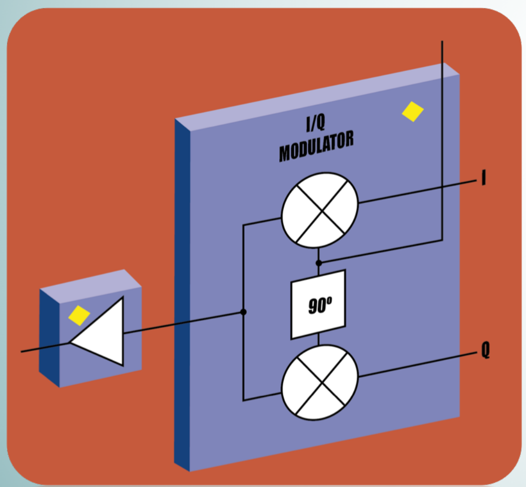
# Electrónica de Radiofrecuencia

## Tema 1. Introducción

### 1.2 Líneas de Transmisión




**Juan Pablo Pascual Gutiérrez**

**Enrique Villa Benito**

**Luisa María de la Fuente Rodríguez**

**José Ángel García García**

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones

# Líneas de Transmisión

Índice:

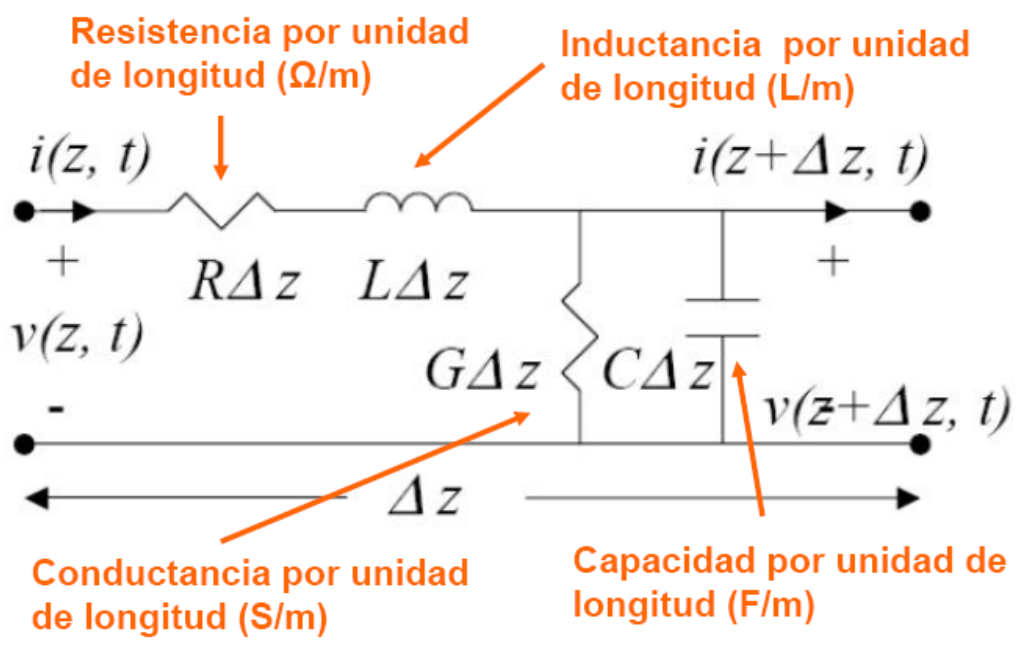
- Definición del problema: tramo elemental de línea de transmisión genérica
- Ejemplos de líneas de transmisión en diversas tecnologías
- Ecuaciones a resolver (Kirchhoff) y parámetros necesarios
- Definición de impedancia característica
- Definición coeficientes de reflexión
- Impedancia de una línea de longitud arbitraria cargada
- Casos particulares: stubs en corto, en abierto, carga adaptada, línea $\lambda$ /4
- Definición de Razón de Onda Estacionaria
- Definición pérdidas de inserción, de retorno. Balance de Potencias
- El acoplador direccional: ondas incidentes y reflejadas

