

# Estadística I

## TEMA 4. NÚMEROS ÍNDICE Y TASAS DE VARIACIÓN



**Marta Guijarro Garvi**

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

Este material se publica bajo licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



## Tema 4: Números índice y tasas de variación

### Índice de contenidos

- Principales conceptos: números índice, índices simples y complejos, propiedades de los números índice.
- Enlaces y cambios de base.
- Deflación de series estadísticas.
- Variaciones absolutas y tasas de variación

## Tema 4: Números índice y tasas de variación

### Resultados de aprendizaje

- Comprender el concepto de número índice y conocer las diferencias entre índices fijos y en cadena, y entre índices simples y complejos.
- Saber realizar un cambio de base en una serie de índices.
- Saber realizar una deflación de una serie estadística.
- Comprender el concepto de variación absoluta y variación relativa.
- Saber hallar variaciones medias.

## Principales conceptos: números índice

Una **serie temporal**,  $y_1, \dots, y_T$ , es el conjunto de las observaciones de una variable  $Y$  en diferentes períodos de tiempo.

Un **número índice** es una medida estadística para analizar la evolución de una variable en el tiempo.

La observación que se desea comparar corresponde al **período actual** o **corriente**. La comparación se realiza en relación con una observación de un **período base** o **de referencia**.

Cuando todas las observaciones se comparan con un mismo período de referencia se obtienen **índices fijos**, mientras que cuando se comparan observaciones de períodos consecutivos, se obtienen **índices en cadena**.

## Principales conceptos: índices simples

Cuando se estudia la evolución de una magnitud simple, esto es, de una variable estadística unidimensional, se emplea un **índice simple**. El índice simple mide la variación de una variable  $Y$  entre los períodos base,  $y_0$  , y actual,  $y_t$  :

$$I_0^t = \frac{y_t}{y_0}$$

## Principales conceptos: índices simples

**Ejemplo 4.1** Se dispone de una serie de observaciones de una magnitud en el período 2022-2027

|       |      |      |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|------|------|
| Año   | 2022 | 2023 | 2024 | 2025 | 2026 | 2027 |
| Valor | 10   | 15   | 17   | 20   | 25   | 30   |

Para obtener la serie de índices fijos con base en el año 2022, se compara la observación de cada año,  $y_t$ , con la observación del año 2022,  $y_{22}$ :

$$I_{22}^t = \frac{y_t}{y_{22}}$$

En consecuencia, la serie de índices fijos es

|                                             |                                               |                                               |                                             |                                               |                                             |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $I_{22}^{22}$                               | $I_{22}^{23}$                                 | $I_{22}^{24}$                                 | $I_{22}^{25}$                               | $I_{22}^{26}$                                 | $I_{22}^{27}$                               |
| $\frac{y_{22}}{y_{22}} = \frac{10}{10} = 1$ | $\frac{y_{23}}{y_{22}} = \frac{15}{10} = 1,5$ | $\frac{y_{24}}{y_{22}} = \frac{17}{10} = 1,7$ | $\frac{y_{25}}{y_{22}} = \frac{20}{10} = 2$ | $\frac{y_{26}}{y_{22}} = \frac{25}{10} = 2,5$ | $\frac{y_{27}}{y_{22}} = \frac{30}{10} = 3$ |

## Principales conceptos: índices simples

**Ejemplo 4.1 (continuación)** Para obtener la serie de índices en cadena, se compara la observación de cada año con la del año anterior:

$$I_{t-1}^t = \frac{y_t}{y_{t-1}}$$

Así, la serie de índices en cadena es

| $I_{22}^{23}$                                 | $I_{23}^{24}$                                  | $I_{24}^{25}$                                  | $I_{25}^{26}$                                  | $I_{26}^{27}$                                 |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $\frac{y_{23}}{y_{22}} = \frac{10}{15} = 1,5$ | $\frac{y_{24}}{y_{23}} = \frac{17}{15} = 1,13$ | $\frac{y_{25}}{y_{24}} = \frac{20}{17} = 1,17$ | $\frac{y_{26}}{y_{25}} = \frac{25}{20} = 1,25$ | $\frac{y_{27}}{y_{26}} = \frac{30}{25} = 1,2$ |

## Principales conceptos: índices complejos

Un **índice complejo** es una medida estadística que analiza la variación de una magnitud compleja, esto es, de una variable  $N$ -dimensional. Según se considere o no que las componentes de la magnitud poseen igual importancia un índice complejo puede ser **no ponderado** o **ponderado**.

