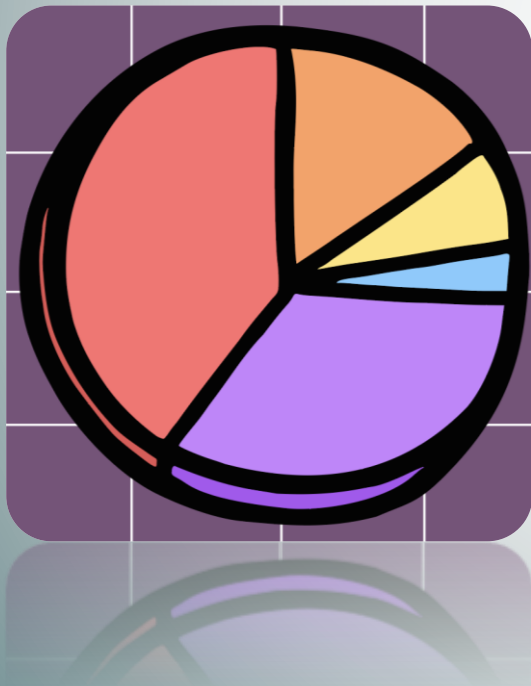


Estadística I

TEMA 1. DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS UNIDIMENSIONAL



Marta Guijarro Garvi

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

Este material se publica bajo licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



Tema 1: Distribución de frecuencias unidimensional

Índice de contenidos

- Principales conceptos: población y variable.
- Tipos de frecuencias: ordinarias y acumuladas (absolutas y relativas).
- Distribución de frecuencias unidimensional. Transformaciones lineales. Representaciones gráficas.
- Medidas de posición: media aritmética, moda, mediana y cuantiles.
- Medidas de dispersión: varianza, desviación típica y coeficiente de variación.
- Medidas de concentración: curva de Lorenz e índice de Gini.

Tema 1: Distribución de frecuencias unidimensional

Resultados de aprendizaje

- Saber identificar la población y la variable.
- Conocer los distintos tipos de frecuencias, así como las semejanzas, diferencias y relaciones entre ellas.
- Saber obtener la distribución de frecuencias a partir de su representación gráfica.
- Entender el concepto y saber calcular cada una de las medidas de posición
- Entender el concepto y saber calcular cada una de las medidas de dispersión.
- Saber analizar el grado de concentración de una distribución.

Principales conceptos: población y variable

Una **población** es un conjunto de unidades; su **tamaño**, N , es el número de unidades.

Una **variable**, X , es una característica numérica de las unidades de la población.

Al observar una variable en las unidades de la población se obtienen **datos** u **observaciones**. El conjunto de datos es una **estadística primaria**. Las observaciones *distintas* de una variable son sus **valores** y se denotan por $x_1, \dots, x_h$ ($x_1 < \dots < x_h$), siendo el valor genérico x_i .

Cuando el número de observaciones distintas es excesivamente grande, es conveniente utilizar *intervalos* de valores, en lugar de valores. El intervalo genérico es $L_{i-1} - L_i$ y su *amplitud* es $c_i = L_i - L_{i-1}$.

Ejemplo 1.1 El conjunto de hogares de un barrio constituye una población, cada hogar es una unidad de la población y el número de personas que viven en cada hogar es una variable.

Como la población está constituida por 500 hogares, la estadística primaria consta de 500 datos. Además, como 1, 2, 3, 4, 5 y 8 son las observaciones distintas, estas observaciones son los valores de la variable.

Tipos de frecuencias: frecuencias ordinarias absolutas y relativas

Se considera una población y se observa una variable X , obteniéndose una estadística primaria. Se consideran las observaciones distintas.

Se definen los distintos tipos de frecuencias según se refieran a valores o a intervalos.

La frecuencia absoluta n_i

- del valor x_i es el número de observaciones iguales a dicho valor.
- del intervalo $L_{i-1} - L_i$ es el número de observaciones que pertenecen al intervalo.

