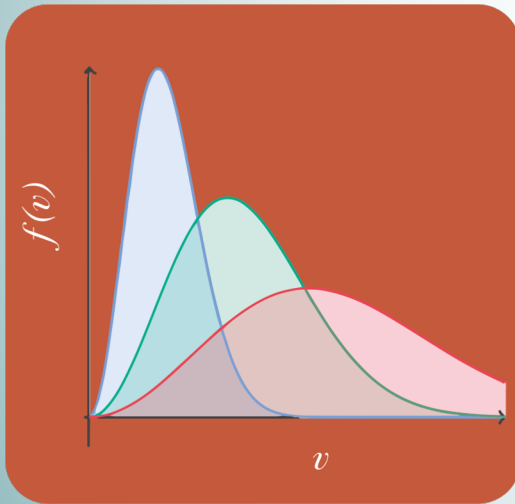


Métodos Matemáticos en la Ingeniería

BLOQUE II. MÉTODOS NUMÉRICOS

TEMA 7. INTERPOLACIÓN E INTEGRACIÓN



Vera Egorova

Sara Pérez Carabaza

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Este material se publica bajo la siguiente licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



1 Interpolación y aproximación polinomial

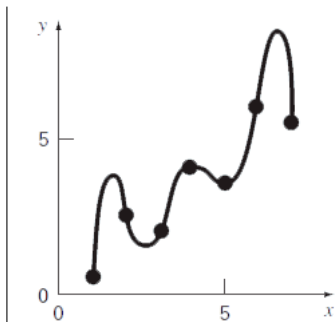
- Interpolación
- Interpolación mediante splines
- Regresión por mínimos cuadrados

2 Integración numérica

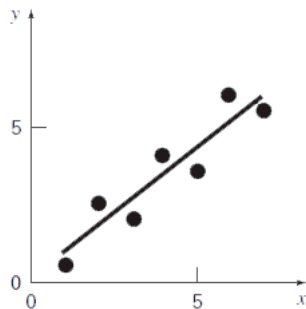
- Fórmulas de Newton-Cotes
- Regla del trapecio
- Reglas de Simpson
- Fórmulas compuestas
- Integración con MatLAB

- **poly** – Construye polinomios con raíces específicas
- **polyval** – Evalúa un polinomio
- **polyvalm** – Evalúa un polinomio con argumento matricial
- **polyder** – Diferenciación polinomial
- **conv** – Multiplicación de polinomios
- **deconv** – División de polinomios
- **roots** – Encuentra raíces de polinomios

Existen dos métodos generales para el ajuste de curvas:



Interpolación: La estimación de valores entre puntos discretos bien conocidos.



Regresión: se construye una curva que siga la tendencia de los puntos tomados como un grupo

Objetivo: Estimar valores intermedios entre datos definidos por puntos.

Dados $n + 1$ puntos, hay uno y sólo un polinomio de grado n que pasa a través de todos los puntos.

Por ejemplo,

- hay sólo una línea recta que une dos puntos
- únicamente una parábola que une un conjunto de tres puntos

Interpolación polinomial

Determinar el polinomio único de n -ésimo grado que se ajuste a $n + 1$ puntos.

Este polinomio proporciona una fórmula para calcular valores intermedios.

Interpolación de Lagrange

Dados $n + 1$ puntos distintos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a; b]$ y una función $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que un polinomio p es el **polinomio de interpolación de Lagrange** de la función f en los nodos citados si p es de grado $\leq n$ y $p(x_i) = f(x_i)$ para cada $0 \leq i \leq n$.

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i), \quad L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- Los puntos $\{x_i\}_{i=0}^n$ se llaman **nodos de interpolación**.
- A los polinomios L_i se les llama **polinomios básicos de Lagrange**.

Ejercicio (3.1)

Halla los polinomios de Lagrange de grado 2 para los siguiente datos:

1. $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1; f_0 = 3, f_1 = 2, f_2 = 5;$
2. $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4; f_0 = 3, f_1 = 4, f_2 = 6.$

Ejercicio (3.1)

1. $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1; f_0 = 3, f_1 = 2, f_2 = 5$

Cálculo de los polinomios básicos $L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}:$

1. $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1; f_0 = 3, f_1 = 2, f_2 = 5$

Cálculo de los polinomios básicos $L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}:$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x - 1)}{(-1)(-2)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(1)(-1)} = 1 - x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{x(x + 1)}{(2)(1)} = \frac{x^2 + x}{2}$$

1. $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1; f_0 = 3, f_1 = 2, f_2 = 5$

Cálculo de los polinomios básicos $L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x - 1)}{(-1)(-2)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(1)(-1)} = 1 - x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{x(x + 1)}{(2)(1)} = \frac{x^2 + x}{2}$$

Construcción y simplificación del polinomio $P_2(x)$:

1. $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1; f_0 = 3, f_1 = 2, f_2 = 5$

Cálculo de los polinomios básicos $L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}:$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x - 1)}{(-1)(-2)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(1)(-1)} = 1 - x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{x(x + 1)}{(2)(1)} = \frac{x^2 + x}{2}$$