# Líneas de Transmisión

- Supondremos una línea de transmisión genérica (cable de pares, coaxial, guía de ondas, línea microstrip, etc.) terminada con una cierta impedancia por un extremo y plantearemos la estimación de la impedancia vista por el otro extremos estableciendo la corriente y el voltaje en función de la posición a lo largo de la línea.
- Consideraremos la línea formada por un número infinito de tramos elementales

# Líneas de Transmisión

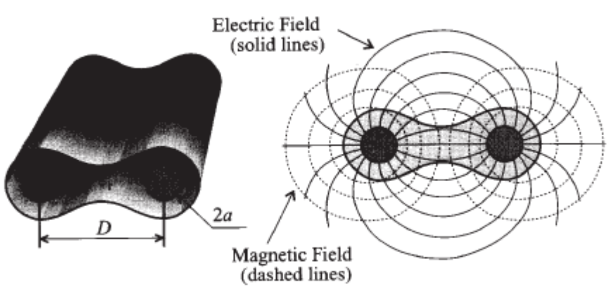
- Definiremos el modelo del tramo elemental de línea de transmisión
- Consideramos todos los efectos a modelar mediante varios elementos (inductancia y resistencia - pérdidas- en serie y conductancia - pérdidas- y capacitancia en paralelo).

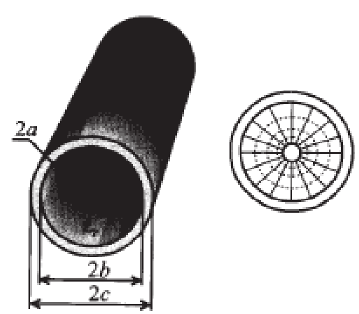


# Líneas de Transmisión

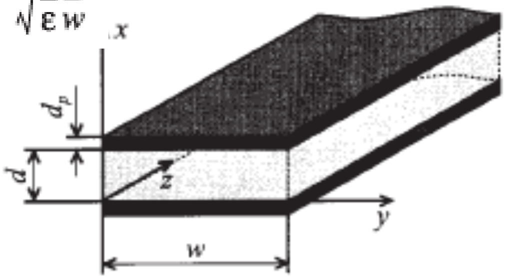
- Tabla de estimación de los valores de elementos localizados para 3 tipos de líneas distribuidas:

| Parameter | Two-Wire Line | Coaxial Line | Parallel-Plate Line | Unit |
|---|---|---|---|---|
| $R$ | $\dfrac{1}{\pi a \sigma_{\text{cond}} \delta}$ | $\dfrac{1}{2\pi\sigma_{\text{cond}}\delta}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ | $\dfrac{2}{w\sigma_{\text{cond}}\delta}$ | $\Omega$/m |
| $L$ | $\dfrac{\mu}{\pi}\operatorname{acosh}\left(\dfrac{D}{2a}\right)$ | $\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$ | $\mu\dfrac{d}{w}$ | H/m |
| $G$ | $\dfrac{\pi\sigma_{\text{diel}}}{\operatorname{acosh}(D/(2a))}$ | $\dfrac{2\pi\sigma_{\text{diel}}}{\ln(b/a)}$ | $\sigma_{\text{diel}}\dfrac{w}{d}$ | S/m |
| $C$ | $\dfrac{\pi\varepsilon}{\operatorname{acosh}(D/(2a))}$ | $\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$ | $\varepsilon\dfrac{w}{d}$ | F/m |




$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{d}{w}$$



# Líneas de Transmisión

- Las ecuaciones a cumplir serán:

$$\frac{\delta v(z,t)}{\delta z} = -Ri(z,t) - L\frac{\delta i(z,t)}{\delta t}$$

$$\frac{\delta i(z,t)}{\delta z} = -Gv(z,t) - C\frac{\delta v(z,t)}{\delta t}$$

*Ecuaciones del Telegrafista (Heaviside)*

Asumiendo:

$$I = I_0 e^{j\omega t}$$

$$V = V_0 e^{j\omega t}$$

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)V(z)$$

(*)

# Líneas de Transmisión

*Ecuaciones de Onda (Helmholtz)*

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -(R + j\omega L)\frac{dI(z)}{dz}$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = -(G + j\omega C)\frac{dV(z)}{dz}$$

sustituyendo (*) $\longrightarrow$

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \gamma^2 V(z)$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = \gamma^2 I(z)$$

