

Tema 6

BALANCES MICROSCÓPICOS

Balances microscópicos de cantidad de movimiento

Este material se publica bajo licencia: Creative Commons BY-NC-SA 4.0



Fluido newtoniano (I)

Un fluido newtoniano, de densidad constante ρ , y viscosidad dinámica μ circula en estado estacionario por una conducción cilíndrica vertical de radio R . Si $\frac{\Delta \mathcal{P}}{L}$ representa la caída de presión modificada, se pide:

- a) Obtener la expresión de la velocidad media $\overline{u_z}$
- b) Obtener la expresión del caudal volumétrico Q .

Fluido newtoniano (I)

El perfil de velocidad $u_z(r)$ para este caso concreto viene dado por:

$$u_z = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Si creamos una constante α tal que $\alpha = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \frac{R^2}{4\mu}$ entonces:

$$u_z = \alpha \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

El uso de la constante nos permite utilizar menos términos al agruparlos

Fluido newtoniano (I)

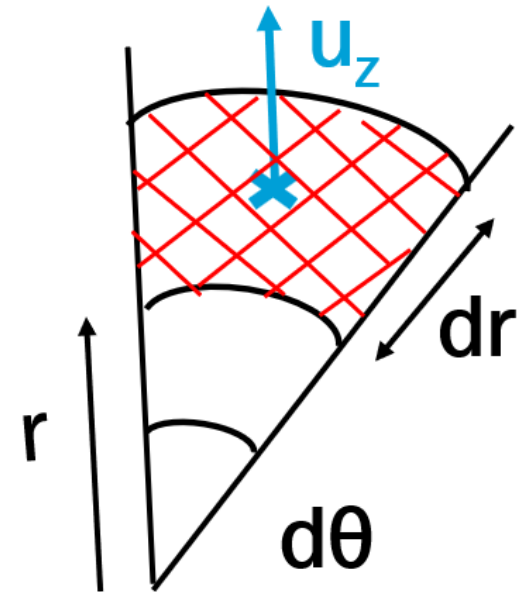
La velocidad promedio $\overline{u_z}$ se calcula como:

Recordamos que $u = \frac{Q}{A}$, en forma diferencial lo que hacemos es sumar los flujos volumétricos de cada elemento dA (cada elemento dA tendrá su velocidad)

$$\overline{u_z} = \frac{Q}{A} = \frac{\int u_z dA}{\int dA} = \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} u_z \cdot r dr d\theta}{\int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\theta}$$

$$2\pi \int_0^R r dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

Hay que recordar que el área diferencial dA es el producto del elemento diferencial rectangular que surge de multiplicar dr por el lado del arco que se calcula como $r d\theta$



Fluido newtoniano (I)

Operando:

$$\overline{u_z} = \frac{2\pi \int_0^R u_z \cdot r dr}{\pi R^2}$$


Al sustituir $u_z(r)$

$$\overline{u_z} = \frac{2\pi \int_0^R \alpha \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r dr}{\pi R^2}$$

Fluido newtoniano (I)

Si nos centramos en la integral:

$$\begin{aligned}\int_0^R \alpha \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r \, dr &= \alpha \int_0^R r - \frac{r^3}{R^2} \, dr = \alpha \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R = \\ &= \alpha \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} - 0 - 0 \right] = \alpha \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right] = \alpha \frac{R^2}{4}\end{aligned}$$

Fluido newtoniano (I)

$$\overline{u_z} = \frac{2\pi \int_0^R \alpha \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r \, dr}{\pi R^2}$$

$$\overline{u_z} = \frac{2\cancel{\pi} \alpha \frac{R^2}{4}}{\cancel{\pi} R^2} = \frac{\alpha}{2}$$

Finalmente

$$\overline{u_z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \frac{R^2}{4\mu} \right] = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \frac{R^2}{8\mu}$$

Fluido newtoniano (I)

Dado que

$$\overline{u_z} = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \frac{R^2}{8\mu}$$

y que

$$u_{z,max} = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \frac{R^2}{4\mu} = \alpha$$

entonces

$$\overline{u_z} = \frac{u_{z,max}}{2}$$

La velocidad promedio es la mitad de la máxima

Fluido newtoniano (I)

Dado que

$$Q = \overline{u_z} A$$

entonces:

$$Q = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \frac{R^2}{8\mu} \pi R^2 = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \pi \frac{R^4}{8\mu}$$

Reordenando:

$$\Delta \mathcal{P} = \frac{8\mu Q L}{\pi R^4}$$

Conocida como la ecuación de Hagen Poiseuille

Fluido newtoniano (II)

