < X < 6)$?

c) Si $X \sim N(-4,2)$ ¿ $P(-6 < X < -2)$?

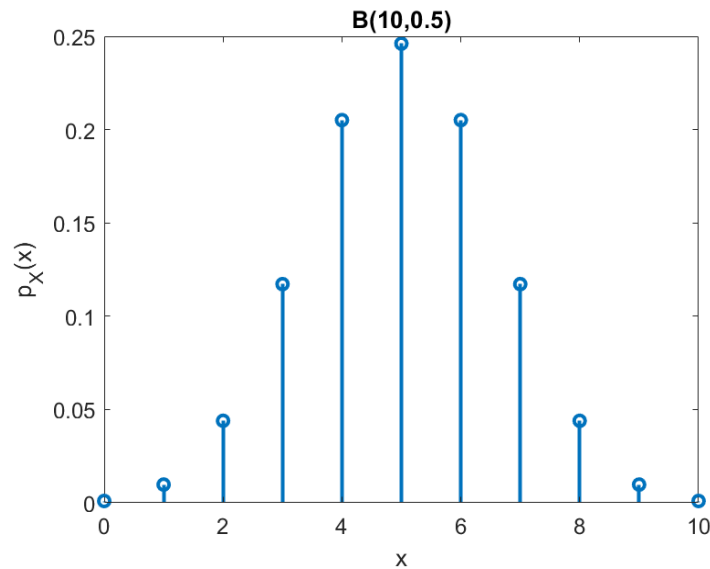
d) Si X : “altura alumno en cm”, $X \sim N(170,5)$. ¿probabilidad la altura de un alumno se encuentre entre 160 y 180 cm?



GENERACIÓN DE MUESTRAS ALEATORIAS.

Podemos generar muestras de acuerdo a las distribuciones de probabilidad.

Ejemplos.



muestra aleatoria de tamaño 15:

2 7 5 6 3 4 3 5 6 5 5 6 5 5 5

otra muestra aleatoria de tamaño 15:

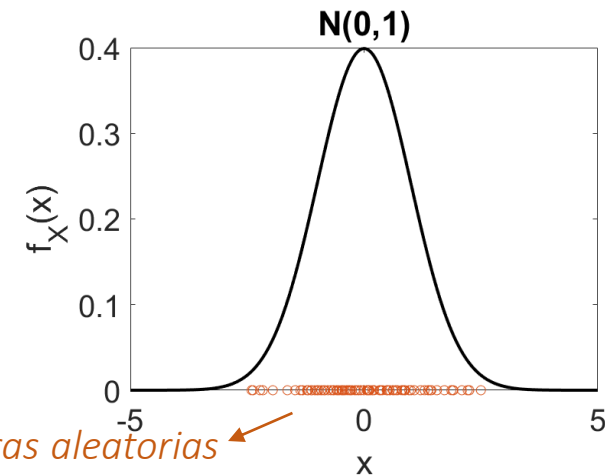
5 6 3 2 7 4 5 8 4 4 3 9 3 5 8

```
%generacion 15 muestras B(10,0.5)  
binornd(10,0.5,[1,15])
```

muestra aleatoria de tamaño 15 de $N(0,1)$:

2.1130 0.3418 -0.0262 0.7203 0.2403 -1.2064 0.7343 0.0084 -
0.0890 0.7619 0.1955 -0.5480 -1.2074 0.6512 0.7874

```
%generacion 15 muestras N(0,1)  
muestras=normrnd(0,1,[1,15]);
```



