

Interpolación

3.1: Halla los polinomios de Lagrange de grado 2 para los siguiente datos:

a) $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1; f_0 = 3, f_1 = 2, f_2 = 5;$

b) $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4; f_0 = 3, f_1 = 4, f_2 = 6.$

3.2: Sea $f(x) = \cos(x)$ definida en el intervalo $[0, 1,2]$. Construye los polinomios de Lagrange usando los siguientes nodos de interpolación:

a) $x_0 = 0, x_1 = 1,2$ (Polinomio interpolador lineal);

b) $x_0 = 0, x_1 = 0,6, x_2 = 1,2$ (Polinomio interpolador cuadrático);

c) $x_0 = 0, x_1 = 0,4, x_2 = 0,8, x_3 = 1,2$ (Polinomio interpolador cúbico).

En cada caso, determina la cota del error.

3.3: Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{A^2 - x}$$

que se interpola por el polinomio de Lagrange con los nodos $x = -4; -3; -2; -1$. Hallar el valor de A para que el error sea menor que 10^{-5} .

3.4: Se toman cuatro medidas de un sistema eléctrico. En el momento 0 s la salida es 1 V, en el momento 1 s es 2 V, en el momento 2 s es 9 V y en el tiempo 3 s es 28 V. Halla un modelo matemático (polinomio interpolador) para este sistema.

3.5: Partiendo de la tabla que proporciona el calor específico (en cal/ mol K), de la plata, a distintas temperaturas (en K):

Temperatura (K)	8	10	12	14	16
Calor esp. (cal/mol K)	0.0236	0.0475	0.0830	0.1736	0.2020

Calcula el polinomio interpolador de grado 4 para estos puntos y estima el calor específico de la plata a 13K.

3.6: Las torres de soporte de una línea de alta tensión tienen un vano de 400m. Se ha medido la altura a que se encuentra el cable en distintas partes del recorrido obteniéndose los siguientes valores:

Distancia, m	0	120	230	310	400
Altura (m)	50.00	43.28	42.18	44.42	50.00

Utiliza la interpolación para obtener la flecha máxima (punto medio de la catenaria).

3.7: Dada la función de Runge:

$$f : [-5; +5] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Halla los polinomios interpoladores de Lagrange de grado 5, 10 y 20, respectivamente, que interpolan a f en puntos igualmente espaciados del intervalo $[-5; +5]$. Representa gráficamente la función y los correspondientes polinomios interpoladores. Compara los resultados con la interpolación usando los nodos de Chebyshev.

3.8: Ajusta a una línea recta los valores (x, y) :

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0.5	2.5	2.0	4.0	3.5	6.0	5.5

3.9: Ajusta a un polinomio de segundo grado los datos:

x	0	1	2	3	4	5
y	2.1	7.7	13.6	27.2	40.9	61.1

3.10: Halla el polinomio de grado menor o igual a 12 mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados de la función de $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(e^x)$, tomando como datos los valores de f en los nodos $x_j = jh$, $j = 0; \dots; 100$ y $h = 0,02$.

Integración

3.11: Integra numéricamente

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0,8$, aplicando:

- a) Regla del trapecio
- b) Regla de Simpson 1/3
- c) Regla de Simpson 3/8

Calcula el error relativo para cada caso.

3.12: Utiliza la regla de Simpson 1/3 para aproximar la integral $\int_0^1 x^3 - 3x + 1 \, dx$. Calcula el error relativo. Explica los resultados.

3.13: Utiliza la regla de Simpson 1/3 para aproximar la integral entre 0 y 1 de la función

$$f(x) = |\sin(2\pi x)|$$

Compara con el resultado exacto, y explica los resultados. ¿Cómo se puede resolver este problema?

3.14: Integra numéricamente

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0,8$, aplicando las formulas compuestas de:

- a) Regla del trapecio
- b) Regla de Simpson 1/3

con $n = 2, 4, 8$ y 16 intervalos.

Calcula el error relativo para cada caso.

3.15: Se puede aproximar el valor π por la integral

$$\pi \approx \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

Hallar la integral por medio de las fórmulas compuestas de cuadraturas del trapecio y de Simpson 1/3 con $2, 4, 8, \dots, 1024$ nodos. Tabular los errores.

3.16: Las integrales de Fresnel de tipo coseno se definen así:

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$$

Construir una tabla de los valores de la función $C(z)$ para todo z de la forma $z = 0,05k$, donde $k = 1, \dots, 20$. Utilizar la fórmula de Simpson compuesta para $n = 10$. Utilizando estos datos, evalúa la función $C(z)$ en el nodo $z_0 = 1,37$, aplicando:

- a) Polinomio de interpolación de Lagrange;
- b) El trazador cúbico.

3.17: Dada la función

$$f(x) = \int_0^x \exp(\cos t \cdot \sin t) dt$$

Utiliza la regla de Simpson-1/3 compuesta con 20 intervalos para evaluar la función en los puntos $x = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$.

Evalúa la función $f(x)$ en el nodo $x_0 = \frac{\pi}{3}$, utilizando:

- Polinomio de interpolación de Lagrange;
- El trazador cúbico;
- La integración numérica (regla de Simpson-1/3 compuesta con 20 intervalos).

3.18: Calcula el valor aproximado de las siguientes integrales:

- a) $\int_0^\pi \exp(x^2) \sin^3(1+x) dx$ con un error relativo inferior a 10^{-8} .
- b) $\int_0^\pi \exp(\sin x \cos x) dx$ con 6 dígitos decimales de precisión.
- c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^t+1}$ con un error absoluto inferior a 10^{-12} .

3.19: Calcula el área de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 3x^2 - x - 1, \quad g(x) = \sin(\pi x),$$

utilizando

- a) Regla de Simpson 1/3 compuesta con 8 intervalos,
- b) Cuadratura adaptativa (comando `integral`).

3.20: Se proporciona la siguiente tabla de valores de una función desconocida $f(x)$:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	1.53	2.10	3.58	4.95	5.89	6.20	6.05

- a) Aproxima la integral $I_f = \int_0^3 f(x) dx$ usando la regla del trapecio compuesta.
- b) Calcula el polinomio interpolador $P(x)$ de grado 6 que se ajusta a los datos de la tabla usando el método de Lagrange.
- c) Aproxima la integral $I_p = \int_0^3 P(x) dx$ usando la cuadratura adaptativa (comando `integral`).