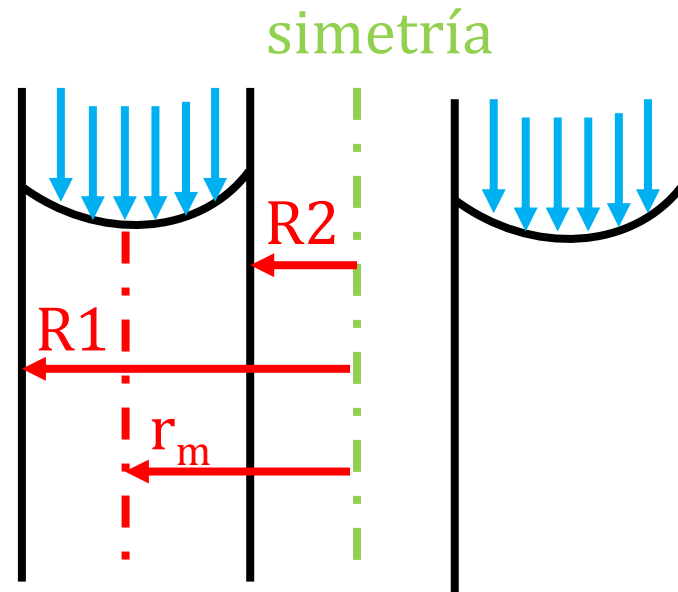
Un fluido newtoniano, de densidad constante ρ , y viscosidad dinámica μ , circula en estado estacionario por el interior del ánulo creado por dos conducciones cilíndricas horizontales, cuyos radios son R_1 (radio externo) y R_2 (radio interno). Se pide obtener la expresión que relaciona la velocidad en la dirección z (longitud de las conducciones cilíndricas) con el radio $u_z(r)$, utilizando r_m en función de R_1 y R_2 , donde r_m es el valor del radio $r = r_m$ en el que $\frac{\partial u_z}{\partial r} = 0$.

Fluido newtoniano (II)

R2 es el radio interno

R1 es el radio externo

r_m es el radio en que $\frac{\partial u_z}{\partial r}$ es nula



Fluido newtoniano (II)

En el caso del ánulo podemos asumir una geometría cilíndrica, por lo que el resultado es que únicamente la componente z tienen términos diferentes de cero:

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) =$$
$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Dado que $\rho = cte$; $u_z \neq 0$; $u_r = u_\theta = 0$ (por ser flujo axial puro) y $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ entonces:

Fluido newtoniano (II)

Dado que $\rho = cte$; $u_z \neq 0$; $u_r = u_\theta = 0$ y $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$
entonces:

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial t}} + \cancel{\frac{\partial u_z}{\partial r}} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}} + u_z \cancel{\frac{\partial u_z}{\partial z}} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}} \right] + \rho g_z$$

Fluido newtoniano (II)

Tras simplificar quedaría:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right) + \rho g_z$$

Ahora podemos agrupar los términos constantes tal que

$$\alpha = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \qquad -\alpha = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right)$$

Hay que reagrupar e integrar

$$-\alpha r \partial r = \partial \left(r \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

Fluido newtoniano (II)

$$-\alpha r \partial r = \partial \left(r \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

Al integrar aparece una constante C_1 luego al ser una integral indefinida, y no queremos un valor sino el perfil

$$-\alpha \frac{r^2}{2} + C_1 = r \left(\mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

En r_m se da la condición de que $\frac{\partial u_z}{\partial r} = 0$

Luego BC1: $r = r_m \rightarrow \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0$

Fluido newtoniano (II)

Al sustituir:

$$-\alpha \frac{r^2}{2} + C_1 = r \left(\mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$-\alpha \frac{r_m^2}{2} + C_1 = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{\alpha}{2} r_m^2$$

Por lo tanto:

$$-\alpha \frac{r^2}{2} + \frac{\alpha}{2} r_m^2 = r \left(\mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

Operando:

Fluido newtoniano (II)

Al operar:

$$-\alpha \frac{r^2}{2} + \frac{\alpha}{2} r_m^2 = r \left(\mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$-\frac{\alpha}{2} \left(r - \frac{r_m^2}{r} \right) = \left(\mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad -\frac{\alpha}{2\mu} \left(r - \frac{r_m^2}{r} \right) = \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$-\frac{\alpha}{2\mu} \left(r - \frac{r_m^2}{r} \right) \partial r = \partial u_z$$

Separo las diferenciales para integrar

Fluido newtoniano (II)

$$-\frac{\alpha}{2\mu} \left(r - \frac{r_m^2}{r} \right) \partial r = \partial u_z$$

Al integrar

$$u_z = -\frac{\alpha}{2\mu} \left(\frac{r^2}{2} - r_m^2 \ln r \right) + C_2$$

En este caso la condición que aplicamos es que en la pared no hay velocidad

$$\text{BC2 } r = R_1 \rightarrow u_z = 0 \text{ luego}$$

Fluido newtoniano (II)

$$u_z = -\frac{\alpha}{2\mu} \left(\frac{r^2}{2} - r_m^2 \ln r \right) + C_2$$

$$0 = -\frac{\alpha}{2\mu} \left(\frac{R_1^2}{2} - r_m^2 \ln R_1 \right) + C_2$$

$$C_2 = \frac{\alpha}{2\mu} \left(\frac{R_1^2}{2} - r_m^2 \ln R_1 \right)$$

Fluido newtoniano (II)

Sustituimos C_2 en la expresión integrada:

$$u_z = -\frac{\alpha}{2\mu} \left(\frac{r^2}{2} - r_m^2 \ln r \right) + \frac{\alpha}{2\mu} \left(\frac{R_1^2}{2} - r_m^2 \ln R_1 \right)$$