Donde la const. de propagación es:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta$$

$$\boxed{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Siendo α cte. de atenuación y β cte. de fase

Sin pérdidas: R=G=α=0

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{f\sqrt{LC}}}$$

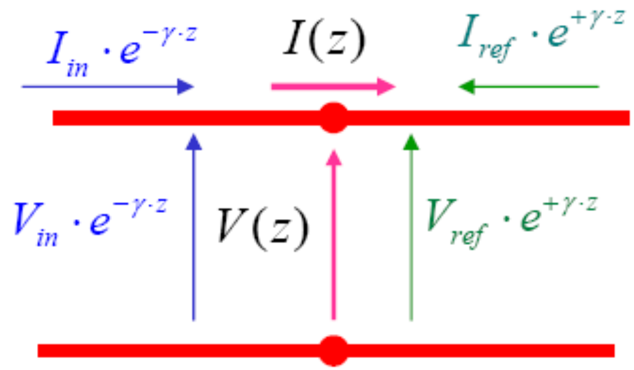
$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

# Líneas de Transmisión

- Considerando la línea situada entre un generador y una carga, se podrá construir una solución como combinación de una onda incidente y una reflejada.

$$V(z) = V_{inc} e^{-\gamma z} + V_{ref} e^{+\gamma z}$$

$$I(z) = I_{inc} e^{-\gamma z} - I_{ref} e^{+\gamma z} = \frac{V_{inc}}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_{ref}}{Z_0} e^{+\gamma z}$$




$$Z_0 = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = -\frac{V_{ref}}{I_{ref}}$$

$Z_0$: Impedancia Característica Línea

Sin pérdidas: R=G=α=0 $\quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

# Líneas de Transmisión

- La expresión temporal de corrientes y tensiones en la posición z y el instante t serán:

$$v(z,t) = \left|V_{inc}\right| \cos(\omega t - \beta z + \phi_{Vinc}) + \left|V_{ref}\right| \cos(\omega t + \beta z + \phi_{Vref})$$

$$i(z,t) = \left|I_{inc}\right| \cos(\omega t - \beta z + \phi_{Iinc}) + \left|I_{ref}\right| \cos(\omega t + \beta z + \phi_{Iref})$$

- Asumiendo que los valores incidente y reflejado se dan para z=0

$$V(z) = V_{0,inc} e^{-\gamma z} + V_{0,ref} e^{+\gamma z}$$

$$I(z) = I_{0,inc} e^{-\gamma z} - I_{0,ref} e^{+\gamma z}$$

# Líneas de Transmisión

- La impedancia en una posición z será función de z:

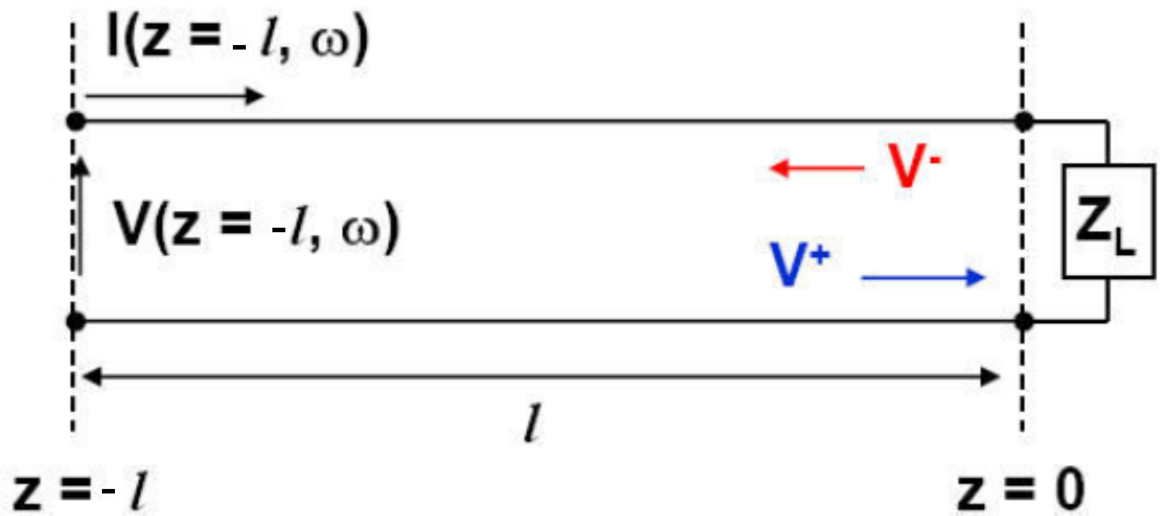
$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_{0,inc}e^{-\gamma z} + V_{0,ref}e^{+\gamma z}}{I_{0,inc}e^{-\gamma z} - I_{0,ref}e^{+\gamma z}}$$