Se cumple: $\sum_{i=1}^h n_i = N$

La frecuencia relativa f_i

- del valor x_i es la proporción de observaciones iguales a dicho valor.
- del intervalo $L_{i-1} - L_i$ es la proporción de observaciones que pertenecen al intervalo.

Se cumple: $f_i = n_i / N$ $\sum_{i=1}^h f_i = 1$

Tema 1. Distribución de frecuencias unidimensional

Tipos de frecuencias: frecuencias acumuladas absolutas y relativas

La **frecuencia absoluta acumulada** N_i

- del valor x_i es el número de observaciones menores o iguales a dicho valor.
- del intervalo $L_{i-1} - L_i$ es el número de observaciones menores o iguales que el extremo superior del intervalo.

Se cumple: $N_i = n_1 + \dots + n_i = N_{i-1} + N_i$

La **frecuencia relativa acumulada** F_i

- del valor x_i es la proporción de observaciones menores o iguales a dicho valor.
- del intervalo $L_{i-1} - L_i$ es la proporción de observaciones menores o iguales que el extremo superior del intervalo.

Se cumple: $F_i = N_i / N$ $F_i = f_1 + \dots + f_i = F_{i-1} + F_i$

Distribución de frecuencias unidimensional: distribuciones no agrupadas y agrupadas

La **distribución de frecuencias** de la variable X es el conjunto de sus valores y sus respectivas frecuencias¹. Se denota por $(x_i; n_i)$ o por $(x_i; f_i)$, según el tipo de frecuencia utilizado.

En el caso de intervalos, la distribución de frecuencias se denota por $(L_{i-1} - L_i; n_i)$ o bien por $(L_{i-1} - L_i; f_i)$.

Las distribuciones referidas a intervalos reciben el nombre de *distribuciones agrupadas en intervalos*.

Valores	Intervalos	Frecuencias ordinarias		Frecuencias acumuladas	
		Absoluta	Relativa	Absoluta	Relativa
x_1	$L_0 - L_1$	n_1	$f_1 = n_1 / N$	$N_1 = n_1$	$F_1 = f_1$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_h	$L_{h-1} - L_h$	n_h	$f_h = n_h / N$	$N_h = n_1 + \dots + n_h = N$	$F_h = f_1 + \dots + f_h = 1$

La tabla recoge las notaciones de los conceptos asociados a una distribución de frecuencias, así como las relaciones entre las distintas frecuencias.

¹Cuando todas las frecuencias absolutas son iguales a la unidad, la distribución de frecuencias es *unitaria*.

Distribución de frecuencias unidimensional: transformaciones lineales

Una **distribución de frecuencias transformada linealmente** es la que se obtiene al multiplicar todos los valores de la distribución de frecuencias por una constante a y sumar una constante b al resultado (a y b número reales).

De la distribución de frecuencias $(x_i; n_i)$ o bien $(x_i; f_i)$ de la variable X se obtiene la distribución de frecuencias transformada linealmente $(a \cdot x_i + b; n_i)$ o bien $(a \cdot x_i + b; f_i)$ de la variable transformada $Y = a \cdot X + b$.

Distribución de frecuencias unidimensional: representaciones gráficas

El **diagrama de barras** representa distribuciones de frecuencias no agrupadas en intervalos: la longitud de cada barra, situada sobre el valor de la variable, coincide con su frecuencia absoluta o relativa.

En distribuciones agrupadas en intervalos se utiliza el **histograma de frecuencias**²: el área del rectángulo sobre cada intervalo es igual a su frecuencia. La altura del rectángulo se denomina **densidad de frecuencia** del intervalo, que se calcula como $d_i = n_i / c_i$ o bien como $d_i = f_i / c_i$.