Y ahora reordenando:

$$u_z = \frac{\alpha}{2\mu} \left(\frac{R_1^2 - r^2}{2} - r_m^2 \ln R_1 + r_m^2 \ln r \right)$$

Fluido newtoniano (II)

Reordenando:

$$u_z = \frac{\alpha}{2\mu} \left(\frac{R_1^2 - r^2}{2} - r_m^2 \ln R_1 + r_m^2 \ln r \right)$$

$$u_z = \frac{\alpha}{2\mu} \left(\frac{R_1^2 - r^2}{2} + r_m^2 \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

Si ahora $\alpha = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z = -\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right)$ entonces

Fluido newtoniano (II)

Si ahora $\alpha = -\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right)$ entonces

$$u_z = \frac{\alpha}{2\mu} \left(\frac{R_1^2 - r^2}{2} + r_m^2 \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

$$u_z = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right)}{2\mu} \left(\frac{R_1^2 - r^2}{2} + r_m^2 \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

$$u_z = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right)}{2\mu} \left(\frac{R_1^2}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right) + r_m^2 \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

Fluido newtoniano (II)

Para obtener el valor de r_m necesitamos aplicar otra condición de contorno:

$$\text{BC3} \quad r = R_2 \rightarrow u_z = 0$$

Por lo que tenemos que sustituir esta condición en la expresión anterior:

$$0 = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right)}{2\mu} \left(\frac{R_1^2}{2} \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right) + r_m^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Fluido newtoniano (II)

$$0 = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right)}{2\mu} \left(\frac{R_1^2}{2} \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right) + r_m^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$\beta = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right)}{2\mu} \quad \text{Agrupamos}$$

$$0 = \beta \left(\frac{R_1^2}{2} \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right) + r_m^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$0 = \frac{\beta}{2} \left(R_1^2 \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right) + 2r_m^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Fluido newtoniano (II)

$$0 = \frac{\beta}{2} \left(R_1^2 \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right) + 2r_m^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$0 = R_1^2 - R_2^2 + 2r_m^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$-(R_1^2 - R_2^2) = 2r_m^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$-(R_1^2 - R_2^2) = r_m^2 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2$$

Fluido newtoniano (II)

$$-(R_1^2 - R_2^2) = r_m^2 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2$$

$$r_m^2 = \frac{-(R_1^2 - R_2^2)}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2}$$

$$r_m^2 = \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2}$$

Fluido newtoniano (II)

$$u_z = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right)}{2\mu} \left(\frac{R_1^2}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right) + r_m^2 \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

$$r_m^2 = \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2}$$

$$u_z = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right)}{2\mu} \left(\frac{R_1^2}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right) + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2} \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

Fluido newtoniano (II)

$$u_z = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right)}{2\mu} \left(\frac{R_1^2}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right) + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2} \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

$$u_z = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right) R_1^2}{2\mu} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right) + \frac{1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2}{2 \ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

Fluido newtoniano (II)

$$u_z = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right) R_1^2}{2\mu} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right) + \frac{1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2}{2 \ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

$$u_z = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right) R_1^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 + \frac{1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

Fluido newtoniano (II)

Comprobamos si $R_2=0 \rightarrow$ Hagen Pouseuille

$R_2=0$

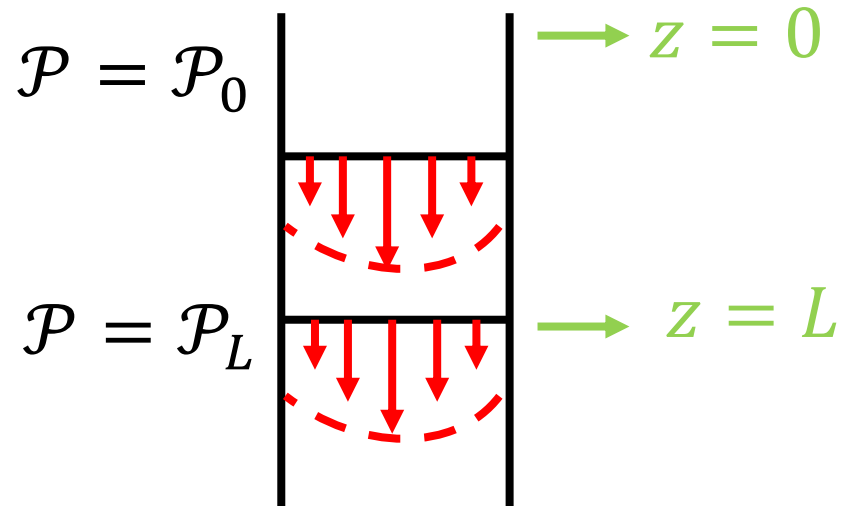
$$u_z = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right) R_1^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2 + \frac{1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_1} \right)$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right) = -\frac{\mathcal{P}_L - \mathcal{P}_0}{L} = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L} = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L}$$

$$u_z = \frac{-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right) R_1^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2 \right) = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \frac{R_1^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2 \right]$$

Fluido newtoniano (II)

Recordar que $\alpha = -\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z\right) = -\left(\frac{\mathcal{P}_L - \mathcal{P}_0}{L - 0} - \rho g_z\right) = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L}$