Construcción y simplificación del polinomio $P_2(x)$:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 3 \cdot L_0(x) + 2 \cdot L_1(x) + 5 \cdot L_2(x) \\ &= 3 \left(\frac{x^2 - x}{2} \right) + 2(1 - x^2) + 5 \left(\frac{x^2 + x}{2} \right) = 2x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

El error de truncamiento en la serie de Taylor:

$$R_n = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} (x_{i+1} - x_i)^n$$

Para un polinomio de interpolación de n -ésimo grado:

$$R_n(x) = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Cota del error

Supongamos que la función f es $n + 1$ veces derivable en el intervalo $[a; b]$ y que $f^{(n+1)}$ es una función continua, entonces una cota del error de interpolación de Lagrange viene dada por la expresión

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \max_{\xi \in [a; b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}$$

Ejercicio (3.2)

Ejercicio (3.2)

Sea $f(x) = \cos(x)$ definida en el intervalo $[0, 1.2]$. Construye los polinomios de Lagrange usando los siguientes nodos de interpolación:

1. $x_0 = 0, x_1 = 1.2$ (Polinomio interpolador lineal);
2. $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 1.2$ (Polinomio interpolador cuadrático);
3. $x_0 = 0, x_1 = 0.4, x_2 = 0.8, x_3 = 1.2$ (Polinomio interpolador cúbico).

En cada caso, determina la cota del error.

1. Polinomio Interpolador Lineal ($n = 1$)

Nodos: $x_0 = 0, x_1 = 1.2$; **Valores:** $f_0 = \cos(0) = 1$; $f_1 = \cos(1.2) \approx 0.3624$.

Ejercicio (3.2)

Ejercicio (3.2)

Sea $f(x) = \cos(x)$ definida en el intervalo $[0, 1.2]$. Construye los polinomios de Lagrange usando los siguientes nodos de interpolación:

1. $x_0 = 0, x_1 = 1.2$ (Polinomio interpolador lineal);
2. $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 1.2$ (Polinomio interpolador cuadrático);
3. $x_0 = 0, x_1 = 0.4, x_2 = 0.8, x_3 = 1.2$ (Polinomio interpolador cúbico).

En cada caso, determina la cota del error.

1. Polinomio Interpolador Lineal ($n = 1$)

Nodos: $x_0 = 0, x_1 = 1.2$; **Valores:** $f_0 = \cos(0) = 1$; $f_1 = \cos(1.2) \approx 0.3624$.

$$P_1(x) = 1 \cdot \left(-\frac{x - 1.2}{1.2} \right) + 0.3624 \cdot \left(\frac{x}{1.2} \right) = 1 - 0.5314x$$

Ejercicio (3.2)

Ejercicio (3.2)

Sea $f(x) = \cos(x)$ definida en el intervalo $[0, 1.2]$. Construye los polinomios de Lagrange usando los siguientes nodos de interpolación:

1. $x_0 = 0, x_1 = 1.2$ (Polinomio interpolador lineal);
2. $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 1.2$ (Polinomio interpolador cuadrático);
3. $x_0 = 0, x_1 = 0.4, x_2 = 0.8, x_3 = 1.2$ (Polinomio interpolador cúbico).

En cada caso, determina la cota del error.

1. Polinomio Interpolador Lineal ($n = 1$)

Nodos: $x_0 = 0, x_1 = 1.2$; **Valores:** $f_0 = \cos(0) = 1$; $f_1 = \cos(1.2) \approx 0.3624$.

$$P_1(x) = 1 \cdot \left(-\frac{x - 1.2}{1.2} \right) + 0.3624 \cdot \left(\frac{x}{1.2} \right) = 1 - 0.5314x$$

Cota del Error para $P_1(x)$:

- $M_2 = \max_{\xi \in [a; b]} |f^{(n+1)}(\xi)| = \max_{\xi \in [0, 1.2]} |-\cos(\xi)| = 1$.
- $\max_{x \in [a; b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| = |0.6(0.6 - 1.2)| = |-0.36| = 0.36$.

$$E_1 \leq \frac{M_2}{2!} \max |x(x - 1.2)| = \frac{1}{2} \cdot 0.36 = 0.18$$

Ejercicio (3.3)

Ejercicio (3.3)

Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{A^2 - x}$$

que se interpola por el polinomio de Lagrange con los nodos $x = -4; -3; -2; -1$. Hallar el valor de A para que el error sea menor que 10^{-5} .

La cota del error de interpolación:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \max_{\xi \in [a; b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|}{(n+1)!}.$$

En este caso ($n = 3$): $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(A^2 - x)^5}$, $\left| \prod_{i=0}^3 (x - x_i) \right| \leq 1$. Entonces,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \max_{\xi \in [a; b]} \left| \frac{4!}{(A^2 - \xi)^5} \right| = \frac{1}{(A^2 + 1)^5} \leq 10^{-5}, \text{ de donde } |A| \geq 3.$$

Importante

Resuelve los ejercicios 3.4 - 3.6

A la vista de la fórmula del error dada por el teorema anterior, es natural plantearse la elección de los nodos $\{x_i\}_{i=0}^n$ de forma que la cantidad

$$\max_{x \in [a; b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \rightarrow \min$$

Esto se consigue tomando los llamados **puntos de Chebyshev**:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}, \quad 0 \leq i \leq n$$

Con esta elección de los nodos se tiene

$$\max_{x \in [a; b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$



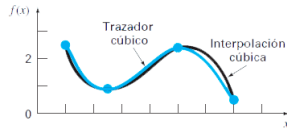
Pafnuti Lvovich
Chebyshev
1821 – 1894

Ejercicio (3.7)

Dada la función de Runge: $f: [-5; +5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Halla los polinomios interpoladores de Lagrange de grado 5, 10 y 20, respectivamente, que interpolan a f en puntos igualmente espaciados del intervalo $[-5; +5]$. Representa gráficamente la función y los correspondientes polinomios interpoladores. Compara los resultados con la interpolación usando los nodos de Chebyshev.