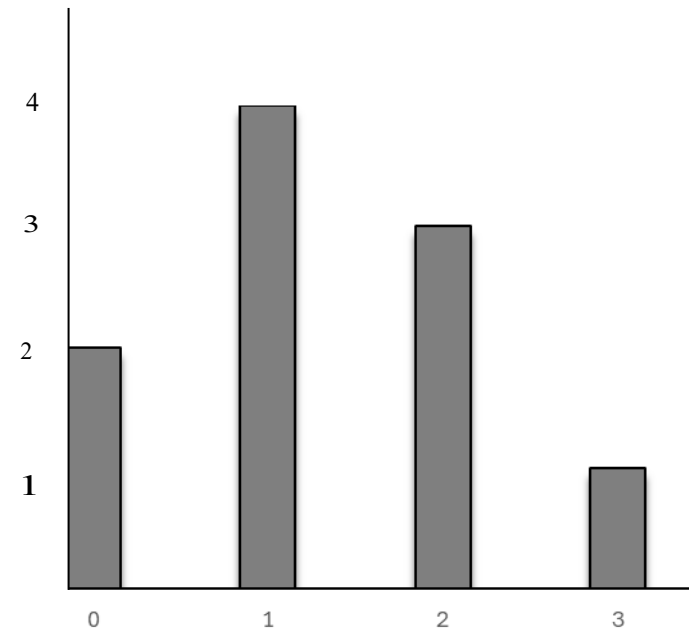
Los **polígonos de frecuencias** se construyen representando, sobre el extremo superior de cada intervalo, un punto cuya ordenada es la frecuencia acumulada y uniendo los puntos obtenidos.

²Cuando los intervalos tienen la misma amplitud, la altura del intervalo es igual a la correspondiente frecuencia (absoluta o relativa). En ese caso, los rectángulos del histograma de frecuencias tienen un área *proporcional* a la frecuencia.

Distribución de frecuencias unidimensional: representaciones gráficas

Ejemplo 1.2 Se observa la variable número de hermanos y hermanas en un grupo de 10 personas. La tabla recoge la distribución de frecuencias de la variable. La representación gráfica es el diagrama de frecuencias.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa acumulada
x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	2	0,2	2	0,2
1	4	0,4	6	0,6
2	3	0,3	9	0,9
3	1	0,1	10	1
	$N = 10$	1		

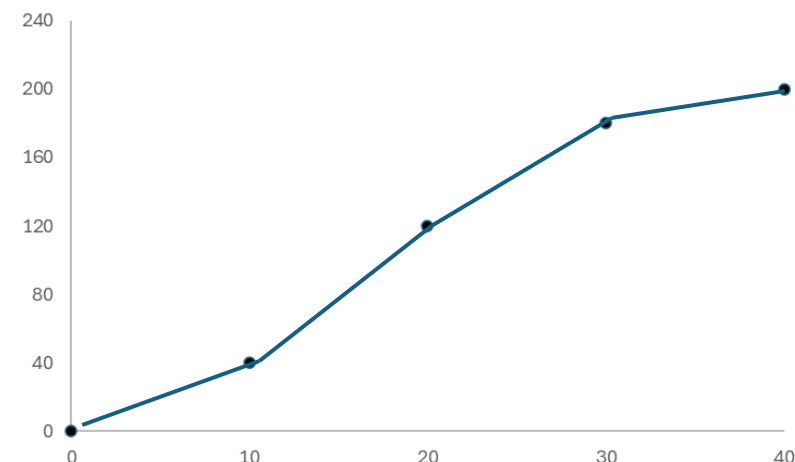
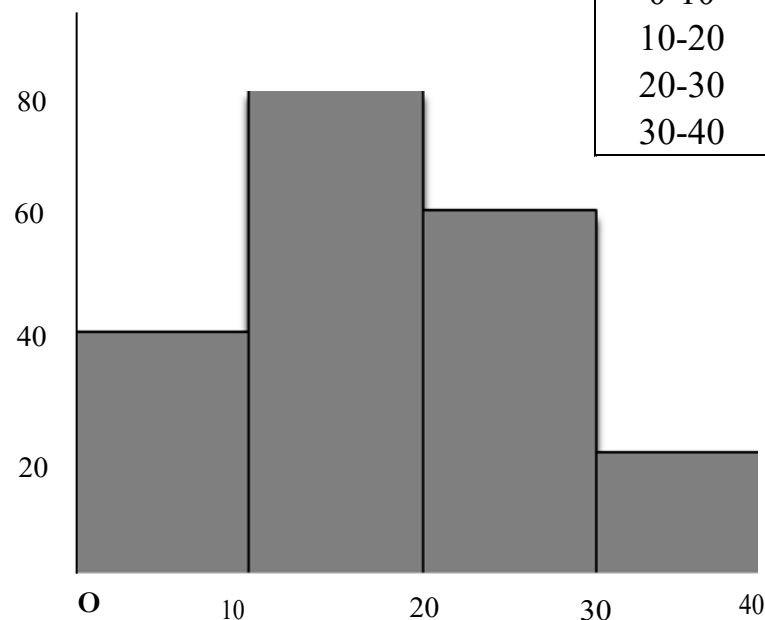