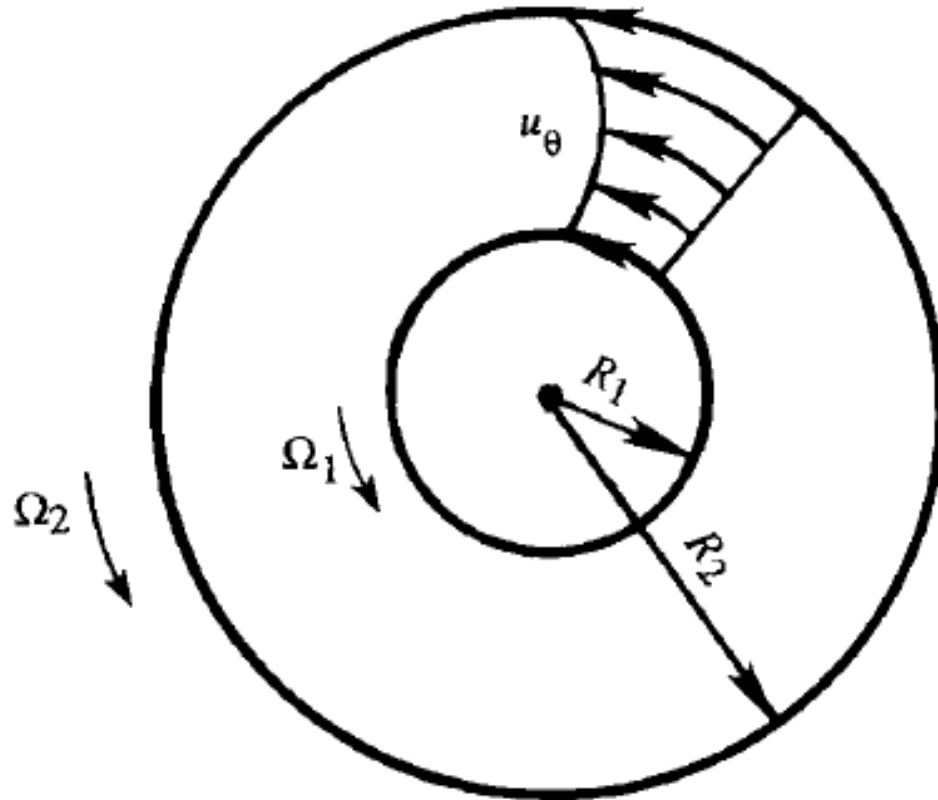
Para que $u_z > 0 \rightarrow \mathcal{P}_0 > \mathcal{P}_L$

Fluido newtoniano (III)

Un fluido newtoniano se encuentra en estado estacionario entre dos cilindros concéntricos giratorios. El cilindro interior tiene un radio R_1 (1 cm) y una velocidad angular Ω_1 (1 rad/s). El cilindro exterior tiene un radio R_2 (5 cm) y una velocidad angular Ω_2 (5 rad/s). Se pide:

- a) Obtener la expresión de la velocidad u_θ en función del radio r
- b) Representar el perfil de la velocidad u_θ en función del radio r en los siguientes 4 casos, usando los valores enunciados cuando sea posible:
 - 1) $\Omega_2, \Omega_1 > 1$ que es el caso general
 - 2) $\Omega_2 = 0, R_2 = \infty$ que es el caso de un cilindro rotando en un fluido infinito
 - 3) $\Omega_1 = 0, R_1 = 0$ que es el caso de flujo en el interior de un cilindro rotatorio
 - 4) $\Omega_1 < 0, \Omega_2 > 0, R_2, R_1 > 0$ que es el caso de flujo en el interior de un cilindro rotatorio

Fluido newtoniano (III)



Fluido newtoniano (III)

Ecuaciones diferenciales de distribución de densidad de flujo de cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) para un fluido newtoniano con densidad y viscosidad constante

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r \\ \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z\end{aligned}$$

Fluido newtoniano (III)

1

Plantear el balance de cantidad de movimiento para un elemento diferencial de volumen (*elegir la ecuación según geometría*)

2

Introducir la expresión de densidad de flujo de cantidad de movimiento (*sustituir la expresión de la densidad de flujo de cantidad de movimiento*)

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r \\ \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z\end{aligned}$$

GEOMETRÍA CILÍNDRICA

Fluido newtoniano (III)



Simplificar las diferenciales de distribución de densidad de flujo de cantidad de movimiento (*emplear la ECUACIÓN DE CONTINUIDAD*)

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Solo hay velocidad del fluido en la dirección θ (ya que la densidad es constante luego se trata de flujo incompresible)

$$u_r = 0 \quad u_\theta \neq 0 \quad u_z = 0$$

$$\nabla(\cdot u) = 0 \rightarrow \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$$

La velocidad es constante con el ángulo θ , es decir, no hay aceleración

Fluido newtoniano (III)



Simplificar las diferenciales de distribución de densidad de flujo de cantidad de movimiento (*emplear la ECUACIÓN DE CONTINUIDAD*)

Se obtendrían las siguientes expresiones:

$$\rho \left(-\frac{u_{\theta}}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$0 = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_{\theta})}{\partial r} \right) \right]$$

Fluido newtoniano (III)



Integración de ecuaciones diferenciales
(definir condiciones iniciales y condiciones límite)

