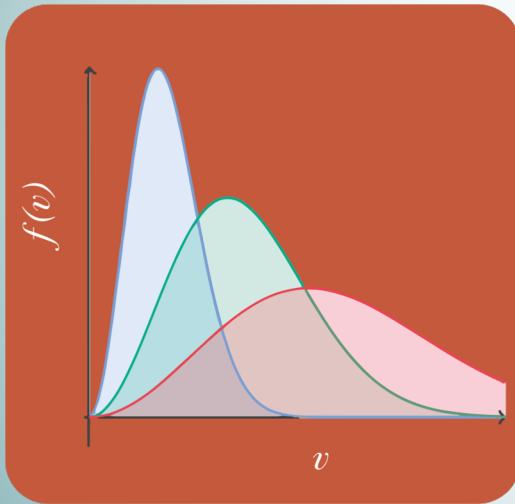


Métodos Matemáticos en la Ingeniería

BLOQUE III. OPTIMIZACIÓN

TEMA 9. OPTIMIZACIÓN



Vera Egorova

Sara Pérez Carabaza

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Este material se publica bajo la siguiente licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



- 1 **Introducción**

- 2 **Optimización unidimensional no restringida**

 - Método de dicotomía
 - Método de la sección dorada
 - Método de Newton
 - Optimización unidimensional con MATLAB
- 3 **Optimización multidimensional**

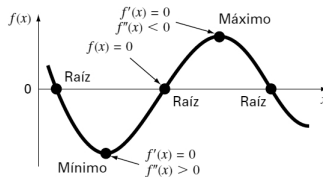
- 4 **Programación lineal**

Optimización

Llamamos **optimización** al acto de obtener el mejor resultado posible dadas ciertas circunstancias.

La localización de raíces (Tema 2) y la optimización están relacionadas, en el sentido de que ambas involucran la búsqueda de un punto en una función:

- La localización de raíces – de los ceros de una función o funciones.
- La optimización – del **mínimo** o del **máximo**.



Determinar x que minimiza (maximiza) $f(x)$ sujeto a

$$d_i(x) \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$e_i(x) = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \text{ donde}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector de diseño n -dimensional;
 - $f(x)$ es la función objetivo;
 - $d_i(x)$ son las restricciones de desigualdad;
 - $e_i(x)$ son las restricciones de igualdad;
 - a_i y b_i son constantes.
-
- Si $f(x)$ y las restricciones son lineales $\rightarrow$ **problema de programación lineal**
 - Si $f(x)$ es cuadrática y las restricciones son lineales $\rightarrow$ **problema de programación cuadrática**
 - Si $f(x)$ no es lineal ni cuadrática y/o las restricciones no son lineales $\rightarrow$ **problema de programación no lineal**
 - Se dice también que se tiene un **problema de optimización restringido** si se incluyen las restricciones $d_i(x)$ y $e_i(x)$; de otra forma, se trata de un **problema de optimización no restringido**.

Ejercicio (5.1)

Clasifica los siguientes problemas de optimización:

1. Maximizar $f(x, y) = 3x + 5y$ sujeto a $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Ejercicio (5.1)

Ejercicio (5.1)

Clasifica los siguientes problemas de optimización:

1. Maximizar $f(x, y) = 3x + 5y$ sujeto a $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$
 - La función objetivo es lineal.
 - Las restricciones son desigualdades lineales.
 - **Problema de Programación Lineal , Optimización Restringida.**
2. Minimizar $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Ejercicio (5.1)

Clasifica los siguientes problemas de optimización:

1. Maximizar $f(x, y) = 3x + 5y$ sujeto a $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$
 - La función objetivo es lineal.
 - Las restricciones son desigualdades lineales.
 - **Problema de Programación Lineal , Optimización Restringida.**
2. Minimizar $f(x) = x^2 - 4x + 4$
 - La función objetivo es cuadrática, ya que $f(x) = (x - 2)^2$.
 - No hay restricciones.
 - **Problema de Programación Cuadrática, Optimización No Restringida.**
3. Minimizar $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$ sujeto a $x^2 + y^2 \leq 1$

Ejercicio (5.1)

Clasifica los siguientes problemas de optimización:

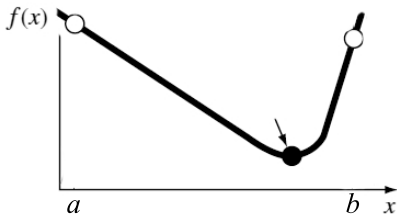
1. Maximizar $f(x, y) = 3x + 5y$ sujeto a $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$
 - La función objetivo es lineal.
 - Las restricciones son desigualdades lineales.
 - **Problema de Programación Lineal , Optimización Restringida.**
2. Minimizar $f(x) = x^2 - 4x + 4$
 - La función objetivo es cuadrática, ya que $f(x) = (x - 2)^2$.
 - No hay restricciones.
 - **Problema de Programación Cuadrática, Optimización No Restringida.**
3. Minimizar $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$ sujeto a $x^2 + y^2 \leq 1$
 - La función objetivo es cuadrática.
 - La restricción $x^2 + y^2 \leq 1$ es no lineal.
 - **Problema de Programación No Lineal, Optimización Restringida.**

Unimodalidad

La función $f(x)$ es **unimodal** en el intervalo $[a, b]$ si existe el punto $x^* \in [a, b]$ tal que $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ se cumple

- $f(x_1) > f(x_2)$, si $x_2 < x^*$,
- $f(x_1) < f(x_2)$, si $x^* < x_1 < x_2$.

La función se llama **unimodal** en un intervalo, si tiene sólo un extremo en este intervalo.



Ejercicio (5.2)

Determina si las siguientes funciones son unimodales en el intervalo $[-5, 5]$:

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$

3. $f(x) = |x - 2|$

4. $f(x) = \text{sen}(x)$

Ejercicio (5.2)

Determina si las siguientes funciones son unimodales en el intervalo $[-5, 5]$:

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

3. $f(x) = |x - 2|$

2. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$

4. $f(x) = \sin(x)$

1. sí

2. no

3. sí

4. no

Ejercicio (5.2)

Determina si las siguientes funciones son unimodales en el intervalo $[-5, 5]$:

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

3. $f(x) = |x - 2|$

2. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$

4. $f(x) = \sin(x)$

1. sí

2. no

3. sí

4. no

Ejercicio (5.3)

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$. Esta función no es unimodal en todo su dominio real. Encuentra el intervalo más grande que contenga el punto $x = 3$ en el que la función sea unimodal.

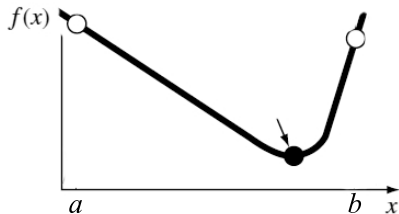
Ejercicio (5.4)

Cree un ejemplo de una función que sea unimodal en el intervalo $[-10, 10]$ pero que no sea ni cóncava ni convexa en todo ese intervalo. Realice una gráfica aproximada de dicha función.

- Métodos cerrados (métodos de eliminación de regiones):
 - Búsqueda a intervalos iguales
 - Método de bisección (dicotomía)
 - Método de Fibonacci
 - Método de la sección dorada
- Métodos indirectos:
 - Método de Newton
 - Método de la secante
- Métodos de aproximación polinomial

- Este tipo de métodos se centra en la búsqueda de las soluciones óptimas mediante sucesivas reducciones del intervalo de estudio y en la eliminación de subintervalos.
- Si la función es unimodal, se puede definir un criterio para eliminar regiones donde seguro el óptimo no se encuentra.
- Cuando el subintervalo “sobreviviente” tenga una longitud suficientemente pequeña, la búsqueda termina.
- La gran ventaja de estos métodos de búsqueda es que solamente requieren evaluaciones de la función y no necesitamos ninguna hipótesis adicional acerca de la derivabilidad de la misma.

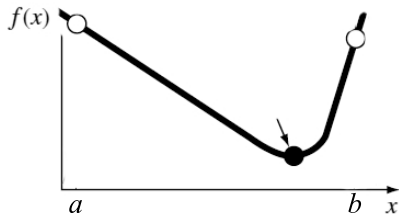
Método	Reducciones fraccionales: L_n/L_0
Búsqueda a intervalos iguales	$(2/3)^n$
Dicotomía	$(1/2)^n$
Fibonacci	$2/F_{N+1}$
Sección dorada	$(0.6180)^{n-1}$



Ejercicio (5.5)

Dada una función $f(x)$ que es unimodal y tiene un mínimo en el intervalo $[a, b]$. Se seleccionan dos puntos x_1 y x_2 dentro del intervalo tal que $a < x_1 < x_2 < b$.