Así, por ejemplo, hay 4 personas con 1 hermana/o ($n_2 = 4$), el 30 % de las personas tiene 2 ($f_3 = 0,3$), 9 personas tienen a lo sumo 2 ($N_3 = 9$) y el 60 % de las personas tiene como máximo 1 ($F_2 = 0,6$).

Distribución de frecuencias unidimensional: representaciones gráficas

Ejemplo 1.3 Se considera el tiempo de espera en una consulta, en minutos, de 200 pacientes el pasado mes. La tabla muestra la distribución de frecuencias de esta variable. Las gráficas son el histograma de frecuencias y el polígono de frecuencias, respectivamente, calculados con frecuencias absolutas.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa acumulada
$L_{i-1} - L_i$	n_i	f_i	N_i	F_i
0-10	40	0,2	40	0,2
10-20	80	0,4	120	0,6
20-30	60	0,3	180	0,9
30-40	20	0,1	200	1
	$N = 200$	1		



Medidas de posición: media aritmética

La **media aritmética** de la distribución de frecuencias de una variable, o media de la variable, es la suma de todas las observaciones dividida por el número de ellas.

- Con frecuencias absolutas, la media aritmética se calcula como

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^h x_i \cdot n_i$$

- Con frecuencias relativas, la media aritmética se calcula como

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^h x_i \cdot f_i$$

En una distribución de frecuencias agrupada en intervalos, para calcular las expresiones anteriores se utiliza la *marca de clase* o punto medio del intervalo, $x_i = (L_{i-1} + L_i)/2$.

Dada la distribución de frecuencias $(x_i; n_i)$ o bien $(x_i; f_i)$ de la variable X , cuya media es $\bar{x}$, la media de la distribución de frecuencias transformada linealmente $(a \cdot x_i + b; n_i)$ o bien $(a \cdot x_i + b; f_i)$ es $a \cdot \bar{x} + b$.

Medidas de posición: mediana

La **mediana** de la distribución de frecuencias de una variable, o mediana de la variable, es la observación que ocupa la posición central, por lo que hay el mismo número (proporción) de observaciones mayores y menores que la mediana.

Distribuciones no agrupadas

- ❖ Con frecuencias *absolutas*, el procedimiento mecánico de cálculo de la mediana es:
 - Se toma como referencia $0,5 \cdot N$.
 - Se calculan las frecuencias absolutas acumuladas de la distribución.
 - Si existe un valor N_i que es igual a $0,5 \cdot N$, entonces la mediana es $Me = (x_i + x_{i+1})/2$.
 - Si no existe tal valor, entonces la mediana es $Me = x_i$ donde x_i es el mínimo valor de X tal que $N_i > 0,5 \cdot N$.

- ❖ Con frecuencias *relativas*, el procedimiento mecánico de cálculo de la mediana es:
 - Se toma como referencia $0,5$.
 - Se calculan las frecuencias relativas acumuladas de la distribución.
 - Si existe un valor F_i que es igual a $0,5$, entonces la mediana es $Me = (x_i + x_{i+1})/2$.
 - Si no existe tal valor, la mediana es $Me = x_i$ donde x_i es el mínimo valor de X tal que $F_i > 0,5$.

Medidas de posición: mediana

Distribuciones agrupadas en intervalos

Se calcula el **intervalo mediano**, $L_{i-1} - L_i$, utilizando el procedimiento descrito para el cálculo de la mediana en distribuciones no agrupadas en los casos de frecuencias absolutas y relativas. Este intervalo contiene a la mediana.

