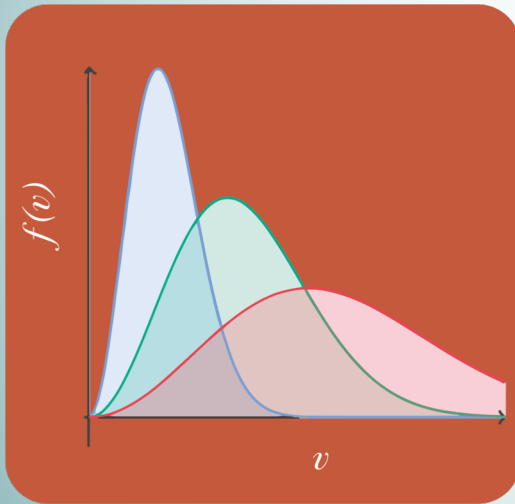


Métodos Matemáticos en la Ingeniería

BLOQUE II. MÉTODOS NUMÉRICOS

TEMA 6. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES NO LINEALES



Vera Egorova

Sara Pérez Carabaza

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Este material se publica bajo la siguiente licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



1 Antecedentes matemáticos

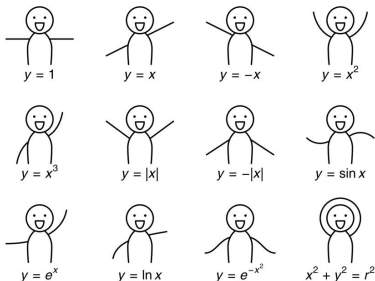
2 Métodos cerrados

- Método de bisección
- Método de la posición falsa

3 Métodos abiertos

- Iteración simple de punto fijo
- Método de Newton-Raphson
- Método de la secante

Las ecuaciones no lineales $f(x) = 0$ aparecen frecuentemente en la computación científica y la mayoría exigen tratamiento numérico.



Ejemplos

- Ecuaciones algebraicas $f(x) = ax^2 + bx + c$,
- Ecuaciones trascendentes $f(x) = e^{-x} - \cos x$.

Se define **la raíz de una ecuación** como el valor de x que hace $f(x) = 0$.

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

entonces en $[a, b]$ hay un número impar (al menos 1) de raíces.

Estrategia práctica para definir el número de raíces y localizarlas:

1. Analizar el dominio
2. Estudiar los límites
3. Calcular la primera derivada (Monotonía)
4. Evaluar en puntos críticos
5. Calcular la segunda derivada (Convexidad)

Ejercicio (2.1)

Determina cuántas soluciones reales tiene cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $8x = 2x^2 + \cos(x)$
2. $e^x = x^2$
3. $e^x = \ln(-x)$
4. $x \ln x = 1$

1. Tomar una aproximación inicial de la solución: x_0
2. Generar una sucesión de puntos (mediante algún método)

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$$

3. La sucesión generada $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ cumpla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

con x^* solución de la ecuación.

Orden de convergencia

Sea $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales que converge hacia un punto x^* . Diremos que el **orden de convergencia** es p (con $p \geq 1$) si existe una constante $C_p > 0$ tal que

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C_p |x_k - x^*|^p, \quad \forall k \geq 0$$

Cuanto mayor es el orden de convergencia, más rápido converge el método.

Cerrados	Abiertos
Se basan en el Teorema de Bolzano. Convergentes. A veces la convergencia es muy lenta.	Se basan en las características de la función. Convergencia condicional. En caso de converger, lo hacen mucho más rápido que los métodos cerrados
Necesitan dos valores iniciales para la raíz: intervalo	Requieren un único valor de inicio o si requieren dos, no es necesario que encierren a la raíz
Bisección Falsa posición	Iteración simple de punto fijo Newton Secante

Para la aproximación inicial (el punto o el intervalo de partida), se puede utilizar el método gráfico:

1. Representar la función $f(x)$
2. Observar dónde cruza el eje x
3. Este punto ofrece una aproximación inicial de la raíz

Para la aproximación inicial (el punto o el intervalo de partida), se puede utilizar el método gráfico:

1. Representar la función $f(x)$
2. Observar dónde cruza el eje x
3. Este punto ofrece una aproximación inicial de la raíz

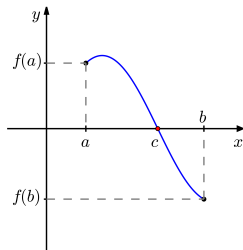
Características:

- No son precisas
- Se utilizan para obtener aproximaciones iniciales de la raíz
- Son importantes en la comprensión de las propiedades de las funciones y en la prevención de las fallas de los métodos numéricos

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el signo de $f(a)$ es distinto al signo de $f(b)$, lo que se expresa como:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



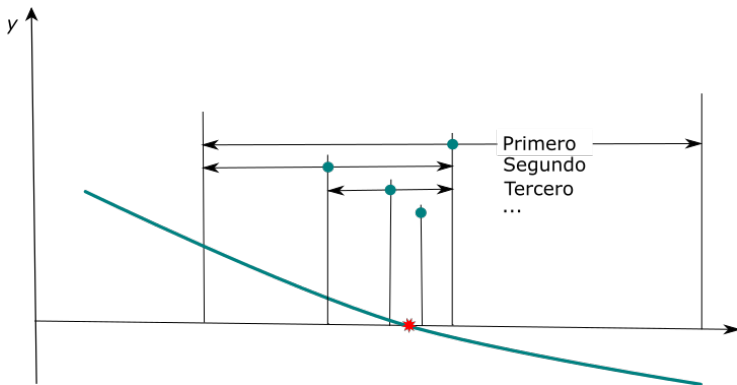
Ejercicio (2.2)

Para cada una de las siguientes funciones, halla un intervalo $[a, b]$ de manera que $f(a)$ y $f(b)$ tengan distinto signo:

1. $f(x) = e^x - 2 - x$
2. $f(x) = 1 - x + \cos x$
3. $f(x) = \ln(x) - 5 + x$
4. $f(x) = x^2 - 10x + 23$

¿Cuántas raíces tiene cada función? Verifica los resultados representado gráficamente las funciones.

Conocido también como de corte binario, de partición de intervalos o de Bolzano, es un tipo de búsqueda incremental en el que el intervalo se divide siempre a la mitad.



Algoritmo: Método de bisección

1. Eligir valores a y b , que encierren la raíz: $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. Calcular la aproximación de la raíz x_r : $x_r = \frac{a+b}{2}$
3. Determinar subintervalo:
 - Si $f(a) \cdot f(x_r) < 0$, entonces poner $b = x_r$
 - Si $f(a) \cdot f(x_r) > 0$, entonces poner $a = x_r$
 - Si $f(a) \cdot f(x_r) = 0$, entonces x_r es la raíz, terminar el cálculo.
4. Volver al paso 2.

¿Cuándo debe terminar el método?

Algoritmo: Método de bisección

1. Eligir valores a y b , que encierren la raíz: $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. Calcular la aproximación de la raíz x_r : $x_r = \frac{a+b}{2}$
3. Determinar subintervalo:
 - Si $f(a) \cdot f(x_r) < 0$, entonces poner $b = x_r$
 - Si $f(a) \cdot f(x_r) > 0$, entonces poner $a = x_r$
 - Si $f(a) \cdot f(x_r) = 0$, entonces x_r es la raíz, terminar el cálculo.
4. Volver al paso 2.

¿Cuándo debe terminar el método?

- $|a - b| < \epsilon$ (más robusto)
- $|f(x)| < \epsilon$ (puede reducir el número de iteraciones)
- Se alcanza el número máximo de iteraciones (para evitar bucles infinitos)

Algoritmo: Método de bisección

1. Eligir valores a y b , que encierren la raíz: $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. Calcular la aproximación de la raíz x_r : $x_r = \frac{a+b}{2}$
3. Determinar subintervalo:
 - Si $f(a) \cdot f(x_r) < 0$, entonces poner $b = x_r$
 - Si $f(a) \cdot f(x_r) > 0$, entonces poner $a = x_r$
 - Si $f(a) \cdot f(x_r) = 0$, entonces x_r es la raíz, terminar el cálculo.
4. Volver al paso 2.

¿Cuándo debe terminar el método?

- $|a - b| < \epsilon$ (más robusto)
- $|f(x)| < \epsilon$ (puede reducir el número de iteraciones)
- Se alcanza el número máximo de iteraciones (para evitar bucles infinitos)

Ejercicio (2.3)

Implementa el método de bisección para resolver las ecuaciones:

a) $x^2 - \sin x = 0.25$

b) $x \ln x - 1.2 = 0$

c) $\ln x - \frac{7}{2x+6} = 0$

- **Convergencia:** Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de puntos medios de los intervalos generados por el método de bisección. Entonces existe un número $x_r \in [a, b]$ tal que $f(x_r) = 0$ y, además,

$$|x_r - c_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \text{ para } n = 0, 1, \dots$$

en particular la sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a la raíz x_r .