Resolución de la ecuación junto con las condiciones límite:

$$\rho \left(-\frac{u_{\theta}^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

Distribución del perfil de presión con el radio r

$$0 = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_{\theta})}{\partial r} \right) \right]$$

Resolución de una ecuación diferencial de segundo orden
y condiciones límites para $r=R_1$ y $r=R_2$

CONDICIÓN LÍMITE 1

Velocidad angular
en el tubo interior (1)

$$r = R_1 \rightarrow u_{\theta,1} = R_1 \omega_1$$

CONDICIÓN LÍMITE 2

Velocidad angular
en el tubo exterior (2)

$$r = R_2 \rightarrow u_{\theta,2} = R_2 \omega_2$$

Fluido newtoniano (III)



Integración de ecuaciones diferenciales
(definir condiciones iniciales y condiciones límite)

Resolución de la ecuación junto con las condiciones límite:

$$0 = \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_{\theta})}{\partial r} \right) \right] \quad u_{\theta} = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

Resolución de una ecuación diferencial de segundo orden
y condiciones límites para $r=R_1$ y $r=R_2$

CONDICIÓN LÍMITE 1

Velocidad angular
en el tubo interior (1)

$$r = R_1 \rightarrow u_{\theta,1} = R_1 \omega_1$$

CONDICIÓN LÍMITE 2

Velocidad angular
en el tubo exterior (2)

$$r = R_2 \rightarrow u_{\theta,2} = R_2 \omega_2$$

Fluido newtoniano (III)

4

Integración de ecuaciones diferenciales
(definir condiciones iniciales y condiciones límite)

Resolución de las ecuaciones junto con las condiciones límite:

$$u_{\theta} = \frac{1}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \left[\left[\Omega_2 - \Omega_1 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \right] r + \frac{1}{r} \left[R_1^2 (\Omega_1 - \Omega_2) \right] \right]$$

Caso extremo $R_2 = \infty$; $\Omega_2 = 0$

Cilindro que rota en un fluido infinito

$$u_{\theta} = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r}$$

Caso extremo $R_1 = 0$; $\Omega_1 = 0$

Flujo dentro de un cilindro rotando $u_{\theta} = \Omega_2 r$

Fluido no newtoniano (I)

Cuando circula un fluido no newtoniano en régimen estacionario, tipo plástico de Bingham, en una dimensión z , por un tubo cilíndrico, se observa experimentalmente que la velocidad u_z sólo cambia con el radio desde $r = R$ a $r = 0$, siendo $u_z = u_0$ desde $r = r_0$ a $r = 0$. Se pide:

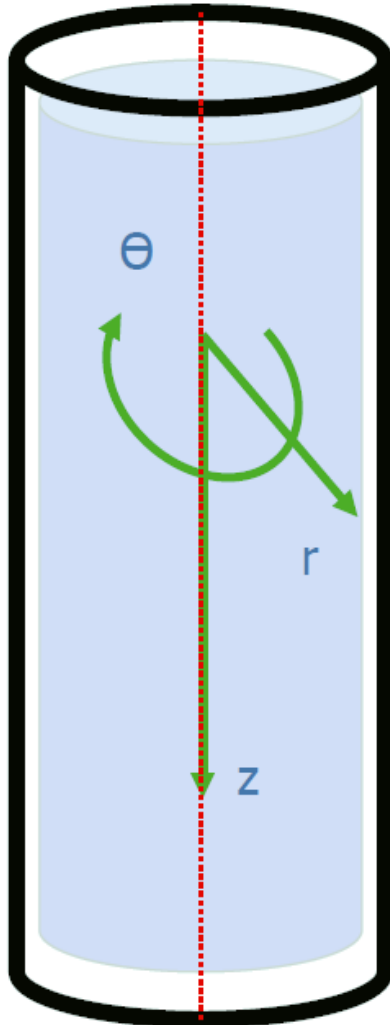
- a) Obtener la ecuación de continuidad al sistema.
- b) Obtener la expresión no integrada resultante del balance microscópico de cantidad de movimiento, de tal forma que se tenga la ecuación diferencial de distribución de densidad de flujo de cantidad de movimiento del sistema.
- c) Obtener la expresión de la velocidad en función del radio del tubo para régimen laminar, suponiendo que el esfuerzo cortante τ_{rz} viene dado por:

$$\tau_{rz} = \tau_0 - \mu \frac{du_z}{dr}$$

Donde τ_0 es la tensión de fluencia y μ es la viscosidad dinámica.

- d) Deducir en qué situación no se mueve el fluido tipo plástico de Bingham.
- e) Obtener el valor de $u_z = u_0$ que se mantiene constante desde $r = r_0$ a $r = 0$.

