

Métodos Matemáticos en la Ingeniería

Ejercicios: Ecuaciones no lineales

2.1: Determina cuántas soluciones reales tiene cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $8x = 2x^2 + \cos(x)$

b) $e^x = x^2$

c) $e^x = \ln(-x)$

d) $x \ln x = 1$

2.2: Para cada una de las siguientes funciones, halla un intervalo $[a, b]$ de manera que $f(a)$ y $f(b)$ tengan distinto signo:

a) $f(x) = e^x - 2 - x$

b) $f(x) = 1 - x + \cos x$

c) $f(x) = \ln(x) - 5 + x$

d) $f(x) = x^2 - 10x + 23$

¿Cuántas raíces tiene cada función? Verifica los resultados representado gráficamente las funciones.

2.3: Implementa el método de bisección para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - \sin x = 0,25$

b) $x \ln x - 1,2 = 0$

c) $\ln x - \frac{7}{2x+6} = 0$

con el error absoluto $\varepsilon < 0,0001$. Grafica las funciones para definir el número de raíces y el intervalo inicial $[a, b]$ para cada raíz. Presenta los resultados en la tabla:

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	error

2.4: Supongamos que usamos el método de bisección para hallar una raíz de $f(x)$ en el intervalo $[2, 7]$. ¿Cuántas iteraciones se necesitan para asegurar que la aproximación tiene una precisión de 5×10^{-9} ?

2.5: Para cada una de las ecuaciones del ejercicio (2.3), realiza lo siguiente:

a) Utilizando el intervalo inicial $[a, b]$ que definiste y la tolerancia $\epsilon = 0,0001$, calcula el número teórico de iteraciones (N) necesarias.

b) Compara este valor teórico N con el número de iteraciones (n) que tu implementación necesitó.

- c) Comprueba y argumenta si se cumple la condición $n \leq N$. ¿Era de esperar este resultado? ¿Por qué?

2.6: Prueba que la fórmula del método de la falsa posición ($x_r = b - f(b) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$) es equivalente a $x_r = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$.

2.7: Implementa el método de falsa posición para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $8x - \cos x - 2x^2 = 0$ b) $e^x + 2^{-x} + 2 \cos x = 6$

con error absoluto $\varepsilon < 0,000001$. Grafica las funciones para definir el número de raíces y el intervalo inicial $[a, b]$ para cada raíz. ¿Cuántas iteraciones ha hecho el método en cada caso?

2.8: Compara la convergencia de los métodos de bisección y de falsa posición para la ecuación

$$\ln x - \frac{7}{2x+6} = 0$$

en el intervalo $(0; 5)$ con error absoluto $\varepsilon < 10^{-6}$. Explica los resultados. Elige el intervalo más conveniente.

2.9: La velocidad v de un paracaidista que cae está dada por

$$v = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{(-c/m)t} \right)$$

donde $g = 9,8m/s^2$. Para un paracaidista con coeficiente de arrastre de $c = 15kg/s$, calcule la masa m de modo que la velocidad sea $v = 126km/h$ en $t = 9s$. Utilice el método de la falsa posición para determinar m a un nivel de $\epsilon = 0,1\%$.

2.10: Utiliza el método de iteración simple de punto fijo para resolver las siguientes ecuaciones

a) $\cos(x) + 1 - x = 0$ c) $x(x+1)^2 = 1$
b) $2 - x = \ln x$ d) $\ln x + (x+1)^3 = 0$

con error absoluto $\varepsilon < 10^{-6}$. Elige diferentes valores para la aproximación inicial. Observa y comenta los resultados.

2.11: Escribe el proceso iterativo de punto fijo para hallar todas las raíces de la ecuación $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$. Estudia la convergencia.

2.12: El antiguo *método de dividir y promediar*, para obtener una aproximación de la raíz cuadrada de cualquier número positivo, a , se formula del modo siguiente: $x = \frac{x+a/x}{2}$. Demuestra que éste es equivalente al algoritmo de Newton-Raphson.

2.13: Implementa el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación $\cos(x) + 1 - x = 0$ con tolerancia $\varepsilon = 10^{-3}$. Utiliza como la aproximación inicial: $x_0 = 1$, $x_0 = 5$ y $x_0 = \frac{3}{2}\pi$. Explica los resultados.

2.14: Utiliza los métodos de

a) iteración de punto fijo, b) Newton,

para determinar una raíz de $f(x) = -x^2 + 1,8x + 2,5$ con el uso de $x_0 = 5$. Haz el cálculo hasta que el error sea menor que $\epsilon = 0,05\%$. Compara con la solución exacta. Asimismo, comprueba el error de la respuesta final y compara la convergencia.

2.15: Se puede calcular la raíz n -ésima de un número a resolviendo la ecuación $x^n - a = 0$. Implementar el método de Newton para obtener la $\sqrt[3]{345}$ con 7 cifras decimales exactas, partiendo del valor $x_0 = 2$.

2.16: Utiliza los métodos de la secante y de la falsa posición para calcular la raíz de $f(x) = x^3 - \cos(x)$. Empieza los cálculos con los valores iniciales $a = x_{k-1} = 0,5$ y $b = x_k = 5,0$.

2.17: Se considera la ecuación $\det A(x) = 0$, donde x es un número real y $A(x)$ denota la matriz

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ \sin x & \cos x & x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & -5 & 6 & 2 & 8 \\ -x & -2x & 1+x & \cos x & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Determinar el número de soluciones de la ecuación y calcular cada una de ellas.

2.18: Dada la matriz

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & 2 & -3 & 5 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x & 0 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & x^3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cos x & -x \end{pmatrix}$$

Determinar un valor positivo de x tal que 5 sea un valor propio de A . Comprobar la solución x^* calculando todos los valores propios de la matriz $A(x^*)$. ¿Hay otros valores propios reales?

2.19: Calcula los mínimos y máximos de la función

$$f(x) = e^{-x^2} + x^3 - 3x$$

en el intervalo $[-2; +2]$, así como los puntos de inflexión. Representa gráficamente la función y marca los extremos locales con un asterisco (*) y los puntos de inflexión con un círculo.