- Un procedimiento alternativo consiste en colocar polinomios de grado inferior en subconjuntos de los datos. Tales polinomios conectores se denominan **trazadores o splines**.
- Las curvas de tercer grado empleadas para unir cada **par de datos** se llaman **trazadores cúbicos**. Esas funciones se pueden construir de tal forma que las conexiones entre ecuaciones cúbicas adyacentes resulten visualmente suaves.



El objetivo en los trazadores cúbicos es obtener un polinomio de tercer grado para cada intervalo entre los nodos:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

- $n + 1$ datos, n intervalos
- $4n$ incógnitas $\rightarrow 4n$ condiciones:
 1. Los valores de la función deben ser iguales en los nodos interiores ($2n - 2$ condiciones)
 2. La primera y última función deben pasar a través de los puntos extremos (2 condiciones).
 3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n - 1$ condiciones).
 4. Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n - 1$ condiciones).
 5. Las segundas derivadas en los nodos extremos son cero (2 condiciones).

- `interp1` - Interpolación de la función de una variable

`interp1`

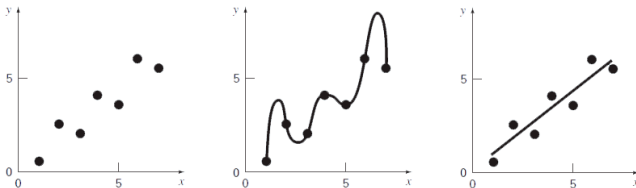
```
x = 0:pi/4:2*pi; y = sin(x);  
xq = 0:pi/16:2*pi;  
yq1 = interp1(x,y,xq); %lineal  
yq2 = interp1(x,y,xq,'spline'); % trazador cúbico
```

- `spline` - Trazador cúbico

`spline`

```
x = 0:10; y = sin(x);  
xq = 0:.25:10;  
yq = spline(x,y,xq);
```

Regresión por mínimos cuadrados



- Cuando los datos tienen errores sustanciales, la interpolación polinomial es inapropiada.
- Una estrategia más apropiada en tales casos consiste en obtener una función de aproximación que se ajuste a la forma o a la tendencia general de los datos, sin coincidir necesariamente en todos los puntos.
- Se debe encontrar algún criterio para establecer una base para el ajuste. Una forma de hacerlo es obtener una curva que minimice la discrepancia entre los puntos y la curva.

Regresión por mínimos cuadrados

Dados $n + 1$ puntos distintos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a; b]$, una función $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ el problema de mínimos cuadrados consiste en resolver

$$\sum_{j=0}^n (f(x_j) - p(x_j))^2 \rightarrow \min$$

Objetivo: ajustar una línea recta a un conjunto de observaciones definidas por puntos: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Ecuación de recta: $y = a_0 + a_1x + e$,

- e es el **error o residuo**: $e = y - (a_0 + a_1x)$
- Criterio para un "mejor" ajuste:

$$S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i)^2 \rightarrow \min$$

Para determinar los valores de a_0 y a_1 , S_r se deriva con respecto a cada uno de los coeficientes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_r}{\partial a_0} &= -2 \sum (y_i - a_0 - a_1x_i) \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_1} &= -2 \sum (y_i - a_0 - a_1x_i)x_i\end{aligned}$$

Al igualar estas derivadas a cero, se dará como resultado un S_r mínimo (**ecuaciones normales**).

Ecuaciones normales

$$\begin{cases} \sum y_i - n a_0 - a_1 \sum x_i = 0 \\ \sum x_i y_i - a_0 \sum x_i - a_1 \sum x_i^2 = 0 \end{cases}$$

se resuelven en forma simultánea:

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{n} \left(\sum y_i - a_1 \sum x_i \right)$$

Ejercicio (3.8)

Ejercicio (3.8)

Ajusta a una línea recta los valores (x, y) :

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0.5	2.5	2.0	4.0	3.5	6.0	5.5

Ejercicio (3.8)

Ejercicio (3.8)

Ajusta a una línea recta los valores (x, y) :

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0.5	2.5	2.0	4.0	3.5	6.0	5.5

- $n = 7, \sum x_i = 28, \sum y_i = 24, \sum x_i y_i = 119.5, \sum x_i^2 = 140$

Ejercicio (3.8)

Ejercicio (3.8)

Ajusta a una línea recta los valores (x, y) :

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0.5	2.5	2.0	4.0	3.5	6.0	5.5

$$\bullet \quad n = 7, \quad \sum x_i = 28, \quad \sum y_i = 24, \quad \sum x_i y_i = 119.5, \quad \sum x_i^2 = 140$$

$$\begin{cases} \sum y_i - n a_0 - a_1 \sum x_i = 0 \\ \sum x_i y_i - a_0 \sum x_i - a_1 \sum x_i^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24 - 7 a_0 - 28 a_1 = 0 \\ 119.5 - 28 a_0 - 140 a_1 = 0 \end{cases}$$

Se obtiene que $a_1 = 0.8392857$, $a_0 = 0.07142857$.