Fluido no newtoniano (I)



Se tiene un fluido no newtoniano que circula por el interior de una conducción cilíndrica

ρ y μ son constantes

Dados los valores experimentales una expresión genérica:

$$\tau_{rz} = \tau_0 - \left(\frac{\delta u_z}{\delta r} \right)^n$$

Fluido no newtoniano (I)

a) Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (\rho \cdot r \cdot v_r) + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta \theta} (\rho \cdot v_\theta) + \frac{\delta}{\delta z} (\rho \cdot v_z) = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta z} (\rho \cdot v_z) = 0$$

$$\rho \frac{\delta}{\delta z} (v_z) = 0$$

Si ρ es constante

$$\frac{\delta}{\delta z} (v_z) = 0$$

Fluido no newtoniano (I)

b) Para obtener la Ecuación de Movimiento en Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) usaremos la tercera de las ecuaciones, ya que el resto de términos nos llevan a $0=0$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) :^b

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{rz} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] + \rho g_r \\ \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + \rho g_\theta \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z\end{aligned}$$

^b Estas ecuaciones se han escrito sin hacer la suposición de que τ es simétrico. Esto significa, por ejemplo, que cuando se establece la suposición común de que el tensor de esfuerzo es simétrico, entonces $\tau_{r\theta} - \tau_{\theta r} = 0$.

Fluido no newtoniano (I)

b) Ecuación de movimiento

$$\rho \left(\cancel{\frac{\delta v_z}{\delta t}} + v_r \cancel{\frac{\delta v_z}{\delta r}} + \frac{v_\theta}{r} \cancel{\frac{\delta v_z}{\delta \theta}} + v_z \cancel{\frac{\delta v_z}{\delta z}} \right) = -\frac{\delta p}{\delta z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (r \tau_{rz}) + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta \theta} \tau_{\theta z}} + \cancel{\frac{\delta}{\delta z} \tau_{zz}} \right] + \rho g_z$$

Ec. cont

$$0 = -\frac{\delta p}{\delta z} + \rho g_z - \left[\frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (r \tau_{rz}) \right]$$

Fluido no newtoniano (I)

c) Para obtener el perfil de velocidades $u_z(r)$ debemos integrar a anterior expresión de tal forma que

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g z\right) = \alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz})$$


$$\alpha = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L}$$

Fluido no newtoniano (I)

Reagrupando para integrar

$$\alpha r = \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz})$$

$$\alpha r dr = \partial(r \tau_{rz})$$

No hay (-) porque no hemos sustituido la expresión de τ_{rz}

Integral indefinida porque no queremos un valor sino un perfil. Al integrar aparece una constante C1

$$\alpha \frac{r^2}{2} + C1 = r \tau_{rz} \quad r=0 ; \tau_{rz}=0$$

$$\text{BC1: } r=0 \rightarrow \tau_{rz}=0$$

Fluido no newtoniano (I)

Por lo tanto:

$$\frac{\alpha}{2}r = \tau_{rz} = \tau_0 - \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n \quad \text{operando:}$$

$$\frac{\alpha}{2}r - \tau_0 = -\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n$$

$$-\frac{\alpha}{2\mu}r + \frac{\tau_0}{\mu} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n \quad \text{Elevo los dos términos a } 1/4$$

Fluido no newtoniano (I)

$$-\frac{\alpha}{2\mu}r + \frac{\tau_0}{\mu} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^n$$

Elevo los dos términos a $1/4$

$$\left(-\frac{\alpha}{2\mu}r + \frac{\tau_0}{\mu}\right)^{1/4} = \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$\left(-\frac{\alpha}{2\mu}r + \frac{\tau_0}{\mu}\right)^{1/4} \partial r = \partial u_z \quad \text{Integral indefinida}$$

Fluido no newtoniano (I)

$$\left(-\frac{\alpha}{2\mu}r + \frac{\tau_0}{\mu}\right)^{1/4} \partial r = \partial u_z \quad \text{Integral indefinida}$$

$$u_z = \frac{\left(-\frac{\alpha}{2\mu}r + \frac{\tau_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{-\alpha}{2\mu}\left(\frac{1}{n} + 1\right)} + C1$$

En $r=R$ se da la condición que $u_z=0$

Luego BC2: $r=R \rightarrow u_z=0$

Fluido no newtoniano (I)

$$\left(-\frac{\alpha}{2\mu}r + \frac{\tau_0}{\mu}\right)^{1/4} \partial r = \partial u_z \quad \text{Integral indefinida}$$

$$0 = \frac{\left(-\frac{\alpha}{2\mu}R + \frac{\tau_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{-\alpha}{2\mu}\left(\frac{1}{n} + 1\right)} + C1$$

$$C1 = \frac{\left(-\frac{\alpha}{2\mu}R + \frac{\tau_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{\alpha}{2\mu}\left(\frac{1}{n} + 1\right)}$$

Cuidado con el signo 

Fluido no newtoniano (I)

Por lo tanto, el perfil de velocidad será:

$$u_z = \frac{\left(-\frac{\alpha}{2\mu}r + \frac{\tau_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{-\alpha}{2\mu}\left(\frac{1}{n} + 1\right)} + \frac{\left(-\frac{\alpha}{2\mu}R + \frac{\tau_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{\alpha}{2\mu}\left(\frac{1}{n} + 1\right)}$$

$$u_z = \frac{-2\mu}{\alpha\left(\frac{1}{n} + 1\right)} \left[\left(-\frac{\alpha}{2\mu}r + \frac{\tau_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1} - \left(-\frac{\alpha}{2\mu}R + \frac{\tau_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1} \right]$$