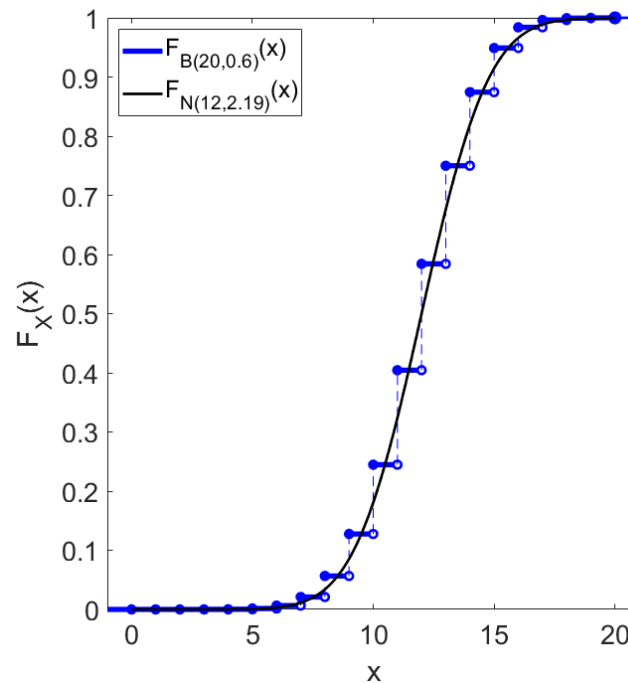
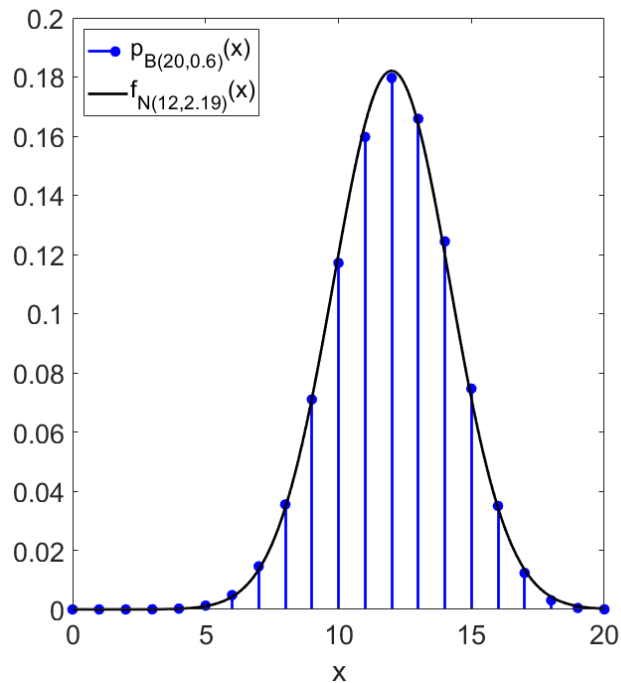
100 muestras aleatorias



APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL A LA NORMAL.

Si una variable $X \sim B(n, p)$, tiene parámetro n grande y ni p ni $(1-p)$ están próximos a 0, $B(n, p)$ se aproxima a una distribución Normal de igual media y varianza.

Si $B(n, p)$ con $np > 5$ y $n(1-p) > 5 \rightarrow B(n, p)$ se aproxima a $N(np, \sqrt{np(1-p)})$



Ejemplo.

Aproximación $B(20, 0.6)$ por $N(12, 2.19)$.

$$n \cdot p = 12 > 5 \text{ y } n \cdot (1-p) = 8 > 5$$

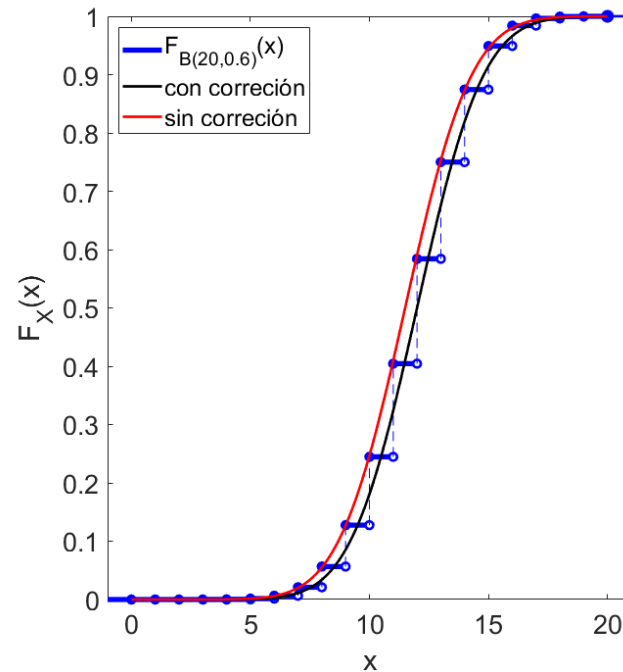
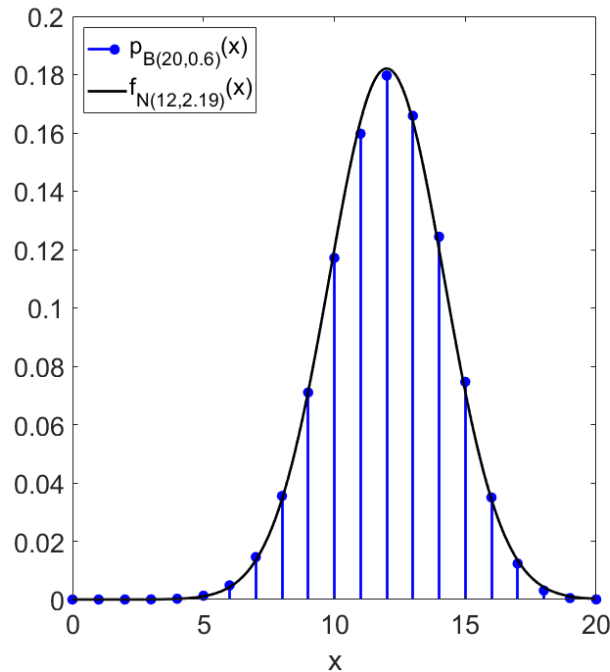
$$F_{B(20, 0.6)}(x) \approx F_{N(12, 2.19)}(x)$$



APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL A LA NORMAL.

