

Métodos Matemáticos en la Ingeniería

Ejercicios: Sistemas Lineales

4.1: Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Indica si son simétricas, diagonales, singulares, ortogonales o ninguna de las anteriores (una matriz puede pertenecer a más de una categoría).

4.2: Para cada una de las siguientes matrices, calcula su norma 1 ($\|\cdot\|_1$) y su norma infinito ($\|\cdot\|_\infty$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = (4 \quad -2 \quad 0 \quad -5)$$

4.3: Responde a las siguientes preguntas, justificando tu respuesta.

- Para la matriz identidad I_n de tamaño $n \times n$, ¿cuál es el valor de $\|I_n\|_1$ y $\|I_n\|_\infty$?
- ¿Es siempre cierto que para cualquier matriz cuadrada A , se cumple que $\|A\|_1 = \|A^t\|_\infty$? Justifica tu respuesta.
- Construye una matriz G de 2×2 que no sea simétrica, pero para la cual se cumpla que $\|G\|_1 = \|G\|_\infty$.

4.4: Un ingeniero está resolviendo un sistema de ecuaciones $Ax = b$ y sabe que los datos iniciales en el vector b tienen una precisión de 8 dígitos decimales. Al analizar la matriz A , calcula que su número de condición es aproximadamente $\kappa(A) \approx 50000$. ¿Cuántos dígitos de precisión se espera que se pierdan en la solución final? ¿Cuántos dígitos de la solución resultante debería considerar fiables el ingeniero?

4.5: Se tienen dos sistemas de ecuaciones, uno con la matriz P y otro con la matriz Q :

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,0001 \end{pmatrix}$$

Calcula el número de condición $\kappa(P)$ y $\kappa(Q)$ usando la norma infinito. ¿Cuál de los dos sistemas es numéricamente más estable (mejor condicionado) para resolver? Justifica tu respuesta.

4.6: Implementa el método de eliminación gaussiana para resolver los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = -11 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases} \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4.7: Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de eliminación gaussiana

$$a) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 0,0001x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

4.8: Calcula la factorización LU de los siguientes sistemas para hallar su solución:

$$a) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 21 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 13 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

4.9: Dadas las siguientes matrices,

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- Realiza la factorización LU de cada una de ellas.
- Utiliza dichas factorizaciones para hallar las inversas de cada una de ellas.
- Calcula el condicionamiento de cada una de ellas.

4.10: Utilizando el método de Jacobi, calcula tres iteraciones del método para cada uno de los siguientes sistemas empezando las iteraciones en el vector nulo. ¿Converge la iteración de Jacobi a la solución?

$$a) \begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ -2x + y + 5 = 15 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -x + 3y = 1 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 18 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 19 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \end{cases}$$

- 4.11:** Expresa los sistemas planteados en el ejercicio anterior en su forma matricial. A continuación, implementa el algoritmo de Jacobi para hallar la solución numérica.
- 4.12:** Utilizando el método de Gauss-Seidel, calcula tres iteraciones del método para los sistemas del ejercicio (4.10) y compara las soluciones. A continuación, implementa el algoritmo y compara la convergencia de ambos métodos (Jacobi y Gauss-Seidel).
- 4.13:** Utiliza el Teorema de Gerschgorin para estimar la localización de los autovalores de las matrices dadas:

$$a) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Repita el proceso usando las columnas de la matriz (aplicando el teorema a A^T). ¿Mejora esta nueva región la estimación de la localización de los autovalores?

- 4.14:** Utiliza MATLAB para calcular los autovalores de las matrices del Ejercicio (4.14). Verifica que todos están en el círculo de Gershgorin correspondiente.
- 4.15:** Calcula autovalores y autovectores de las siguientes matrices y verifica numéricamente que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$. Comenta el resultado.

$$a) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$