Fluido no newtoniano (I)

$$u_z = \frac{-2\mu}{\alpha \left(\frac{1}{n} + 1\right)} \left[\left(-\frac{\alpha}{2\mu} r + \frac{\tau_0}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}+1} - \left(-\frac{\alpha}{2\mu} R + \frac{\tau_0}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right]$$

La simplificación para obtener expresiones conocidas sería:

FN

$$n=1; \tau_0 = 0$$

F_nN (I)

$$n=1; \tau_0 \neq 0$$

F_nN (II)

$$n=n; \tau_0 = 0$$

Fluido no newtoniano (I)

Si comprobamos $n=1$ y $\tau_0 = 0$ entonces:

$$u_z = \frac{-2\mu}{2\alpha} \left[\left(-\frac{\alpha}{2\mu} r + \frac{\tau_0}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}+1} - \left(-\frac{\alpha}{2\mu} R + \frac{\tau_0}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right]$$

$$\begin{aligned} u_z &= -\frac{\mu}{\alpha} \left[\left(-\frac{\alpha}{2\mu} r \right)^2 - \left(-\frac{\alpha}{2\mu} R \right)^2 \right] = \\ &= -\frac{\mu}{\alpha} \left[\frac{\alpha^2}{4\mu^2} r^2 - \frac{\alpha^2}{4\mu^2} R^2 \right] = -\frac{\mu}{\alpha} \frac{\alpha^2}{4\mu^2} [r^2 - R^2] \end{aligned}$$

Fluido no newtoniano (I)

$$u_z = -\frac{\mu}{\alpha} \frac{\alpha^2}{4\mu^2} [r^2 - R^2] = -\frac{\alpha}{4\mu} \left[R^2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 1 \right] =$$

$$= \frac{\alpha}{4\mu} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Fluido no newtoniano (I)

Si comprobamos $n=n$ y $\tau_0 = 0$ entonces:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{-2\mu}{\alpha \left(\frac{1}{n} + 1\right)} \left[\left(-\frac{\alpha}{2\mu} r\right)^{\frac{1}{n}+1} - \left(-\frac{\alpha}{2\mu} R\right)^{\frac{1}{n}+1} \right] = \\ &= \frac{-2\mu}{\alpha \left(\frac{1}{n} + 1\right)} \left[\left(-\frac{\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1} \cdot r^{\frac{1}{n}+1} - \left(-\frac{\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1} \cdot R^{\frac{1}{n}+1} \right] \end{aligned}$$

Fluido no newtoniano (I)

$$u_z = \frac{-2\mu}{\alpha \left(\frac{1}{n} + 1\right)} \left[\left(-\frac{\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1} \cdot r^{\frac{1}{n}+1} - \left(-\frac{\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1} \cdot R^{\frac{1}{n}+1} \right]$$
$$= \frac{-2\mu}{\alpha \left(\frac{1}{n} + 1\right)} \left(-\frac{\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1} \left[R^{\frac{1}{n}+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}+1} - 1 \right] =$$

Fluido no newtoniano (I)

$$= \frac{-2\mu}{\alpha \left(\frac{1}{n} + 1\right)} \left(-\frac{\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{1}{n}+1} \left[R^{\frac{1}{n}+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}+1} - 1 \right] =$$

$$= \frac{\alpha^{1/n} R^{\frac{1}{n}+1}}{(2\mu)^{1/n} \left(\frac{1}{n} + 1\right)} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}+1} \right]$$

Fluido no newtoniano (I)

$$= \frac{\alpha^{1/n} R^{\frac{1}{n}+1}}{(2\mu)^{1/n} \left(\frac{1}{n} + 1\right)} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}+1} \right] =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{\alpha}{2\mu}\right)^{1/n} R^{\frac{1}{n}+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}+1} \right]$$

$$\text{Si } n=1 \quad \frac{1}{2} \frac{\alpha}{2\mu} R^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right)$$

Fluido no newtoniano (I)

Si comprobamos que $n=1$; $\tau_0 \neq 0$

$$u_z = \frac{-2\mu}{\alpha \left(\frac{1}{n} + 1\right)} \left[\left(-\frac{\alpha}{2\mu} r + \frac{\tau_0}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}+1} - \left(-\frac{\alpha}{2\mu} R + \frac{\tau_0}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] =$$
$$= -\frac{\mu}{\alpha} \left[\left(-\frac{\alpha}{2\mu} r + \frac{\tau_0}{\mu} \right)^2 - \left(-\frac{\alpha}{2\mu} R + \frac{\tau_0}{\mu} \right)^2 \right] =$$

Fluido no newtoniano (I)

$$= -\frac{\mu}{\alpha} \left[\frac{\alpha^2}{4\mu^2} r^2 + \frac{\tau_0^2}{\mu^2} + 2 \left(-\frac{\alpha}{2\mu} r \frac{\tau_0}{\mu} \right) - \left[\frac{\alpha^2}{4\mu^2} R^2 + \frac{\tau_0^2}{\mu^2} + 2 \left(-\frac{\alpha}{2\mu} R \frac{\tau_0}{\mu} \right) \right] \right] =$$

$$= -\frac{\mu}{\alpha} \left[\frac{\alpha^2}{4\mu^2} (r^2 - R^2) - \frac{\alpha\tau_0}{\mu^2} (r - R) \right]$$