Los índices complejos admiten distintas formas funcionales. Entre ellos, están los basados en la *media aritmética*. Así, dada una variable  $N$ -dimensional  $Y$  con componentes,  $Y_1, \dots, Y_N$ , y el índice simple de la componente  $i$ -ésima,  $I_0^t(i) = y_{it} / y_{i0}$ , el índice complejo no ponderado basado en la media aritmética es

$$I_0^t = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N I_0^t(i)$$

y el índice complejo ponderado basado en la media aritmética ponderada es

$$I_0^t = \frac{\sum_{i=1}^N I_0^t(i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

donde  $w_i / \sum_{i=1}^N w_i$  es el peso del índice simple de la componente  $i$ .

## Principales conceptos: índices complejos

**Ejemplo 4.2** La siguiente tabla recoge el valor medio por entidad de cierta magnitud económica, en unidades monetarias, según tipo de comercio en los años 2026 y 2027 en una región. El número de entidades de cada tipo de comercio es 5, 46, 12, 4, 5 y 6, respectivamente.

| Tipo de comercio       | 2026  | 2027  | $I_{26}^{27}(i) = y_{i27} / y_{i26}$ |
|------------------------|-------|-------|--------------------------------------|
| Grandes superficies    | 50616 | 28612 | 0,565                                |
| Supermercados          | 45000 | 94280 | 2,095                                |
| Tiendas de electrónica | 1560  | 4120  | 2,641                                |
| Librerías              | 212   | 324   | 1,528                                |
| Joyerías               | 972   | 2562  | 2,636                                |
| Ferreterías            | 1000  | 1832  | 1,832                                |

La última columna de la tabla recoge la serie de índices simples para cada tipo de comercio.

La expresión de un índice ponderado de la evolución del valor medio de la magnitud entre los años 2026 y

$$2027 \text{ es } I_{26}^{27} = \sum_{i=1}^N I_{26}^{27}(i) \cdot w_i / \sum_{i=1}^N w_i.$$

Tomando como coeficiente de ponderación para cada tipo de comercio su número de unidades, el índice complejo ponderado es

$$I_{26}^{27} = \frac{0,565 \cdot 5 + 2,95 \cdot 46 + 2,64 \cdot 12 + 1,528 \cdot 4 + 2,636 \cdot 5 + 1,832 \cdot 6}{5 + 46 + 12 + 4 + 5 + 6} = 2,57$$

### Tema 4. Números índice y tasas de variación

# Principales conceptos: índices complejos

El índice de precios de Laspeyres es un índice complejo ponderado en el que la magnitud compleja es el precio de  $N$  bienes,  $P_1, \dots, P_N$ , y el coeficiente de ponderación es  $w_i = p_{i0} \cdot q_{i0}$ :

$$L_0^t = \frac{\sum_{i=1}^N p_{it} \cdot q_{i0}}{\sum_{i=1}^N p_{i0} \cdot q_{i0}}$$

El índice de precios de Paasche es un índice complejo ponderado para la misma magnitud compleja y donde el coeficiente de ponderación es  $w_i = p_{i0} \cdot q_{it}$  :

$$P_0^t = \frac{\sum_{i=1}^N p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^N p_{i0} \cdot q_{it}}$$

# Principales conceptos: índices complejos

Los índices de cantidades de Laspeyres y Paasche miden la evolución conjunta de las cantidades correspondientes a  $N$  bienes,  $Q_1, \dots, Q_N$ . Así, mediante el coeficiente de ponderación  $w_i = q_{i0} \cdot p_{i0}$  se obtiene el índice cantidades de Laspeyres:

$$L_0^t = \frac{\sum_{i=1}^N q_{it} \cdot p_{i0}}{\sum_{i=1}^N q_{i0} \cdot p_{i0}}$$

Y con la ponderación  $w_i = q_{i0} \cdot p_{it}$ , el índice de cantidades de Paasche:

$$P_0^t = \frac{\sum_{i=1}^N q_{it} \cdot p_{it}}{\sum_{i=1}^N q_{i0} \cdot p_{it}}$$

# Principales conceptos: propiedades de los números índice

Las propiedades *deseables*<sup>1</sup> de un número índice son:

- Existencia: un número índice debe ser una cantidad finita distinta de cero.
- Identidad:  $I_0^0 = 1$ .
- Inversión:  $I_t^0 = 1/I_0^t$ .
- Circularidad: para los periodos 0,  $t'$  y  $t$  se cumple:  $I_0^t = I_0^{t'} \cdot I_{t'}^t$ .
- Proporcionalidad: si  $y_{t'} = (1 + k)y_t$  ( $k$  es una constante de proporcionalidad), entonces,  $I_0^{t'} = (1 + k)I_0^t$ .
- Homogeneidad: el índice no está afectado por las unidades de medida.