- La impedancia característica $Z_0$ es la que tendríamos si no hubiese onda reflejada (línea infinita o línea terminada en adaptación).
- No será función de z:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = \frac{V_{0,inc}e^{-\gamma z}}{I_{0,inc}e^{-\gamma z}} = \frac{V_0^+}{I_0^+}$$

# Líneas de Transmisión

- El origen de z se suele tomar en la carga, no en el generador. Se hace un cambio de variable a la longitud de la línea l



# Líneas de Transmisión

- Si deseamos saber el voltaje y la corriente en la posición de la carga (L) se reescriben las ecuaciones anteriores en z=-l=0.

$$V(l) = V^{+}e^{+\gamma l} + V^{-}e^{-\gamma l}$$

$$I(l) = I^{+}e^{+\gamma l} - I^{-}e^{-\gamma l}$$

$$V_L = V(z=0) = V^{+} + V^{-}$$

$$I_L = I(z=0) = I^{+} - I^{-} = \frac{V^{+} - V^{-}}{Z_0}$$

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{V^{+} + V^{-}}{\frac{V^{+}}{Z_0} - \frac{V^{-}}{Z_0}} = Z_0 \frac{V^{+} + V^{-}}{V^{+} - V^{-}} = Z_0 \frac{1 + \frac{V^{-}}{V^{+}}}{1 - \frac{V^{-}}{V^{+}}}$$

# Líneas de Transmisión

- COEFICIENTE DE REFLEXIÓN se define como el cociente entre onda reflejada de tensión y onda incidente de tensión.
- Se puede definir en cualquier punto de la línea (z), pero es de especial interés en z=0 (posición de la carga)

$$\Gamma(l) = \frac{V^- e^{-\gamma l}}{V^+ e^{+\gamma l}} = \frac{V^-}{V^+} e^{-2\gamma l} = \rho(l) e^{j\phi_\Gamma(l)}$$

Para cargas $Z_L$ de carácter pasivo :
(0: no hay reflexión, 1: refleja todo)

$$0 \le \left|\Gamma(l)\right| \le 1$$

# Líneas de Transmisión

- En z=0 (posición de la carga)

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = Z_0 \frac{1+\frac{V^-}{V^+}}{1-\frac{V^-}{V^+}} = Z_0 \frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L} \Rightarrow \boxed{\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}$$

- Si se termina la línea con $Z_L = Z_0$ no habrá onda reflejada y la carga disipará toda la energía.
- Conocido $\Gamma_L$ se puede calcular $\Gamma(l)$

$$\Gamma(l) = \Gamma_L e^{-2\gamma l}$$

# Líneas de Transmisión

- Para calcular la impedancia que se ve desde la entrada de la línea de longitud l (z=-l):

$$Z(z=-l)=\frac{V(-l)}{I(-l)}=\frac{V^{+}e^{+\gamma l}+V^{-}e^{-\gamma l}}{\dfrac{V^{+}e^{+\gamma l}-V^{-}e^{-\gamma l}}{Z_0}}=Z_0\frac{V^{+}e^{+\gamma l}+V^{-}e^{-\gamma l}}{V^{+}e^{+\gamma l}-V^{-}e^{-\gamma l}}=Z_0\frac{1+\Gamma(z=-l)}{1-\Gamma(z=-l)}$$

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_L&=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}\\ \Gamma(l)&=\Gamma_L e^{-2\gamma l}\end{aligned}\right\}\quad \boxed{Z(z=-l)=Z_0\left(\frac{Z_L+Z_0Tanh(\gamma l)}{Z_0+Z_LTanh(\gamma l)}\right)}$$