- Si $f(a)f(b) < 0$ puede haber más de una raíz. El método sólo encuentra **una de ellas**.
- Si $f(x)$ no es continua en $[a, b]$ no está garantizado el funcionamiento del método.
- Si $f(a)f(b) > 0$ el método no tiene garantizado el funcionamiento.
- Se puede calcular el número de iteraciones N que deben realizarse para cometer un error absoluto menor o igual de un ϵ prefijado ($|a - b| < \epsilon$):

$$N \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\ln 2}$$

Ejercicio (2.4)

Supongamos que usamos el método de bisección para hallar una raíz de $f(x)$ en el intervalo $[2, 7]$. ¿Cuántas iteraciones se necesitan para asegurar que la aproximación tiene una precisión de 5×10^{-9} ?

Resuelve también Ejercicio (2.5).

Idea: Utilizar una recta secante que conecta los puntos extremos del intervalo:

$$\frac{y - f(b)}{x - b} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Hallamos el punto donde la secante cruza el eje Ox:

$$\frac{0 - f(b)}{x_r - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

Idea: Utilizar una recta secante que conecta los puntos extremos del intervalo:

$$\frac{y - f(b)}{x - b} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Hallamos el punto donde la secante cruza el eje Ox:

$$\frac{0 - f(b)}{x_r - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ de donde } x_r = b - f(b) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

Ejercicio (2.6)

Prueba que la fórmula del método de la posición falsa es equivalente a $x_r = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$.

Las tres posibilidades son

1. Si $f(a) \cdot f(x_r) < 0$, entonces hay una raíz en $[a, x_r]$
2. Si $f(a) \cdot f(x_r) > 0$, entonces hay una raíz en $[x_r, b]$
3. Si $f(a) \cdot f(x_r) = 0$, entonces x_r es la raíz.

Método de la posición falsa (Régula-falsi)

Algoritmo

1. Eligir valores a y b , que encierren la raíz:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

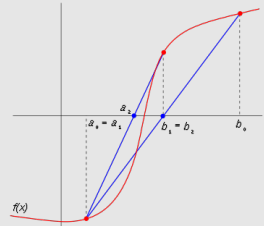
2. Calcular la aproximación de la raíz x_r :

$$x_r = b - \frac{f(b)(a - b)}{f(a) - f(b)}$$

3. Determinar subintervalo:

- Si $f(a) \cdot f(x_r) < 0$, entonces poner $b = x_r$
- Si $f(a) \cdot f(x_r) > 0$, entonces poner $a = x_r$
- Si $f(a) \cdot f(x_r) = 0$, entonces x_r es la raíz, terminar el cálculo.

4. Volver al paso 2.



Ejercicios (2.7), (2.8) y (2.9)

Implementa el método de la posición falsa.

- Se basan en fórmulas requieren un único valor de inicio o si requieren dos, no es necesario que encierren a la raíz
- No está garantizada la convergencia
- En caso de converger, lo hacen mucho más rápido que los métodos cerrados

Punto fijo

Un **punto fijo** de una función $g(x)$ es un número real P tal que $g(P) = P$

Idea: Arreglar la ecuación $f(x) = 0$ de tal modo que x esté del lado izquierdo de la ecuación:

$$x = g(x)$$

Ejemplo

- $x(x+1)^2 - 1 = 0$

Punto fijo

Un **punto fijo** de una función $g(x)$ es un número real P tal que $g(P) = P$

Idea: Arreglar la ecuación $f(x) = 0$ de tal modo que x esté del lado izquierdo de la ecuación:

$$x = g(x)$$

Ejemplo

- $x(x+1)^2 - 1 = 0$ Iteraciones: $x_{k+1} = \frac{1}{(x_k + 1)^2}$

La iteración simple de punto fijo es **linealmente convergente**.