- Con frecuencias *absolutas*, la mediana se calcula como:

$$Me = L_{i-1} + \frac{0,5 \cdot N - N_{i-1}}{n_i} \cdot c_i$$

- Con frecuencias *relativas*, la mediana se calcula como:

$$Me = L_{i-1} + \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i} \cdot c_i$$

Medidas de posición: moda

La **moda** de la distribución de frecuencias de una variable, o moda de una variable, es la observación que más veces se repite

Distribuciones no agrupadas

En distribuciones no agrupadas, la moda es el valor de la variable con mayor frecuencia (absoluta o relativa).

Medidas de posición: moda

Distribuciones agrupadas en intervalos

Se calcula el **intervalo modal**, $L_{i-1} - L_i$, esto es, el intervalo con mayor densidad de frecuencia, d_i . Este intervalo contiene a la moda.

La expresión de la moda es

$$Mo = L_{i-1} + \frac{d_{i+1}}{d_{i-1} + d_{i+1}} \cdot c_i$$

Con frecuencias absolutas $d_{i-1} = n_{i-1}/c_{i-1}$ y $d_{i+1} = n_{i+1}/c_{i+1}$, mientras que, con frecuencias relativas, se tiene que $d_{i-1} = f_{i-1}/c_{i-1}$ y $d_{i+1} = f_{i+1}/c_{i+1}$.

Cuando los intervalos son de igual amplitud, c , el intervalo modal es el intervalo con mayor frecuencia y la moda, con frecuencias absolutas y relativas, se calcula, respectivamente, como:

$$Mo = L_{i-1} + \frac{n_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}} \cdot c$$

$$Mo = L_{i-1} + \frac{f_{i+1}}{f_{i-1} + f_{i+1}} \cdot c$$

Medidas de posición: cuantiles

El **cuantil de orden q** , x_q , es un número tal que una proporción q de las observaciones es menor o igual que él.

En particular, los tres *cuartiles* dividen la estadística primaria en cuatro partes iguales, los nueve *deciles* en diez y los 99 *percentiles* en cien.

Distribuciones no agrupadas

- ❖ Con frecuencias *absolutas*, el procedimiento mecánico de cálculo del cuantil de orden q es:
 - Se toma como referencia $q \cdot N$.
 - Se calculan las frecuencias absolutas acumuladas de la distribución.
 - Si existe un valor N_i que es igual a $q \cdot N$, entonces el cuantil de orden q es $x_q = (x_i + x_{i+1})/2$.
 - Si no existe tal valor, el cuantil es $x_q = x_i$ donde x_i es el mínimo valor tal que $N_i > q \cdot N$.

- ❖ Con frecuencias *relativas*, el procedimiento mecánico de cálculo del cuantil de orden q es:
 - Se toma como referencia q .
 - Se calculan las frecuencias relativas acumuladas de la distribución.
 - Si existe un valor F_i que es igual a q , entonces el cuantil de orden q es $x_q = (x_i + x_{i+1})/2$.
 - Si no existe tal valor, el cuantil es $x_q = x_i$ donde x_i es el mínimo valor tal que $F_i > q$.

Medidas de posición: cuantiles

Distribuciones agrupadas en intervalos

Se calcula el **intervalo cuantílico**, $L_{i-1} - L_i$, utilizando el procedimiento descrito para el cálculo del cuantil de orden q en distribuciones no agrupadas en los casos de frecuencias absolutas y relativas. Este intervalo contiene al cuantil de orden q .

- Con frecuencias *absolutas*, el cuantil de orden q se calcula como:

$$x_q = L_{i-1} + \frac{q \cdot N - N_{i-1}}{n_i} \cdot c_i$$

- Con frecuencias *relativas*, el cuantil de orden q se calcula como:

$$x_q = L_{i-1} + \frac{q - F_{i-1}}{f_i} \cdot c_i$$

Medidas de posición

Ejemplo 1.4 Un servicio municipal de mantenimiento dispone de cien equipos de climatización instalados en edificios públicos. La siguiente tabla muestra el tiempo de funcionamiento, en horas, de los equipos durante el pasado mes de agosto.