# Líneas de Transmisión

- Si se supone que la línea no tiene pérdidas ($R=G=0, \alpha=0, \gamma=j\beta$)

$$\boxed{Z(z=-l)=Z_0\left(\frac{Z_L+jZ_0Tan(\beta l)}{Z_0+jZ_LTan(\beta l)}\right)}$$

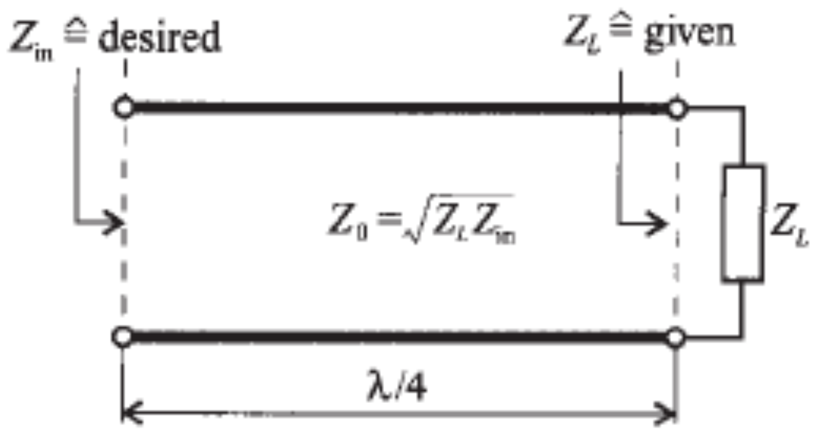
- En baja frecuencia $\beta \sim 0$ → $Z=Z_L$
- Terminación en corto $Z_L=0$ → $Z=jZ_0 \tan(\beta l)$
- Terminación en abierto $Z_L=\infty$ → $Z=-jZ_0 / \tan(\beta l)$
- Si $l=\lambda/4$ $\quad Z(z=-\lambda/4)=\dfrac{Z_0{}^2}{Z_L}$
- Se puede elegir $Z_0=\sqrt{Z(z=-\lambda/4).Z_L}$

# Líneas de Transmisión

- Método de adaptación de impedancias reales:

Se puede elegir

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{Z_{in}.Z_L}}$$



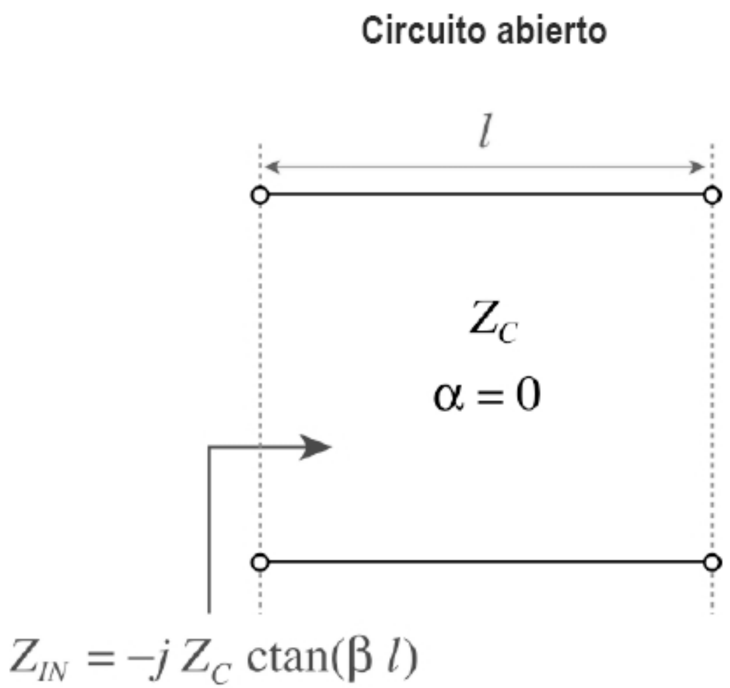

Input impedance matched to a load impedance through a $\lambda/4$ line segment $Z_0$.