Programa en MatLAB

```

%% I I I I x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]; y = [0.5, 2.5, 2.0, 4.0, 3.5, 6.0, 5.5];
%% I I I I n = length(x);
%% I I I I a1 = (n*sum(x.*y) - sum(x)*sum(y)) / (n*sum(x.^2) - (sum(x))^2);
%% I I I I a0 = (sum(y)-a1*sum(x))/n;
%% I I I I

```

Este procedimiento se puede extender fácilmente al ajuste de datos con un polinomio de grado superior. Por ejemplo, para un polinomio de segundo grado:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + e$$

La suma de los cuadrados de los residuos es $S_r = \sum_{i=1}^n \left(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 \right)^2$

Este procedimiento se puede extender fácilmente al ajuste de datos con un polinomio de grado superior. Por ejemplo, para un polinomio de segundo grado:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + e$$

La suma de los cuadrados de los residuos es $S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2$

Las derivadas de S_r con respecto a cada uno de los coeficientes desconocidos del polinomio:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum [(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) x_i] \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum [(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) x_i^2] \end{cases}$$

Estas ecuaciones se igualan a cero y se reordenan

$$\begin{aligned} (n)a_0 &+ \left(\sum x_i\right)a_1 + \left(\sum x_i^2\right)a_2 = \left(\sum y_i\right) \\ \left(\sum x_i\right)a_0 &+ \left(\sum x_i^2\right)a_1 + \left(\sum x_i^3\right)a_2 = \left(\sum x_i y_i\right) \\ \left(\sum x_i^2\right)a_0 &+ \left(\sum x_i^3\right)a_1 + \left(\sum x_i^4\right)a_2 = \left(\sum x_i^2 y_i\right) \end{aligned}$$

Ejercicio (3.9)

Ajusta a un polinomio de segundo grado los datos:

x	0	1	2	3	4	5
y	2.1	7.7	13.6	27.2	40.9	61.1

Ejercicio (3.9)

Ajusta a un polinomio de segundo grado los datos:

x	0	1	2	3	4	5
y	2.1	7.7	13.6	27.2	40.9	61.1

Se calculan las siguientes cantidades:

- $n = 6, \sum x_i = 15, \sum y_i = 152.6$
- $\sum x_i y_i = 585.6, \sum x_i^2 = 55$
- $\sum x_i^3 = 225, \sum x_i^4 = 979, \sum x_i^2 y_i = 24888$

$$\begin{aligned}
 (n)a_0 &+ \left(\sum x_i\right)a_1 + \left(\sum x_i^2\right)a_2 = \left(\sum y_i\right) \\
 \left(\sum x_i\right)a_0 &+ \left(\sum x_i^2\right)a_1 + \left(\sum x_i^3\right)a_2 = \left(\sum x_i y_i\right) \\
 \left(\sum x_i^2\right)a_0 &+ \left(\sum x_i^3\right)a_1 + \left(\sum x_i^4\right)a_2 = \left(\sum x_i^2 y_i\right)
 \end{aligned}$$

Ajusta a un polinomio de segundo grado los datos:

x	0	1	2	3	4	5
y	2.1	7.7	13.6	27.2	40.9	61.1

$$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 152.6 \\ 585.6 \\ 2488.8 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = 2.47857, a_1 = 2.35929, a_2 = 1.86071$$

En el caso del polinomio de m-ésimo grado:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (n)a_0 & + & \left(\sum x_i\right)a_1 & + & \dots & \left(\sum x_i^m\right)a_m & = & \left(\sum y_i\right) \\
 \left(\sum x_i\right)a_0 & + & \left(\sum x_i^2\right)a_1 & + & \dots & \left(\sum x_i^{m+1}\right)a_m & = & \left(\sum x_i y_i\right) \\
 \dots & & & & & & & \\
 \left(\sum x_i^m\right)a_0 & + & \left(\sum x_i^{m+1}\right)a_1 & + & \dots & \left(\sum x_i^{2m}\right)a_m & = & \left(\sum x_i^m y_i\right)
 \end{array}$$

Formulación algebraica del problema:

$$Ax = b$$

- A - matriz de las sumas de x_i
- $x = [a_0, a_1, \dots, a_m]^T$
- $b = \left[\left(\sum y_i\right), \left(\sum x_i y_i\right), \dots, \left(\sum x_i^m y_i\right)\right]^T$

- polyfit - Regresión polinomial

Ejercicio (3.9)

Ajusta a un polinomio de segundo grado los datos x y y

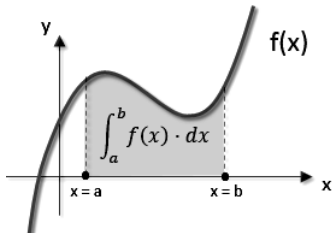
x	0	1	2	3	4	5
y	2.1	7.7	13.6	27.2	40.9	61.1

```
x = [0:5]; y = [2.1, 7.7, 13.6, 27.2, 40.9, 61.1];  
p = polyfit(x,y,2);  
x1 = linspace(0,5);  
y1 = polyval(p,x1);  
plot(x,y,'bo',x1,y1, 'r-');
```

Ejercicio (3.10)

Halla el polinomio de grado menor o igual a 12 mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados de la función de $f: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(e^x)$, tomando como datos los valores de f en los nodos $x_j = jh$, $j = 0; \dots; 100$ y $h = 0.02$.