1. Si $f(x_1) < f(x_2)$, ¿en qué subintervalo se puede asegurar que se encuentra el mínimo?
2. Si $f(x_1) > f(x_2)$, ¿cuál sería el nuevo intervalo de búsqueda para el mínimo?
3. ¿Qué sucede si $f(x_1) = f(x_2)$?



Ejercicio (5.5)

Dada una función $f(x)$ que es unimodal y tiene un mínimo en el intervalo $[a, b]$. Se seleccionan dos puntos x_1 y x_2 dentro del intervalo tal que $a < x_1 < x_2 < b$.

1. Si $f(x_1) < f(x_2)$, ¿en qué subintervalo se puede asegurar que se encuentra el mínimo?
2. Si $f(x_1) > f(x_2)$, ¿cuál sería el nuevo intervalo de búsqueda para el mínimo?
3. ¿Qué sucede si $f(x_1) = f(x_2)$?

1. $[a, x_2]$.2. $[x_1, b]$.3. $[x_1, x_2]$.

1. Definir el intervalo inicial $[a, b]$ y una tolerancia ϵ .
2. En cada iteración, evaluar la función en dos puntos:

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \delta, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \delta$$

donde $\delta < \epsilon$ es una pequeña constante positiva.

3. Reducir del Intervalo:

- Si $f(x_1) < f(x_2)$, entonces el mínimo se encuentra en $[a, x_2]$, y se actualiza $b = x_2$.
- Si $f(x_1) > f(x_2)$, entonces el mínimo se encuentra en $[x_1, b]$, y se actualiza $a = x_1$.

4. Repetir el proceso hasta que la longitud del intervalo $L = b - a$ sea menor que la tolerancia ϵ .

Ejercicio (5.6)

Utiliza el método de dicotomía para encontrar el mínimo de la función $f(x) = (x-2)^2 + 3$ en el intervalo $[0, 3]$. Realiza 3 iteraciones, mostrando en cada paso el intervalo resultante. A continuación, implementa el método de dicotomía para hallar el mínimo de $f(x)$ con $\epsilon = 10^{-6}$.

1. Calcular la razón dorada: $d = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ y poner $\tau = 1 - d = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$
2. Elegir dos puntos interiores: $x_1 = a + \tau(b - a)$, $x_2 = a + b - x_1$
3. Evaluar la función $f(x)$ en estos dos puntos.
4. Comparar los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$:
 - Si $f(x_1) \leq f(x_2)$, poner $b = x_2$, $x_2 = x_1$, $x_1 = a + b - x_2$;
 - Si $f(x_1) > f(x_2)$, poner $a = x_1$, $x_1 = x_2$, $x_2 = a + b - x_1$;
5. Calcular la longitud del intervalo: $L = b - a$.
6. Criterio de paro:
 - Si $L < \epsilon$, $x_{opt} = 0.5(a + b)$;
 - en otro caso, volver al paso 3.

Ejercicios

Resuelve Ejercicios (5.7) – (5.9)

- Método de Newton para $f(x) = 0$: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
- Punto crítico: $f'(x) = 0$
- Aplicar el método de Newton para la ecuación $f'(x) = 0$

- Método de Newton para $f(x) = 0$: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
- Punto crítico: $f'(x) = 0$
- Aplicar el método de Newton para la ecuación $f'(x) = 0$

Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

asegurando que para cada paso k , $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

Ventajas

- converge cuadráticamente
- Para una función cuadrática converge con una iteración

Desventajas

- se deben calcular las derivadas primeras y segundas
- si las derivadas segundas son nulas el método converge lentamente
- si existen más de un extremo el método puede no converger en el valor deseado.

Ejercicio (5.10)

Dada la función $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

1. Determina en forma analítica el valor mínimo y el correspondiente x para esta función.
2. Verifica que el método de Newton converge con una iteración desde cualquier punto inicial x_0 .

Ejercicio (5.10)

Dada la función $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

1. Determina en forma analítica el valor mínimo y el correspondiente x para esta función.
2. Verifica que el método de Newton converge con una iteración desde cualquier punto inicial x_0 .

1. **Solución analítica:**

$$f'(x) = 2x - 8 = 0 \implies x = 4.$$

$$\text{El valor mínimo es } f(4) = 4^2 - 8(4) + 12 = -4.$$

Ejercicio (5.10)

Dada la función $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

1. Determina en forma analítica el valor mínimo y el correspondiente x para esta función.
2. Verifica que el método de Newton converge con una iteración desde cualquier punto inicial x_0 .