Algoritmo

1. Se ubica la raíz de $f(x)$ analizando la gráfica.
2. Se despeja de manera: $x = g(x)$.
3. Resolviendo la desigualdad $|g'(x)| \leq 1$, obtener el rango de valores en los cuales está el punto fijo llamado x_0 .
4. Partiendo de x_0 buscar la raíz haciendo iteraciones

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

5. Repetir las iteraciones hasta que:

- $|f(x)| < \epsilon$
- $E_a = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \epsilon$
- Se alcanza el número máximo de iteraciones

Ejercicio (2.10)

Utiliza el método de iteración simple de punto fijo para resolver las siguientes ecuaciones

- a) $\cos(x) + 1 - x = 0$ c) $x(x+1)^2 = 1$
 b) $2 - x = \ln x$ d) $\ln x + (x+1)^3 = 0$

con error absoluto $\epsilon < 10^{-6}$.

Teorema del Valor Medio

Si una función $g(x)$ y su primera derivada $g'(x)$ son continuas en un intervalo $[a, b]$, entonces existe al menos un punto $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Definimos la solución exacta como $x_r = g(x_r)$ y el proceso iterativo como $x_{k+1} = g(x_k)$

Restándolos, se obtiene: $E_{k+1} = x_r - x_{k+1} = g(x_r) - g(x_k)$

Aplicamos el Teorema del Valor Medio: existe un punto ξ entre x_k y x_r tal que $g'(\xi) = \frac{g(x_r) - g(x_k)}{x_r - x_k}$, de donde $E_{k+1} = g(x_r) - g(x_k) = g'(\xi)(x_r - x_k) = g'(\xi) \cdot E_k$.

- **Condición de convergencia:** Si $|g'(x)| < 1$ en un intervalo alrededor de la raíz, entonces los errores **disminuyen** con cada iteración.
- **Convergencia monótona:** Si $0 < g'(x) < 1$, los errores serán positivos (si se parte de un lado de la raíz) y la solución iterativa se acercará a la raíz de forma monótona (sin oscilar).
- **Convergencia oscilante:** Si $-1 < g'(x) < 0$, entonces los errores **oscilarán** en signo en cada iteración, acercándose a la raíz en un patrón de espiral.

Ejercicio 2.11

Escribe el proceso iterativo de punto fijo para hallar todas las raíces de la ecuación $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$. Estudia la convergencia.

Método de Newton-Raphson

Idea: Partiendo de un punto inicial x_0 , calculamos la siguiente iteración haciendo la recta tangente a la curva de la función en x_0 y ver dónde corta a la recta $y = 0$.

Recta tangente: $y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$

Fórmula de Newton-Raphson

Si el valor inicial para la raíz es x_k , entonces se puede trazar una tangente desde el punto $(x_k, f(x_k))$ de la curva. El punto donde esta tangente cruza al eje OX representa una aproximación mejorada de la raíz:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Repetir las iteraciones hasta que:

- $|f(x)| < \epsilon$
- $E_a = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \epsilon$
- Se alcanza el número máximo de iteraciones

Ejercicio 2.12: El antiguo *método de dividir y promediar*, para obtener una aproximación de la raíz cuadrada de cualquier número positivo, a , se formula del modo siguiente: $x = \frac{x + a/x}{2}$. Demuestra que éste es equivalente al algoritmo de Newton-Raphson.

Ejercicio 2.12: El antiguo *método de dividir y promediar*, para obtener una aproximación de la raíz cuadrada de cualquier número positivo, a , se formula del modo siguiente: $x = \frac{x + a/x}{2}$. Demuestra que éste es equivalente al algoritmo de Newton-Raphson.

Ejercicio 2.13 Implementa el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación $\cos(x) + 1 - x = 0$ con tolerancia $\varepsilon = 10^{-3}$. Utiliza como la aproximación inicial: $x_0 = 1$, $x_0 = 5$ y $x_0 = \frac{3}{2}\pi$. Explica los resultados.

1. $(x - 2)^2 - 1 = 0$ con $x_0 = 2$.

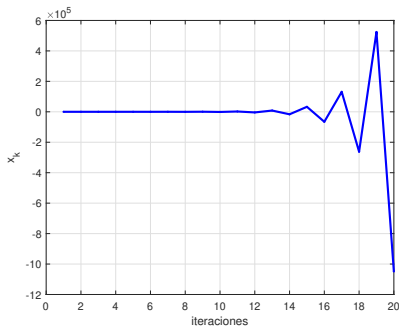
1. $(x - 2)^2 - 1 = 0$ con $x_0 = 2$.
 - x_0 es el punto crítico, $f'(x_0) = 0$.
 - Se puede elegir otro punto inicial.