El concepto de integral definida está íntimamente relacionado con el concepto de área bajo una función en un determinado intervalo:



Integral definida

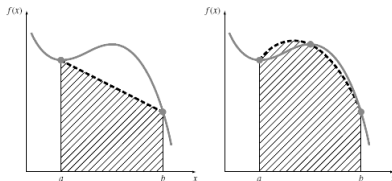
Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$, la **integral definida** se define como límite de las sumas de Riemann:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{||\Delta x|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

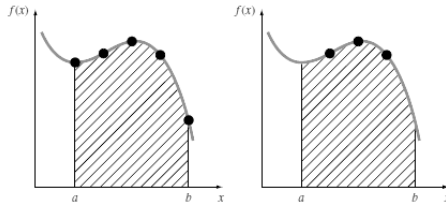
Idea: reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx,$$

donde $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ - un polinomio de grado n .



- Las formas **cerradas** son aquellas donde se conocen los datos al inicio y al final de los límites de integración
- Las formas **abiertas** tienen límites de integración que se extienden más allá del intervalo de los datos (se usan para evaluación integrales impropias)



Una línea recta se puede representar como

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

Una línea recta se puede representar como

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

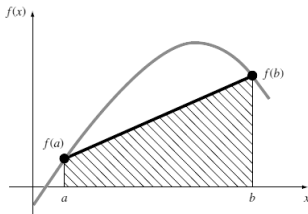
$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

La regla del trapecio

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx (b - a) \frac{f(b) + f(a)}{2}$$

La regla del trapecio

Geométricamente, la regla del trapecio es equivalente a aproximar el área del trapecio bajo la línea recta que une $f(a)$ y $f(b)$



Área del trapecio: altura por el promedio de las bases.

La integral aproximada:

$$I \approx \text{ancho} \times \text{altura promedio} = (b - a) \times \frac{f(b) + f(a)}{2}$$

Ejercicio (3.11)

Ejercicio (3.11), Regla del trapecio

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

(el valor exacto de la integral es 1.640533)

- Regla del trapecio: $\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{f(b) + f(a)}{2}$

Ejercicio (3.11), Regla del trapecio

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

(el valor exacto de la integral es 1.640533)

- Regla del trapecio: $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{f(b) + f(a)}{2}$
 - $f(a) = f(0) = 0.2$
 - $f(b) = f(0.8) = 0.232$
- $\int_a^b f(x)dx \approx 0.8 \frac{0.232 + 0.2}{2} = 0.1728$

Ejercicio (3.11), Regla del trapecio

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

(el valor exacto de la integral es 1.640533)

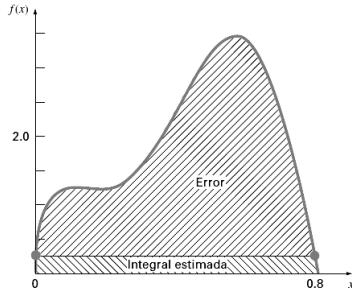
- Regla del trapecio: $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{f(b) + f(a)}{2}$
 - $f(a) = f(0) = 0.2$
 - $f(b) = f(0.8) = 0.232$
- $\int_a^b f(x)dx \approx 0.8 \frac{0.232 + 0.2}{2} = 0.1728$
- Error: $1.640533 - 0.1728 = 1.467733$ (error relativo 89.5%)

Ejercicio (3.11)

Ejercicio (3.11)

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

Introducimos la función:

$$g(h) = \frac{h}{2} (f(a) + f(a+h)) - \int_a^{a+h} f(x) dx$$

Introducimos la función:

$$g(h) = \frac{h}{2} (f(a) + f(a+h)) - \int_a^{a+h} f(x) dx$$

Sus derivadas:

$$1. \quad g'(h) = \frac{1}{2} (f(a) - f(a+h)) + \frac{h}{2} f'(a+h)$$

$$2. \quad g''(h) = \frac{h}{2} f''(a+h)$$

Existe ξ tal que $|f''(x)| \leq f''(\xi)$, entonces

$$|g''(h)| \leq \frac{f''(\xi)h}{2}$$

Como

$$g'(0) = 0, \quad g(0) = 0,$$

tenemos

$$g'(h) = \int_0^h g''(x) dx, \quad g = \int_0^h g'(x) dx$$

Error de la regla del trapecio

Como

$$g'(0) = 0, \quad g(0) = 0,$$

tenemos

$$g'(h) = \int_0^h g''(x) dx, \quad g = \int_0^h g'(x) dx$$

Entonces,

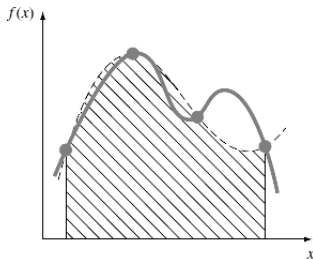
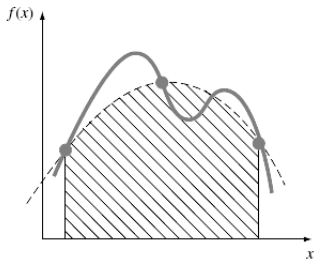
1. $|g'(h)| \leq \frac{f'(\xi)h^2}{4}$
2. $|g(h)| \leq \frac{f'(\xi)h^3}{12}$