Tiempo de funcionamiento	Nº equipos
100	20
120	10
160	60
230	5
250	5

El tiempo medio de funcionamiento por equipo es

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^h x_i \cdot n_i = \frac{100 \cdot 20 + 120 \cdot 10 + 160 \cdot 60 + 230 \cdot 5 + 250 \cdot 5}{100} = 152$$

El tiempo de funcionamiento más frecuente es $Mo = 160$, ya que es el valor con mayor frecuencia.

Como 20, 30, 90, 95 y 100 son las frecuencias absolutas acumuladas de los valores de la variable y, además, $0,5 \cdot N = 50$, entonces, $Me = 160$, número mínimo de horas de funcionamiento del 50 % de los equipos con mayor tiempo de funcionamiento.

Medidas de posición

Ejemplo 1.5 La distribución del salario mensual, en miles de euros, de las personas que trabajan en una empresa de atención al cliente es:

Retribución	Nº personas
0,6-0,9	30
0,9-1,2	60
1,2-1,5	5
1,5-1,8	3
1,8-2,1	2

La retribución media mensual por persona trabajadora, en miles de euros, es

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^h x_i \cdot n_i = \frac{0,75 \cdot 30 + 1,05 \cdot 60 + 1,35 \cdot 5 + 1,65 \cdot 3 + 1,95 \cdot 2}{100} = 1,011$$

donde 0,75, 1,05, 1,35, 1,65 y 1,95 son las marcas de clase.

El intervalo modal es 0,9-1,2, intervalo con mayor frecuencia (igual amplitud). Así, la retribución más frecuente, en miles de euros, es

$$Mo = L_{i-1} + \frac{n_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}} \cdot c = 0,9 + \frac{5}{5 + 30} \cdot 0,3 = 0,943$$

Como 30, 90, 95, 98 y 100 son las frecuencias absolutas acumuladas y $0,5 \cdot N = 50$, entonces, el intervalo mediano es 0,9-1,2, primer intervalo cuya frecuencia absoluta acumulada es estrictamente mayor que 50. Así, la mínima retribución, en miles de euros, de la mitad de las personas trabajadoras que más cobran es:

$$Me = L_{i-1} + \frac{0,5 \cdot N - N_{i-1}}{n_i} \cdot c_i = 0,9 + \frac{50 - 30}{60} \cdot 0,3 = 1$$

Medidas de dispersión: varianza, desviación típica y coeficiente de variación

La **varianza** de la distribución de frecuencias de una variable, o varianza de la variable, es la suma de los cuadrados de las diferencias entre cada observación y la media, dividida por el número de observaciones.

La **desviación típica** de la distribución de frecuencias de una variable, o desviación típica de la variable, es la raíz cuadrada de la varianza.

El **coeficiente de variación** es el cociente entre la desviación típica y la media de la distribución.

Las medidas de dispersión analizan la representatividad de las medidas de posición y, por tanto, el grado de heterogeneidad de la distribución de frecuencias. La varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación son medidas de dispersión que evalúan la representatividad de la media aritmética.

La varianza y la desviación típica son medidas de dispersión absolutas, mientras que el coeficiente de variación es una medida de dispersión relativa.

Medidas de dispersión: varianza, desviación típica y coeficiente de variación

- Con frecuencias absolutas, la varianza y la desviación típica se calculan, respectivamente, como:

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^h (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i \quad \text{y} \quad S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^h (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}$$

- Con frecuencias relativas, la varianza y la desviación típica se calculan, respectivamente, como:

$$S^2 = \sum_{i=1}^h (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i \quad \text{y} \quad S = \sqrt{\sum_{i=1}^h (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}$$

Asimismo, la varianza y la desviación típica pueden hallarse, respectivamente, como

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^h x_i^2 \cdot n_i - \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^h x_i^2 \cdot f_i - \bar{x}^2 \quad S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^h x_i^2 \cdot n_i - \bar{x}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^h x_i^2 \cdot f_i - \bar{x}^2}$$

según las frecuencias sean absolutas o relativas.

