

Métodos Matemáticos en la Ingeniería

Ejercicios: Optimización

5.1: Clasifica los siguientes problemas de optimización como: problema de programación lineal, problema de programación cuadrática, problema de programación no lineal, optimización restringida u optimización no restringida.

- a) Maximizar $f(x, y) = 3x + 5y$ sujeto a: $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$
- b) Minimizar $f(x) = x^2 - 4x + 4$.
- c) Minimizar $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$ sujeto a: $x^2 + y^2 \leq 1$

5.2: Determina si las siguientes funciones son unimodales en el intervalo $[-5, 5]$.

- a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ c) $f(x) = |x - 2|$
b) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$ d) $f(x) = \sin(x)$

5.3: Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$. Esta función no es unimodal en $[-5, 5]$. Encuentra el subintervalo más grande que contenga el punto $x = 3$ en el que la función sea unimodal.

5.4: Cree un ejemplo de una función que sea unimodal en el intervalo $[-10, 10]$ pero que no sea ni cóncava ni convexa en todo ese intervalo. Realice una gráfica aproximada de dicha función.

5.5: Dada una función $f(x)$ que es unimodal y tiene un mínimo en el intervalo $[a, b]$. Si se seleccionan dos puntos x_1 y x_2 dentro del intervalo tal que $a < x_1 < x_2 < b$, responde a las siguientes preguntas:

- a) Si $f(x_1) < f(x_2)$, ¿en qué subintervalo se puede asegurar que se encuentra el mínimo?
- b) Si $f(x_1) > f(x_2)$, ¿cuál sería el nuevo intervalo de búsqueda para el mínimo?
- c) ¿Qué sucede si $f(x_1) = f(x_2)$?

5.6: Utiliza el método de dicotomía para encontrar el mínimo de la función $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ en el intervalo $[0, 3]$. Realiza 3 iteraciones, mostrando en cada paso el intervalo resultante. A continuación, implementa el método de dicotomía para hallar el mínimo de $f(x)$ con $\epsilon = 10^{-6}$.

5.7: Dada la función $f(x) = x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 5x$, utiliza el método de la sección dorada para hallar el mínimo de $f(x)$ en el intervalo $[-2, 1]$ con $\epsilon = 10^{-6}$. ¿Cuántas iteraciones se necesitan?

5.8: En ciertos puntos atrás de un aeroplano se hacen mediciones de la presión. Los datos tienen el mejor ajuste con la curva $y = 8 + 6 \cos x - 1,5 \sin x$, desde $x = 0$ hasta 6 s. Utiliza el método de la búsqueda de la sección dorada para encontrar la presión mínima en el intervalo $[2, 4]$.

5.9: Usa los métodos de la optimización unidimensional para encontrar el mínimo de

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 2 \sin x$$

dentro del intervalo $[0, 4]$.

5.10: Dada la función $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

- a) Determina en forma analítica el valor mínimo y el correspondiente x para esta función.
- b) Verifica que el método de Newton converge con una iteración desde cualquier punto inicial x_0 .

5.11: Dada la función $f(x) = x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 5x$, utiliza el método de Newton para hallar el mínimo de $f(x)$ en el intervalo $[-2, 1]$ con $\epsilon = 10^{-6}$. ¿Cuántas iteraciones se necesitan?

5.12: Emplee los métodos siguientes para encontrar el máximo de $f(x) = 4x - 1,8x^2 + 1,2x^3 - 0,3x^4$

- a) Método de la sección dorada en el intervalo $[-2, 4]$, $\epsilon = 1\%$;
- b) Método de Newton ($x_0 = 3$, $\epsilon = 1\%$).

5.13: (Repaso - Cálculo) Halla y clasifica todos los puntos críticos de las funciones:

- a) $f(x, y) = x^3 - 6xy + 3y^2 - 1$;
- b) $f(x, y) = -xye^{-(x^2+y^2)/2}$;
- c) $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;
- d) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$;
- e) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x$;
- f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$;
- g) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$;
- h) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

5.14: Clasifica el problema y elige el método apropiado para resolverlo:

- a) Minimizar la función $f(x, y) = (x - 2)^2 + 2(y - 1)^2$ partiendo del punto inicial $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
- b) Maximizar la función $f(x, y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2$ usando los valores iniciales, $x = -1$, $y = 1$.
- c) Minimizar $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$ sujeto a: $x^2 + y^2 \leq 1$
- d) Maximizar $f(x, y) = 3x + 5y$ sujeto a: $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

5.15: Resuelve el siguiente problema de programación lineal:

$$f(x, y) = 5x + 4y \rightarrow \text{máx, sujeto a } \begin{cases} 60x + 70y & \leq 4000 \\ 20x + 10y & \leq 800 \\ y & \geq 10 \\ x & \geq 0 \end{cases}.$$

5.16: Maximizar $f(x) = 150x_1 + 175x_2$, sujeto a

$$\begin{cases} 7x_1 + 11x_2 \leq 77, \\ 10x_1 + 8x_2 \leq 80, \\ 0 \leq x_1 \leq 9, \\ 0 \leq x_2 \leq 6. \end{cases}$$

5.17: Resuelve el problema de programación lineal:

$$\begin{cases} f(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \text{mín}, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 0 \leq x_1 \leq 1, \\ 0 \leq x_2 \leq 1, \\ 0 \leq x_3 \leq 1. \end{cases}$$

5.18: Un herrero con 80 kg de acero y 120 kg de aluminio quiere hacer bicicletas de paseo y de montaña que quiere vender, respectivamente a 250 y 450 euros cada una para sacar el máximo beneficio. Para la de paseo empleará 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para la de montaña 2 kg de ambos metales. ¿Cuántas bicicletas de paseo y de montaña deberá fabricar para maximizar las utilidades?

5.19: Una fábrica requiere fabricar dos tejidos de calidad diferente T_1 y T_2 ; se dispone de 500 kg de hilo a , 300 kg de hilo b y 108 kg de hilo c . Para obtener un metro de T_1 diariamente se necesitan 125 gr de a , 150 gr de b y 72 gr de c . Para producir un metro de T_2 por día se necesitan 200 gr de a , 100 gr de b y 27 gr de c . El T_1 se vende a 4000 euros el metro y el T_2 se vende a 5000 euros el metro. Si se debe obtener el máximo beneficio, ¿cuántos metros de T_1 y T_2 se deben fabricar?

5.20: Una empresa produce hormigón usando los ingredientes A y B . Cada kilo de ingrediente A cuesta 60 unidades monetarias y contiene 4 unidades de arena fina, 3 unidades de arena gruesa y 5 unidades de grava. Cada kilo de ingrediente B cuesta 100 unidades monetarias y contiene 3 unidades de arena fina, 6 unidades de arena gruesa y 2 unidades de grava. Cada amasada debe contener, por lo menos, 12 unidades de arena fina, 12 unidades de arena gruesa y 10 unidades de grava. Formule y resuelve un modelo de programación lineal.