Error de la regla del trapecio

$$g(b-a) = (b-a) \frac{f(b) + f(a)}{2} - \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f'(\xi)(b-a)^3}{12}$$

Idea: aproximar el integrando mediante un polinomio de segundo o tercer grado.

- Regla de Simpson 1/3 (polinomio de segundo grado)
- Regla de Simpson 3/8 (polinomio de tercer grado)



Regla de Simpson 1/3

- Tres nodos: $h = \frac{b-a}{2}$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h = b$
- Valores: $f(x_0) = f_0$, $f(x_1) = f_1$, $f(x_2) = f_2$.

Regla de Simpson 1/3

- Tres nodos: $h = \frac{b-a}{2}$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h = b$
- Valores: $f(x_0) = f_0$, $f(x_1) = f_1$, $f(x_2) = f_2$.
- Polinomio de Lagrange de segundo grado:

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2$$

Como $x_0 - x_1 = -h$, $x_0 - x_2 = -2h$, Sustituimos en el integrando:

$$\int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}f_0 - \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{h^2}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}f_2 \right] dx$$

Regla de Simpson 1/3

- Tres nodos: $h = \frac{b-a}{2}$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h = b$
- Valores: $f(x_0) = f_0$, $f(x_1) = f_1$, $f(x_2) = f_2$.
- Polinomio de Lagrange de segundo grado:

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2$$

Como $x_0 - x_1 = -h$, $x_0 - x_2 = -2h$, Sustituimos en el integrando:

$$\int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}f_0 - \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{h^2}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}f_2 \right] dx$$

Después de la integración y de las manipulaciones algebraicas, se obtiene la siguiente fórmula:

Regla de Simpson 1/3

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2]$$

Ejercicio (3.11)

Ejercicio (3.11), Regla de Simpson 1/3

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

(el valor exacto de la integral es 1.640533)

- Regla de Simpson 1/3: $I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2]$

Ejercicio (3.11)

Ejercicio (3.11), Regla de Simpson 1/3

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

(el valor exacto de la integral es 1.640533)

- Regla de Simpson 1/3: $I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2]$
 - $f_0 = f(0) = 0.2$
 - $f_1 = f(0.4) = 2.456$
 - $f_2 = f(0.8) = 0.232$

Ejercicio (3.11), Regla de Simpson 1/3

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

(el valor exacto de la integral es 1.640533)

- Regla de Simpson 1/3: $I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2]$
 - $f_0 = f(0) = 0.2$
 - $f_1 = f(0.4) = 2.456$
 - $f_2 = f(0.8) = 0.232$
- $\int_a^b f(x)dx \approx 1.367467$

Ejercicio (3.11), Regla de Simpson 1/3

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

(el valor exacto de la integral es 1.640533)

- Regla de Simpson 1/3: $I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2]$
 - $f_0 = f(0) = 0.2$
 - $f_1 = f(0.4) = 2.456$
 - $f_2 = f(0.8) = 0.232$
- $\int_a^b f(x)dx \approx 1.367467$
- Error: $1.640533 - 1.367467 = 0.2730667$ (error relativo 16.6%)

Error de la regla de Simpson 1/3

Se puede demostrar que la aplicación a un solo segmento de la regla de Simpson 1/3 tiene un error de truncamiento de

$$E_t = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad h = \frac{b-a}{2}$$

- Así, la regla de Simpson 1/3 es más precisa que la regla del trapecio.
- Da resultados exactos para polinomios cúbicos aun cuando se obtenga de una parábola.

Ejercicios

Utiliza la regla de Simpson 1/3 para aproximar las integrales

- (3.12) $\int_0^1 x^3 - 3x + 1 \, dx.$
- (3.13) $\int_0^1 |\sin(2\pi x)| \, dx.$

Compara con el valor exacto, calcula el error relativo. Explica los resultados.

Regla de Simpson 3/8

De manera similar a la obtención de la regla del trapecio y Simpson 1/3, es posible ajustar un polinomio de Lagrange de tercer grado a cuatro puntos e integrarlo:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_3(x) dx$$

- $h = \frac{b-a}{3}$
- Cuatro nodos: $h = \frac{b-a}{3}$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, $x_3 = b$
- Valores: $f(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, 3$.