<sup>1</sup>Mientras que los números índice simples cumplen estas propiedades, los números índice complejos no las cumplen, en general. Por ello, la elección de un número índice complejo depende del contexto y del objetivo del análisis.

## Tema 4. Números índice y tasas de variación

# Principales conceptos: propiedades de los números índice

**Ejemplo 4.3** El precio de un producto en 2027 es un 4 por ciento superior a su precio en 2026 y un 20 por ciento superior a su precio en 2020:

$$I_{26}^{27} = 1,04 \quad \text{y} \quad I_{20}^{27} = 1,20$$

Para hallar, por ejemplo, el precio relativo de este producto entre 2020 y 2026, esto es, el índice entre estos dos años, se aplica la propiedad circular:

$$I_{20}^{26} = I_{27}^{26} \cdot I_{20}^{27}$$

Además, por la propiedad inversión se tiene

$$I_{27}^{26} = \frac{1}{I_{26}^{27}}$$

En definitiva:

$$I_{20}^{26} = \frac{I_{20}^{27}}{I_{26}^{27}} = \frac{1,20}{1,04} = 1,15$$

## Enlace y cambio de base

El **cambio de base** es el procedimiento estadístico por el cual una serie de números índice se expresa tomando como referencia un período distinto al inicialmente considerado.

El cambio de base en una serie de números índice se obtiene aplicando la propiedad circular, si bien en el caso de los índices complejos el resultado tiene carácter aproximado.

Dados los períodos 0,  $t'$  y  $t$ , por la propiedad circular  $I_0^{t'}$  se cumple:

$$I_{t'}^t = \frac{I_0^t}{I_0^{t'}}$$

La expresión anterior permite cambiar la serie de índices con base 0 a una serie de índices con base  $t'$ .

En definitiva, para hallar una serie de índices con base en el año  $t'$ , se procede a *enlazar* ambas series de índices mediante el *enlace técnico*  $I_0^{t'}$ .

## Enlace y cambio de base

**Ejemplo 4.4** Los índices de precios del período 2022-2027 se presentan en la tabla siguiente:

| Año  | Índice (2022 = 100) | Índice (2025 = 100) |
|------|---------------------|---------------------|
| 2022 | 100                 |                     |
| 2023 | 112                 |                     |
| 2024 | 115                 |                     |
| 2025 | 122                 | 100                 |
| 2026 |                     | 110                 |
| 2027 |                     | 120                 |

Para hallar una serie de índices con base en el año 2025, se enlazan ambas series de índices mediante el enlace técnico:

$$I_{22}^{25} = 122$$

En consecuencia, la serie de índices con base en 2025 de la tabla se completa con los siguientes índices:

$$I_{25}^{22} = \frac{I_{22}^{22}}{I_{22}^{25}} = \frac{100}{122} = 0,82$$

$$I_{25}^{23} = \frac{I_{22}^{23}}{I_{22}^{25}} = \frac{112}{122} = 0,92$$

$$I_{25}^{24} = \frac{I_{22}^{24}}{I_{22}^{25}} = \frac{115}{122} = 0,94$$

## Deflación de series estadísticas

La **deflación** es el procedimiento estadístico mediante el cual el valor de una magnitud económica en distintos períodos se expresa con los precios de un mismo período. Para realizar esta transformación del **valor nominal**, expresado a los *precios corrientes* de cada período, en **valor real** a *precios constantes* del mismo periodo, se utiliza un número índice denominado **deflactor**. La deflación responde a la expresión:

$$\text{precios constantes año } t \text{ (base 0)} = \frac{\text{precios corrientes año } t}{I_0^t}$$

donde  $I_0^t$  es el deflactor.