En distribuciones agrupadas, todas las expresiones anteriores se calculan con las marcas de clase.

Medidas de dispersión: varianza, desviación típica y coeficiente de variación

- El coeficiente de variación responde a la expresión:

$$V_x = \frac{S}{\bar{x}}$$

Mide la dispersión de la distribución de frecuencias en relación con su media aritmética y suele expresarse en tanto por ciento.

Dada la distribución de frecuencias $(x_i; n_i)$ o bien $(x_i; f_i)$ de la variable X , con media $\bar{x}$ y varianza S^2 la varianza y la desviación típica de la distribución transformada linealmente $(a \cdot x_i + b; n_i)$ o $(a \cdot x_i + b; f_i)$ son, respectivamente, $a^2 \cdot S^2$ y $a \cdot S$. Asimismo, el coeficiente de variación de la distribución transformada es igual a $a \cdot S / (a \cdot \bar{x} + b)$.

Medidas de dispersión

Ejemplo 1.6 Se dispone de los beneficios medios y de las desviaciones típicas (ambas medidas en millones de euros) de los establecimientos de dos cadenas hoteleras, A y B, correspondientes al pasado año.

Cadena	Beneficio medio	Desviación típica
A	3	0,2
B	1	0,1

Para comprobar cuál de las dos cadenas tuvo una distribución de beneficios más homogénea, esto es, menor dispersión, se calculan los coeficientes de variación de ambas distribuciones:

$$V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{0,2}{3} = 0,067$$

$$V_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{0,1}{1} = 0,1$$

Como $V_A < V_B$, la distribución de beneficios más homogénea fue la de la cadena A.

Medidas de concentración: curva de Lorenz e índice de Gini

Las medidas de desigualdad o de concentración estudian el grado de equidad de la distribución de frecuencias de una variable.

La **curva de Lorenz** es la representación gráfica que, para cada valor, x_i , relaciona el porcentaje de observaciones menores o iguales que dicho valor, p_i , con el porcentaje que supone la suma de esas observaciones respecto de la suma total de observaciones, q_i .

Se cumple:

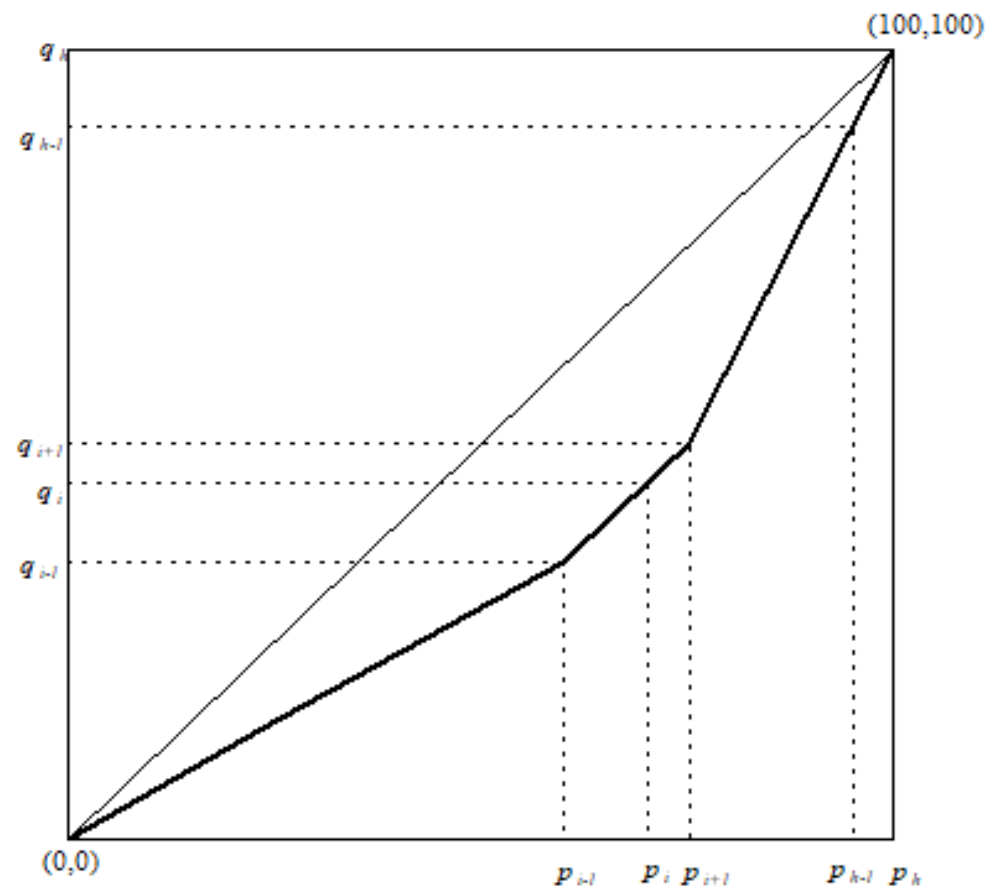
$$p_i = (N_i / N) \cdot 100 = F_i \cdot 100$$