Regla de Simpson 3/8

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Ejercicio (3.11)

Ejercicio (3.11), Regla de Simpson 3/8

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

(el valor exacto de la integral es 1.640533)

- Regla de Simpson 3/8: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$

Ejercicio (3.11), Regla de Simpson 3/8

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

(el valor exacto de la integral es 1.640533)

- Regla de Simpson 3/8: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$
 - $f(x_0) = f(0) = 0.2$
 - $f(x_1) = f(0.2667) = 1.432724$
 - $f(x_2) = f(0.5333) = 3.487177$
 - $f(x_3) = f(0.8) = 0.232$
- $\int_a^b f(x)dx \approx 0.8 \frac{0.2 + 3 \cdot 1.432724 + 3 \cdot 3.487177 + 0.2}{8} = 1.519170$

Ejercicio (3.11), Regla de Simpson 3/8

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

(el valor exacto de la integral es 1.640533)

- Regla de Simpson 3/8: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$
 - $f(x_0) = f(0) = 0.2$
 - $f(x_1) = f(0.2667) = 1.432724$
 - $f(x_2) = f(0.5333) = 3.487177$
 - $f(x_3) = f(0.8) = 0.232$
- $\int_a^b f(x)dx \approx 0.8 \frac{0.2 + 3 \cdot 1.432724 + 3 \cdot 3.487177 + 0.2}{8} = 1.519170$
- Error: $1.640533 - 1.519170 = 0.12136307$ (error relativo 7.4%)

Se puede demostrar que la aplicación a un solo segmento de la regla de Simpson 3/8 tiene un error de truncamiento de

$$E_t = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi), \quad h = \frac{b-a}{3}$$

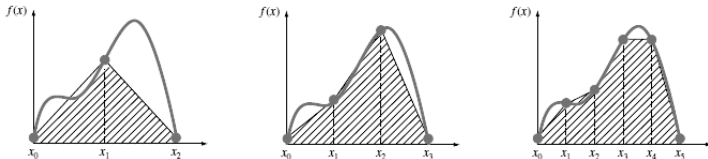
- La regla 3/8 es más exacta que la regla 1/3.
- Se prefiere la regla de Simpson 1/3, ya que alcanza una exactitud de tercer orden con tres puntos en lugar de los cuatro puntos requeridos en la versión 3/8

Grado	Nombre	Fórmula	Error
1	R. del trapecio	$\frac{b-a}{2}(f_0 + f_1)$	$-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$
2	R. de Simpson 1/3	$\frac{b-a}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$	$-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$
3	R. de Simpson 3/8	$\frac{b-a}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	$-\frac{(b-a)^5}{6480}f^{(4)}(\xi)$
4	R. de Boole	$\frac{b-a}{90}[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4]$	$-\frac{(b-a)^7}{193360}f^{(6)}(\xi)$

En la práctica de la ingeniería, las fórmulas de grado superior (es decir, con más de cuatro puntos) son poco utilizadas. Las reglas de Simpson bastan para la mayoría de las aplicaciones.

La exactitud se puede mejorar al usar las **Fórmulas compuestas**

Una forma de mejorar la precisión de la regla del trapecio consiste en dividir el intervalo de integración de a a b en varios segmentos, y aplicar el método a cada uno de ellos:



Las áreas de los segmentos se suman después para obtener la integral en todo el intervalo. Las ecuaciones resultantes se llaman **fórmulas de integración, de aplicación múltiple o compuestas**.

Regla del trapecio compuesta

Hay $n + 1$ puntos igualmente espaciados $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$. En consecuencia, existen n segmentos del mismo ancho $h = \frac{b-a}{n}$. Si a y b se designan como x_0 y x_n , respectivamente, la integral completa se representará como

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Sustituyendo la regla del trapecio en cada integral se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

Regla del trapecio compuesta

Hay $n + 1$ puntos igualmente espaciados $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$. En consecuencia, existen n segmentos del mismo ancho $h = \frac{b-a}{n}$. Si a y b se designan como x_0 y x_n , respectivamente, la integral completa se representará como

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Sustituyendo la regla del trapecio en cada integral se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

Agrupando términos, se obtiene

Regla del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

Ejercicio (3.14)

Ejercicio (3.14)

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

- Regla del trapecio compuesta:
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

Ejercicio (3.14)

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

- Regla del trapecio compuesta:
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$
 - $n = 2, h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8}{2} = 0.4$
 - $f(x_0) = f(0) = 0.2, f(x_1) = f(0.4) = 2.456, f(x_2) = f(0.8) = 0.232$
- $$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{0.8}{2} \left[\frac{0.2 + 0.232}{2} + 2.456 \right] = 1.0688$$

Ejercicio (3.14)

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

- Regla del trapecio compuesta: $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$
 - $n = 2, h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8}{2} = 0.4$
 - $f(x_0) = f(0) = 0.2, f(x_1) = f(0.4) = 2.456, f(x_2) = f(0.8) = 0.232$
- $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{0.8}{2} \left[\frac{0.2 + 0.232}{2} + 2.456 \right] = 1.0688$
- Error: $1.640533 - 1.0688 = 0.57173$ (error relativo 34.9%)

Error de la regla del trapecio compuesta

Se tiene un error con la regla del trapecio de aplicación múltiple al sumar los errores individuales de cada segmento, así

$$E_t = \frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^n f''(\xi),$$

donde $f''(\xi)$ es la segunda derivada en un punto ξ , localizado en el segmento i . Este resultado se simplifica al estimar la media o valor promedio de la segunda derivada en todo el intervalo como

$$\bar{f}''(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi)$$

Por lo tanto,

Error de la regla del trapecio compuesta

$$E_t = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \bar{f}''(\xi)$$

Así, si se duplica el número de segmentos, el error de truncamiento se divide entre cuatro.