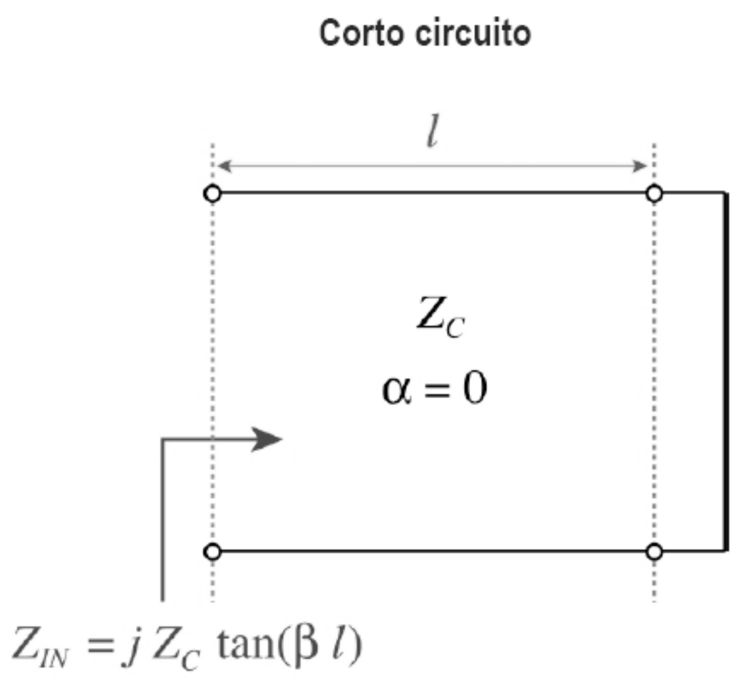
# Líneas de Transmisión

Adaptación con stub en paralelo (o en serie). Dos tipos de stubs:

•Terminados en abierto

•Terminados en corto




Con stub en paralelo conviene usar admitancias.

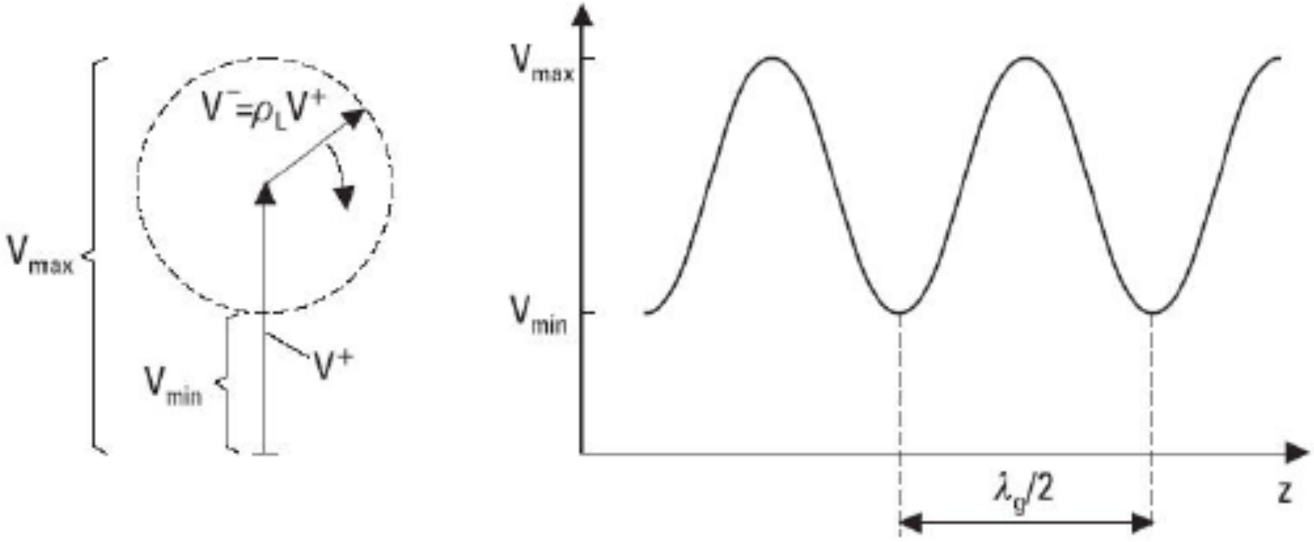
# Líneas de Transmisión

- Razón de Onda Estacionaria (ROE, VSWR) es un parámetro que indica el grado de desadaptación de una línea de transmisión con una carga dada.