$$\begin{aligned} q_i &= \left[(x_1 \cdot n_1 + \dots + x_i \cdot n_i) / (x_1 \cdot n_1 + \dots + x_h \cdot n_h) \right] \cdot 100 = \\ &= \left[(x_1 \cdot f_1 + \dots + x_i \cdot f_i) / (x_1 \cdot f_1 + \dots + x_h \cdot f_h) \right] \cdot 100 \end{aligned}$$

La curva de Lorenz es la poligonal formada por los pares de puntos (p_i, q_i) representados sobre un cuadrado de lado 100.

Medidas de concentración: curva de Lorenz e índice de Gini

Si la curva coincide con la diagonal del cuadrado, la concentración es mínima, lo que equivale a una situación de *máxima equidad* en la distribución. En cambio, cuando la curva se superpone a los lados del cuadrado, la concentración es máxima y, en consecuencia, hay *mínima equidad*.



Medidas de concentración: curva de Lorenz e índice de Gini

El **índice de Gini** es el cociente entre el área comprendida entre la diagonal y la curva de Lorenz (área de concentración) y el área del triángulo bajo la diagonal del cuadrado.

El cálculo geométrico de estas áreas permite obtener la expresión del índice de Gini:

$$I_G = 1 - \sum_{i=0}^{h-1} \frac{(q_{i+1} + q_i) \cdot (p_{i+1} - p_i)}{10000}$$

o bien,

$$I_G = 1 - \sum_{i=0}^{h-1} \frac{q_{i+1} + q_i}{100} \cdot f_{i+1}$$

El índice de Gini es la medida de la relación entre el área de concentración y el área del triángulo. Así, cuando el índice toma el valor cero, la curva coincide con la diagonal del cuadrado y, por tanto, la concentración es mínima; en cambio, cuando el índice es uno, la curva coincide con los lados del triángulo y la concentración es máxima.

Medidas de concentración: curva de Lorenz e índice de Gini

Ejemplo 1.7 La distribución del importe anual facturado por cliente en una empresa, en miles de euros, se presenta en la siguiente tabla:

Facturación	Nº clientes
0-20	10
20-30	30
30-50	40
50-150	20

Para medir el grado de concentración de la distribución, se construye la siguiente tabla que recoge las operaciones necesarias para el cálculo del índice de Gini.

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	N_i	$x_1 \cdot n_1 + \dots + x_i \cdot n_i$	q_i	p_i	f_i
10	10	100	10	100	2,25	10	0,10
25	30	750	40	850	19,10	40	0,30
40	40	1600	80	2450	55,06	80	0,40
100	20	2000	100	4450	100	100	0,20

En definitiva:

$$I_G = 1 - \frac{1}{100} \left[(2,25 + 0) \cdot 0,10 + (19,10 + 2,25) \cdot 0,30 + (55,06 + 19,10) \cdot 0,40 + (100 + 55,06) \cdot 0,20 \right] = 0,327.$$