Conclusiones principales:

1. Para aplicaciones individuales de las funciones con buen comportamiento, la regla del trapecio de múltiples segmentos es casi exacta para el tipo de precisión requerida en diversas aplicaciones de la ingeniería.

Conclusiones principales:

1. Para aplicaciones individuales de las funciones con buen comportamiento, la regla del trapecio de múltiples segmentos es casi exacta para el tipo de precisión requerida en diversas aplicaciones de la ingeniería.
2. Si se requiere de alta exactitud, la regla del trapecio de múltiples segmentos exige un gran trabajo computacional. Puede ser muy importante cuando:
 - se evalúan numerosas integrales
 - donde la función misma es consumidora de tiempo en su evaluación

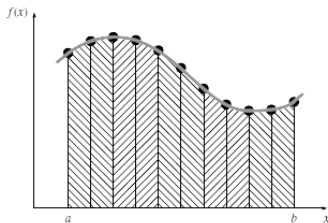
Regla de Simpson compuesta

Así como en la regla del trapecio, la regla de Simpson se mejora al dividir el intervalo de integración en varios segmentos de un mismo tamaño

$$h = \frac{b - a}{n}$$

La integral total se puede representar como

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$



Al sustituir la regla de Simpson 1/3 en cada integral se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx \approx 2h \sum_{i=0}^{n-2} \frac{f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})}{6}$$

Al sustituir la regla de Simpson 1/3 en cada integral se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx \approx 2h \sum_{i=0}^{n-2} \frac{f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})}{6}$$

Regla de Simpson compuesta

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

Se debe utilizar un número par de segmentos para implementar el método.

Ejercicio (3.14)

Ejercicio (3.14)

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

- Regla de Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

Ejercicio (3.14)

Ejercicio (3.14)

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

- Regla de Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

- $n = 4, h = \frac{b - a}{4} = \frac{0.8}{4} = 0.2$
- $f(x_0) = f(0) = 0.2, f(x_1) = f(0.2) = 1.288, f(x_2) = f(0.4) = 2.456,$
 $f(x_3) = f(0.6) = 3.464, f(x_4) = f(0.8) = 0.232$

Ejercicio (3.14)

Ejercicio (3.14)

Integra numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

- Regla de Simpson compuesta:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

- $n = 4, h = \frac{b-a}{4} = \frac{0.8}{4} = 0.2$
- $f(x_0) = f(0) = 0.2, f(x_1) = f(0.2) = 1.288, f(x_2) = f(0.4) = 2.456,$
 $f(x_3) = f(0.6) = 3.464, f(x_4) = f(0.8) = 0.232$
- $\int_a^b f(x) dx \approx 1.623467$
- Error: $1.640533 - 1.623467 = 0.017067$ (error relativo 1.04%)

Error de la regla de Simpson 1/3

$$E_t = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad h = \frac{b-a}{2}$$

Sumando los errores individuales de los segmentos y sacando el promedio de la derivada, el error estimado de la regla de Simpson compuesta se obtiene:

Error de la regla de Simpson compuesta

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}$$

Fórmulas compuestas (nodos equidistantes):

- Trapecio: $\frac{h}{2} \left[f_0 + f_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right]$
- Simpson: $\frac{h}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f_j + f_n \right)$

La regla de Simpson 1/3 compuesta:

- da resultados muy precisos;
- se considera mejor que la regla del trapecio en la mayoría de las aplicaciones;
- está limitada a los casos donde los valores están equidistantes;
- está limitada a situaciones en las que hay un número par de segmentos y un número impar de puntos.

Importante

Resuelve los ejercicios 3.15 – 3.17.

integral

- quad – no se recomienda!
- `integral(fun,xmin,xmax)` – Integra de forma **numérica** la función `fun` de `xmin` a `xmax` mediante la **cuadratura adaptativa global** y las tolerancias de error predeterminadas.

La función `integral` permite especificar opciones adicionales mediante pares de nombre-valor:

- `'RelTol'`: Tolerancia relativa, por defecto es $1e-6$.
- `'AbsTol'`: Tolerancia absoluta, por defecto es $1e-10$.

Ejemplo: Ejercicio (3.14)

```
f = @(x) 0.2 + 25*x - 200*x.^2 + 675*x.^3 - 900*x.^4 + 400*x.^5;  
a = 0; b = 0.8;  
I = integral(f,a,b,'AbsTol',1e-6);  
^^I^^
```

trapz

- `trapz(X,Y)` – integra Y con respecto a las coordenadas o el espaciado escalar especificado por X .

Ejemplo:

```

%%I%%I%%IX = 0:pi/100:pi;
%%I%%I%%IY = sin(X);
%%I%%I%%IQ = trapz(X,Y)
%%I%%I

```

```

%%I%%IQ = 1.9998
%%I

```

Importante

Resuelve los ejercicios 3.18 – 3.20.

Bibliografía

1. **Capítulos 17–18, 21–22** de
Chapra S.C.; Canale R. (2005) *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Ed. McGraw-Hill
2. **Capítulos 4–7** de
Mathews J.H., Fink K.D. (2000) *Métodos Numéricos con MATLAB*. Ed. Prentice Hall.