1. **Solución analítica:**

$$f'(x) = 2x - 8 = 0 \implies x = 4.$$

El valor mínimo es $f(4) = 4^2 - 8(4) + 12 = -4$.

2. **Método de Newton:** $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

$$f'(x) = 2x - 8, \quad f''(x) = 2.$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2x_k - 8}{2} = x_k - (x_k - 4) = 4$$

Para cualquier punto inicial x_0 , la primera iteración da $x_1 = 4$, el mínimo exacto.

Ejercicios

Resuelve Ejercicios (5.11) y (5.12)

```
fminbnd (f,x1,x2, options)
```

Argumentos de entrada:

- f (function handle): Función para minimizar, especificada como un identificador de función o un nombre de función.
- $x1, x2$ (escalar finito): límite inferior y superior del intervalo.
- *options*: Estructura de opciones como devuelta por `optimset`.

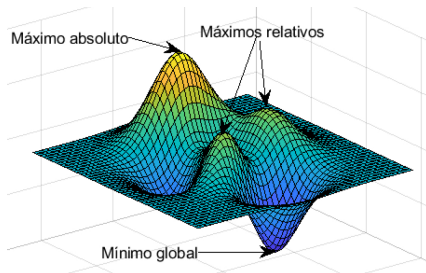
2 algoritmos:

1. Método de la sección dorada
2. Metodo de la interpolación cuadrática

Dada la función $f(x) = x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 5x$, hallar el mínimo de $f(x)$ en el intervalo $[-2, 1]$.

Dada la función $f(x) = x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 5x$, hallar el mínimo de $f(x)$ en el intervalo $[-2, 1]$.

```
f = @(x)x.^4 +2*x.^3+8*x.^2+5*x;  
a = -2; b = 1;  
fplot(f,[a,b])  
options = optimset('TolX',1e-6)  
[x,fval,exitflag,output] = fminbnd(f,a,b,options)
```



Tipo de Problema	Función Clave	Descripción
No Restringida Multidimensional	<code>fminsearch</code> <code>fminunc</code>	Método Simplex (sin gradiente). Métodos de gradiente (más potente).
Con Restricciones (El más general)	<code>fmincon</code>	Mínimo de una función con todo tipo de restricciones.
Programación Lineal (LP)	<code>linprog</code>	Minimiza $f' \cdot x$ con restricciones lineales.

Sea $f(x, y)$ una función. Para buscar los extremos relativos de f :

1. Calcular de los puntos críticos como solución del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

2. En cada punto crítico (a, b) hallar el hessiano

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

3. Estudiar el determinante de la matriz hessiana $|H|$:

- Si $|H| > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces (a, b) es punto de mínimo relativo;
- Si $|H| > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces (a, b) es punto de máximo relativo;
- Si $|H| < 0$, entonces (a, b) es punto silla;
- Si $|H| = 0$, el criterio no lleva a ninguna conclusión.

⇒ Ejercicio (5.13)

Para encontrar el mínimo de una función **multivariable** sin restricciones.

`fminsearch`: Sin Derivadas

- Robusto, funciona si la función no es suave.
- **Sintaxis:** `[x,fval] = fminsearch(fun,x0)`

```
f = @(x) x(1)^3 - 6*x(1)*x(2) + 3*x(2)^2 - 1;  
options = optimset('Display','iter','PlotFcns',@optimplotfval);  
xopt = fminsearch(f,[1,1],options)
```

Para encontrar el mínimo de una función **multivariable** sin restricciones.

fminsearch: Sin Derivadas

- Robusto, funciona si la función no es suave.
- **Sintaxis:** `[x,fval] = fminsearch(fun,x0)`

```
f = @(x) x(1)^3 - 6*x(1)*x(2) + 3*x(2)^2 - 1;  
options = optimset('Display','iter','PlotFcns',@optimplotfval);  
xopt = fminsearch(f,[1,1],options)
```

fminunc: Basado en Gradiente

- Rápido y preciso para funciones suaves.
- **Sintaxis:** `[x,fval] = fminunc(fun,x0)`

```
xopt = fminunc(f,[1,1],options)
```

`fmincon` es solver de programación no lineal. Resuelve problemas de la forma:

Minimizar $f(x)$ sujeto a:

$$A \cdot x \leq b$$

$$A_{eq} \cdot x = b_{eq}$$

$$lb \leq x \leq ub$$

$$c(x) \leq 0$$

$$c_{eq}(x) = 0$$

Sintaxis

```
x = fmincon(fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon)
```

Se usan corchetes vacíos [] para las restricciones que no se aplican.