Ejemplos de divergencia

1. $(x - 2)^2 - 1 = 0$ con $x_0 = 2$.
 - x_0 es el punto crítico, $f'(x_0) = 0$.
 - Se puede elegir otro punto inicial.
2. $\sqrt[3]{x} = 0$ con $x_0 = 1$

Ejemplos de divergencia

1. $(x - 2)^2 - 1 = 0$ con $x_0 = 2$.
 - x_0 es el punto crítico, $f'(x_0) = 0$.
 - Se puede elegir otro punto inicial.
2. $\sqrt[3]{x} = 0$ con $x_0 = 1$
 - La recta tangente es vertical cerca de la raíz.



- Elegir el valor inicial x_0 tal que

$$f(x_0)f'(x_0) > 0$$

- Al final de los cálculos, se necesitará sustituir siempre la raíz final calculada en la función original, para determinar si el resultado se acerca a cero.
- El programa deberá incluir siempre un límite máximo permitido del número de iteraciones para estar prevenidos contra soluciones oscilantes, de lenta convergencia o divergentes que podrían persistir en forma interminable.
- El programa deberá alertar al usuario para que tome en cuenta la posibilidad de que $f'(x)$ sea igual a cero en cualquier momento durante el cálculo.

Resuelve los Ejercicios 2.14 – 2.16.

Existen algunas funciones cuyas derivadas en ocasiones resultan muy difíciles de calcular.

Idea: Aproximar la derivada mediante una diferencia finita:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Método de la secante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Secante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Abierto

Reemplaza los valores en secuencia estricta

En ciertos casos puede ser divergente

Falsa Posición

$$x_r = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

Cerrado

Uno de los valores iniciales se reemplaza por la nueva aproximación

Siempre converge

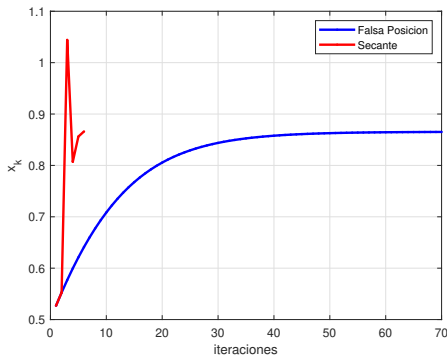
Secante	Falsa Posición
$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$	$x_r = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)}$
Abierto	Cerrado
Reemplaza los valores en secuencia estricta	Uno de los valores iniciales se reemplaza por la nueva aproximación
En ciertos casos puede ser divergente	Siempre converge

Ejercicio 2.16

Utilice los métodos de la secante y de la posición falsa para calcular la raíz de $f(x) = x^3 - \cos(x)$. Empiece los cálculos con los valores iniciales $a = x_{k-1} = 0.5$ y $b = x_k = 5.0$.

Ejercicio 2.16

Utilice los métodos de la secante y de la posición falsa para calcular la raíz de $f(x) = x^3 - \cos(x)$. Empiece los cálculos con los valores iniciales $a = x_{k-1} = 0.5$ y $b = x_k = 5.0$.



Ventajas:

- Pueden ser muy rápidos

Inconvenientes:

- No está garantizada la convergencia
- Requiere una derivada (Newton)
- Requiere dos puntos iniciales (Secante)

La función `fzero` resuelve la ecuación $f(x) = 0$.

```
root = fzero(fun, x0)  
root = fzero(fun, [x1, x2])
```

- `fun`: un function handle.
- `x0`: Punto inicial.
- `[x1, x2]`: Intervalo donde se busca la raíz, con $f(x_1)$ y $f(x_2)$ de signos opuestos.
- `root`: La raíz encontrada.

Ejemplo

Resolvemos la ecuación $f(x) = \cos(x) + 1 - x = 0$ usando el comando `fzero` y la aproximación inicial $x_0 = \frac{3}{2}\pi$.

```
f = @(x) cos(x)+1-x;  
x0 = 3*pi/2;  
[root, fval, exitflag, output] = fzero(f,x0)
```

Bibliografía

1. **Capítulos 5-8** de
Chapra S.C.; Canale R. (2005) *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Ed. McGraw-Hill
2. **Capítulo 2** de
Mathews J.H., Fink K.D. (2000) *Métodos Numéricos con MATLAB*. Ed. Prentice Hall.