# Deflación de series estadísticas

**Ejemplo 4.5** El precio de un bien, en euros, así como la correspondiente serie de índices de precios en el período 2023-2027, se recoge en la siguiente tabla:

|        |      |      |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|------|
| Año    | 2023 | 2024 | 2025 | 2026 | 2027 |
| Precio | 800  | 850  | 900  | 950  | 1000 |
| Índice | 100  | 110  | 112  | 115  | 120  |

La base de la serie de índices de precios es el año 2023 pues el índice de ese año es igual a 100. Utilizando esta serie como serie de deflatores, se transforman los precios corrientes de la tabla en precios constantes del año 2023, mediante la expresión:

$$\text{precios constantes año } t \text{ (base 2023)} = \frac{\text{precios corrientes año } t}{I_{23}^t}$$

En definitiva,

| Año  | Precio<br>(en términos reales base 2023) |
|------|------------------------------------------|
| 2023 | $800/1 = 800,00$                         |
| 2024 | $850/1,10 = 772,72$                      |
| 2025 | $900/1,12 = 803,60$                      |
| 2026 | $950/1,15 = 826,09$                      |
| 2027 | $1000/1,2 = 833,33$                      |

Obsérvese que los deflatores se expresan en tanto por uno.

## Variaciones absolutas

Dada una serie temporal, la **variación absoluta** de la variable entre dos períodos consecutivos,  $t - 1$  y  $t$ , es

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

La **variación absoluta media** de la variable entre los periodos inicial y final, 1 y  $T$ , es

$$vm = \frac{y_T - y_1}{T - 1}$$

La variación absoluta media es la media aritmética de las variaciones absolutas calculadas entre cada dos periodos consecutivos comprendidos entre los períodos inicial y final.

## Variaciones absolutas

**Ejemplo 4.6** La cantidad vendida de un bien, en miles de unidades, en el período 2023-2027 es

| Año      | 2023 | 2024 | 2025 | 2026 | 2027 |
|----------|------|------|------|------|------|
| Cantidad | 800  | 870  | 900  | 980  | 1000 |

Las variaciones absolutas de la cantidad vendida en el período considerado responden a la expresión:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

Resulta, entonces,

| Año  | Variación absoluta |
|------|--------------------|
| 2024 | $870 - 800 = 70$   |
| 2025 | $900 - 870 = 30$   |
| 2026 | $980 - 900 = 80$   |
| 2027 | $1000 - 980 = 20$  |

Además, la variación absoluta media es

$$vm = \frac{y_T - y_1}{T - 1} = \frac{1000 - 800}{5 - 1} = 50$$

## Variaciones relativas

Dada una serie temporal, la **tasa de variación** (**variación relativa** o **proporcional**) de la variable entre dos períodos consecutivos,  $t - 1$  y  $t$ , es

$$\dot{y}_t = \frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1$$

La tasa de variación es, por tanto, la variación absoluta *en relación con* la observación del período  $t - 1$ .

La **tasa media de variación** de la variable entre los periodos inicial y final, 1 y  $T$ , es

$$\text{tm} = \sqrt[T]{\frac{y_T}{y_1}} - 1$$

La tasa media de variación también puede calcularse a partir de las tasas de variación, siendo igual a la media geométrica de los *factores de variación unitarios*,  $1 + \dot{y}_2, \dots, 1 + \dot{y}_T$ , menos la unidad:

$$\text{tm} = \sqrt[T]{(1 + \dot{y}_2) \cdots (1 + \dot{y}_T)} - 1$$

## Variaciones relativas

**Ejemplo 4.7 (continuación del Ejemplo 4.6)** A partir de la información proporcionada por la tabla del ejemplo, se obtienen las variaciones relativas (tasas de variación), según la expresión:

$$\dot{y}_t = \frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1$$

Resulta, entonces,

| Año  | Tasa de variación              |
|------|--------------------------------|
| 2001 | $\frac{870}{800} - 1 = 0,087$  |
| 2002 | $\frac{900}{870} - 1 = 0,034$  |
| 2003 | $\frac{980}{900} - 1 = 0,089$  |
| 2004 | $\frac{1000}{980} - 1 = 0,020$ |

Además, la tasa media de variación es

$$tm = \sqrt[T-1]{\frac{y_T}{y_1}} - 1 = \sqrt[5-1]{\frac{1000}{800}} - 1 = 0,057$$

Esta tasa también puede calcularse a partir de las tasas de variación:

$$\begin{aligned} tm &= \sqrt[T]{(1 + \dot{y}_2) \cdots (1 + \dot{y}_T)} - 1 = \\ &= \sqrt[5]{(1 + 0,087) \cdot (1 + 0,034) \cdot (1 + 0,089) \cdot (1 + 0,02)} - 1 = 0,057 \end{aligned}$$