Ejercicio (5.14)

Clasifica el problema y elige el método apropiado para resolverlo.

$$\begin{aligned} \min_x f^T x \\ Ax \leq b, \\ A_e x &= b_e, \\ a \leq x \leq b \end{aligned}$$

```
linprog(f,A,b, Aeq, beq,lb, ub, options)
```

Argumentos de entrada:

- f : Vector de coeficiente, especificado como un vector real o una matriz real.
- A, b : Restricciones de desigualdad lineales
- Aeq, beq : Restricciones de igualdad lineales.
- lb : Límites inferiores y superiores
- $options$: Estructura de opciones como devuelta por `optimoptionsoptimset`.

¡Importante!

`linprog` siempre minimiza. Para **maximizar** una función f , se debe minimizar $-f$.

Ejercicio (5.15)

Ejercicio (5.15)

$$f(x, y) = 5x + 4y \rightarrow \max, \text{ sujeto a } \begin{cases} 60x + 70y \leq 4000 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio (5.15)

Ejercicio (5.15)

$$f(x, y) = 5x + 4y \rightarrow \max, \text{ sujeto a } \begin{cases} 60x + 70y \leq 4000 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Las rectas que delimitan la región factible son

$$y = \frac{400 - 6x}{7}; y = 80 - 2x; y = 10; x = 0$$

Ejercicio (5.15)

Ejercicio (5.15)

$$f(x, y) = 5x + 4y \rightarrow \max, \text{ sujeto a } \begin{cases} 60x + 70y \leq 4000 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Las rectas que delimitan la región factible son

$$y = \frac{400 - 6x}{7}; y = 80 - 2x; y = 10; x = 0$$

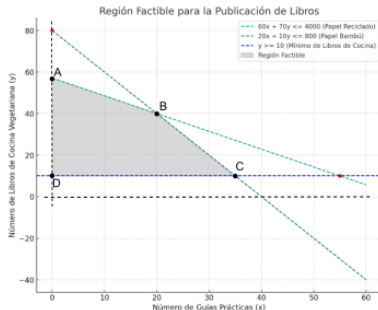
$$f(A) = f(0, 400/7) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{400}{7} \approx 229$$

$$f(B) = f(20, 40) = 5 \cdot 20 + 4 \cdot 40 = 260$$

$$f(C) = f(35, 10) = 5 \cdot 35 + 4 \cdot 10 = 215$$

$$f(D) = f(0, 10) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 10 = 40$$

Por tanto, $x_{opt} = 20$, $y_{opt} = 40$.



Ejercicio (5.18)

Un herrero con 80 kg de acero y 120 kg de aluminio quiere hacer bicicletas de paseo y de montaña que quiere vender, respectivamente a 250 y 450 euros cada una para sacar el máximo beneficio. Para la de paseo empleará 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para la de montaña 2 kg de ambos metales. ¿Cuántas bicicletas de paseo y de montaña deberá fabricar para maximizar las utilidades?

Ejercicio (5.18)

Un herrero con 80 kg de acero y 120 kg de aluminio quiere hacer bicicletas de paseo y de montaña que quiere vender, respectivamente a 250 y 450 euros cada una para sacar el máximo beneficio. Para la de paseo empleará 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para la de montaña 2 kg de ambos metales. ¿Cuántas bicicletas de paseo y de montaña deberá fabricar para maximizar las utilidades?

$$\begin{cases} f(x, y) = 250x + 450y \rightarrow \max \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio (5.18)

Ejercicio (5.18)

Un herrero con 80 kg de acero y 120 kg de aluminio quiere hacer bicicletas de paseo y de montaña que quiere vender, respectivamente a 250 y 450 euros cada una para sacar el máximo beneficio. Para la de paseo empleará 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para la de montaña 2 kg de ambos metales. ¿Cuántas bicicletas de paseo y de montaña deberá fabricar para maximizar las utilidades?

$$\begin{cases} f(x, y) = 250x + 450y \rightarrow \max \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

```
f = -[250 450];  
A = [1 2; 3 2];  
b = [80 120];  
Aeq = []; beq=[];  
lb = [0; 0;];  
linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
```