Si una variable $X \sim B(n, p)$, tiene parámetro n grande y ni p ni $(1-p)$ están próximos a 0, $B(n, p)$ se aproxima a una distribución Normal de igual media y varianza.

Si $B(n, p)$ con $np > 5$ y $n(1-p) > 5 \rightarrow B(n, p)$ se aproxima a $N(np, \sqrt{np(1-p)})$



La aproximación de F_X se puede mejorar con la **corrección de continuidad**.

$$F_{B(n,p)}(x) \approx F_{N(np, \sqrt{np(1-p)})}(x + 0.5)$$

Ejemplo.

$$F_{B(20,0.6)}(x) \approx F_{N(12,2.19)}(x + 0.5)$$



APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL A LA NORMAL.

Ejemplo. Sea la función de probabilidad de una binomial de parámetros $n=75$ y $p=0.6$. Comparar el resultado de $P(X>52)$ obtenido con la binomial el obtenido con la aproximación:

$$X \sim B(75, 0.6), \mu=np=45 \text{ y } \sigma=\sqrt{np(1-p)} = 4.243$$

$$p_X(x) = \binom{75}{x} \cdot 0.6^x (1 - 0.6)^{75-x} \quad x=0, \dots, 75$$

Valor exacto:

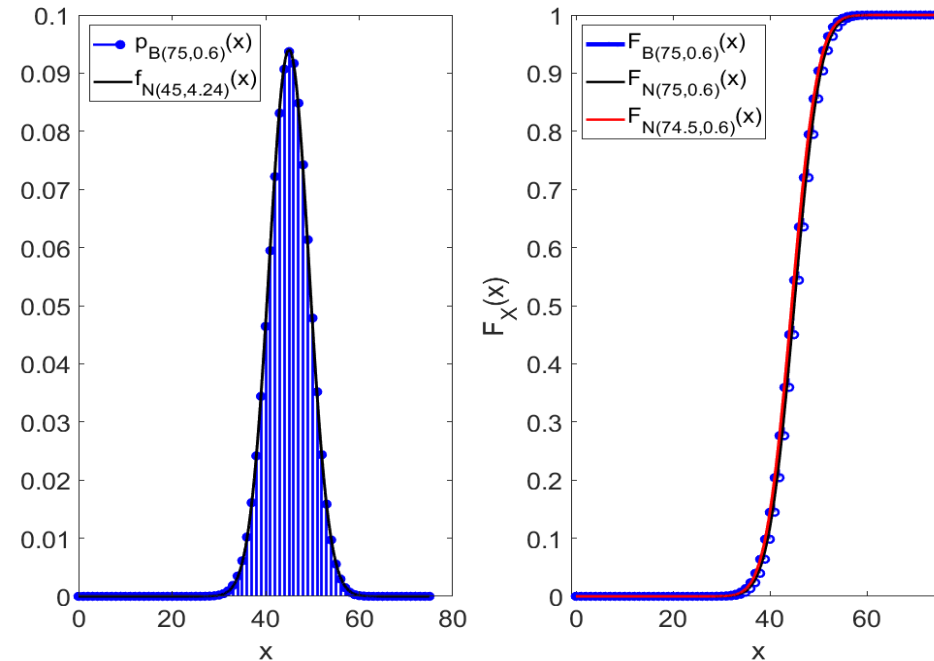
$$P(X > 52) = 1 - P(X \leq 52) = 1 - F_{B(75, 0.6)}(52) = 1 - \sum_{i=0}^{52} p_X(x_i) = 1 - 0.9633 = \mathbf{0.0367}$$

Valor obtenido mediante la aproximación:

$$n \cdot p = 45 > 5 \text{ y } n \cdot (1-p) = 30 > 5 \rightarrow X \sim N(45, 4.243).$$

$$P(X > 52) = 1 - P(X \leq 52) \approx 1 - F_{N(45, 4.243)}(52) = 1 - 0.9505 = \mathbf{0.0495}$$

$$(\text{con corrección de continuidad}) \approx 1 - F_{N(45, 4.243)}(52 + 0.5) = \mathbf{0.0385}$$



EJERCICIOS CÁLCULO DE PROBABILIDADES.

Ejercicio 1. Dada la variable aleatoria $X \sim B(20, 0.4)$, obtener las siguientes probabilidades.

a) $P(X = 15)$

b) $P(X < 12)$

Obtener además la probabilidad b) utilizando la aproximación a una distribución normal

Ejercicio 2. Dada la variable aleatoria $Y \sim N(18, 2)$, obtener las siguientes probabilidades.

a) $P(X < 14)$

b) $P(14 < X < 16)$

Obtener dichas probabilidades utilizando la tabla $F_{N(0,1)}$