Fluido no newtoniano (I)

$$= -\frac{\mu}{\alpha} \left[\frac{\alpha^2}{4\mu^2} (r^2 - R^2) - \frac{\alpha\tau_0}{\mu^2} (r - R) \right]$$

$$= \frac{\alpha R^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) - \frac{\tau_0 R}{\mu} \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$

Fluido no newtoniano (I)

$$u_z = \frac{\alpha R^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) - \frac{\tau_0 R}{\mu} \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$

$$\tau_{rz} = \tau_0 - \mu \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\alpha R^2}{4\mu} \left(-\frac{1}{R^2} 2r \right) - \frac{\tau_0 R}{\mu} \left(-\frac{1}{R} \right)$$

$$= -\frac{\alpha}{2\mu} r + \frac{\tau_0}{\mu}$$

Fluido no newtoniano (I)

$$\tau_{rz} = \tau_0 - \mu \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$\tau_{rz} = \tau_0 - \mu \left[-\frac{\alpha r}{2\mu} + \frac{\tau_0}{\mu} \right] =$$

$$= \tau_0 + \frac{\alpha r}{2} - \tau_0 = \frac{\alpha r}{2}$$

Este sería el perfil entre $r=R$ y $r=r_0$

Fluido no newtoniano (I)

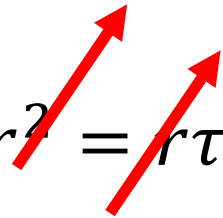
d) Al tratarse de un plástico de Bingham sabemos que para que fluya el fluido $\tau_{rz} > \tau_0$

Tal y como vimos con anterioridad

$$\alpha r \partial r = \partial(r\tau_{rz})$$

Fluido no newtoniano (I)

Al integrar

$$\frac{\alpha}{2} r^2 = r \tau_{rz}$$


$$\tau_{rz} \geq \tau_0 \rightarrow MOV$$

$$\tau_{rz} < \tau_0 \rightarrow NO MOV$$

$$\frac{\alpha}{2} r_0 = \tau_0 \rightarrow$$

$$r_0 = \frac{2\tau_0}{\alpha}$$

Fluido no newtoniano (I)

e) En tanto que ahora $r_0 = \frac{2\tau_0}{\alpha}$ al sustituir en

$$u_z = \frac{\alpha R^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) - \frac{\tau_0 R}{\mu} \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$

$$u_0 = \frac{\alpha R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{4\tau_0^2}{\alpha^2 R^2} \right) - \frac{\tau_0 R}{\mu} \left(1 - \frac{2\tau_0}{\alpha R} \right)$$

Fluido no newtoniano (I)

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\alpha R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{4\tau_0^2}{\alpha^2 R^2} \right) - \frac{\tau_0 R}{\mu} \left(1 - \frac{2\tau_0}{\alpha R} \right) \\ &= \frac{\alpha R^2}{4\mu} \left(\frac{\alpha^2 R^2 - 4\tau_0^2}{\alpha^2 R^2} \right) - \frac{\tau_0 R}{\mu} \left(\frac{\alpha R - 2\tau_0}{\alpha R} \right) \\ &= \frac{1}{4\mu\alpha} (\alpha^2 R^2 - 4\tau_0^2) - \frac{\tau_0}{\alpha\mu} (\alpha R - 2\tau_0) \end{aligned}$$

Fluido no newtoniano (I)

$$= \frac{1}{4\mu\alpha} (\alpha^2 R^2 - 4\tau_0^2) - \frac{\tau_0}{\alpha\mu} (\alpha R - 2\tau_0) =$$

$$= \frac{1}{\mu\alpha} \left(\frac{\alpha^2 R^2}{4} - \tau_0^2 \right) - \tau_0 \alpha R + 2\tau_0^2 =$$

$$= \frac{1}{\mu\alpha} \left(\frac{\alpha^2 R^2}{4} + \tau_0^2 - \tau_0 \alpha R \right) =$$

Fluido no newtoniano (I)

$$= \frac{1}{\mu\alpha} \left(\frac{\alpha^2 R^2}{4} + \tau_0^2 - \tau_0 \alpha R \right) =$$

$$a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\left(\frac{\alpha R}{2} \right) (-\tau_0) - \alpha R \tau_0$$

$$= \frac{1}{\mu\alpha} \left[\frac{\alpha R}{2} - \tau_0 \right]^2 = \frac{1}{\mu\alpha} \left[\left(\frac{\alpha R}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{2\tau_0}{\alpha R} \right)^2 \right]$$

Fluido no newtoniano (I)

$$= \frac{1}{\mu\alpha} \left[\frac{\alpha R}{2} - \tau_0 \right]^2 = \frac{1}{\mu\alpha} \left[\left(\frac{\alpha R}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{2\tau_0}{\alpha R} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{\mu\alpha} \frac{\alpha^2 R^2}{4} \left[1 - \frac{2\tau_0}{\alpha R} \right]^2 =$$

$$= \frac{\alpha R^2}{4\mu} \left[1 - \frac{2\tau_0}{\alpha R} \right]^2 = u_0$$

Fluido no newtoniano (I)

■ uz

■ τ_{rz}

$$r_0 = \frac{2\tau_0}{\alpha}$$