$$ROE = \frac{\left|V^+\right| + \left|V^-\right|}{\left|V^+\right| - \left|V^-\right|} = \frac{V^+\left(1 + \dfrac{\left|V^-\right|}{\left|V^+\right|}\right)}{V^+\left(1 - \dfrac{\left|V^-\right|}{\left|V^+\right|}\right)} = \frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L}$$

# Líneas de Transmisión

- ROE: medida de la relación entre los máximos y los mínimos ocasionados por las ondas incidente y reflejada.




$$1(adapt.) \leq ROE \leq \infty(desadapt.)$$

# Líneas de Transmisión

- Balance de potencia en una línea de transmisión cargada, y alimentada con un generador sinusoidal adaptado a la impedancia característica $Z_0$.

$$P_{in} = P^{+} = \frac{\left|V^{+}\right|^{2}}{2Z_0} \qquad P_{ref} = P^{-} = \frac{\left|V^{+}\right|^{2}\left|\Gamma_L\right|^{2}}{2Z_0}$$

$$P_L = P^{+} - P^{-} = P^{+}\left(1 - \left|\Gamma_L\right|^{2}\right)$$

# Líneas de Transmisión

- Pérdidas de Inserción: Relación entre la potencia incidente en la carga y la potencia transmitida de forma efectiva a la misma. (Se expresan en dB)

$$L_{ins} = \frac{P_{in}}{P_L} = \frac{1}{(1 - |\Gamma_L|^2)}$$

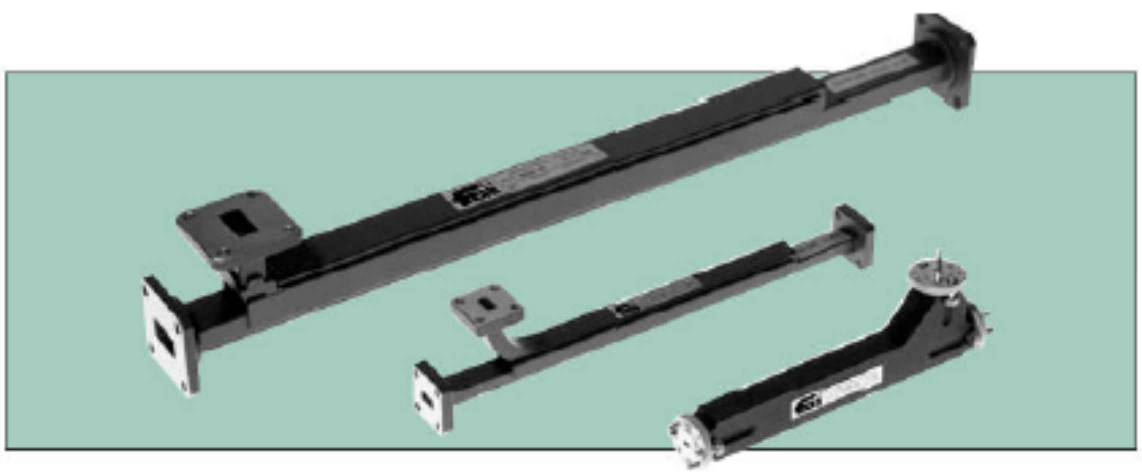
# Líneas de Transmisión

- Pérdidas de Retorno: Relación entre la potencia incidente en la carga y la potencia reflejada por la misma. (Se expresan en dB)

$$L_{ret} = \frac{P_{in}}{P_{ref}} = \frac{1}{\left|\Gamma_L\right|^2}$$

# Líneas de Transmisión

- Para separar onda incidente y onda reflejada se recurre a los acopladores direccionales.



# Material Adicional

- Algunos video tutoriales sobre líneas de transmisión:
  - https://youtu.be/sVBFdYgBre4?si=J25TU7EKSBJSaimQ
  - https://youtu.be/xBEYP2Jl-wI?si=gGHfOrLP5e0sO2ye

- Video tutorial para visualizar ondas estacionarias, en lugar de ondas electromagnéticas, en este caso ondas de presión, con el tubo de Rubens:
  - https://youtu.be/j-KFAaYTa98?si=0Wh8Bu6MW4qUK5Kr