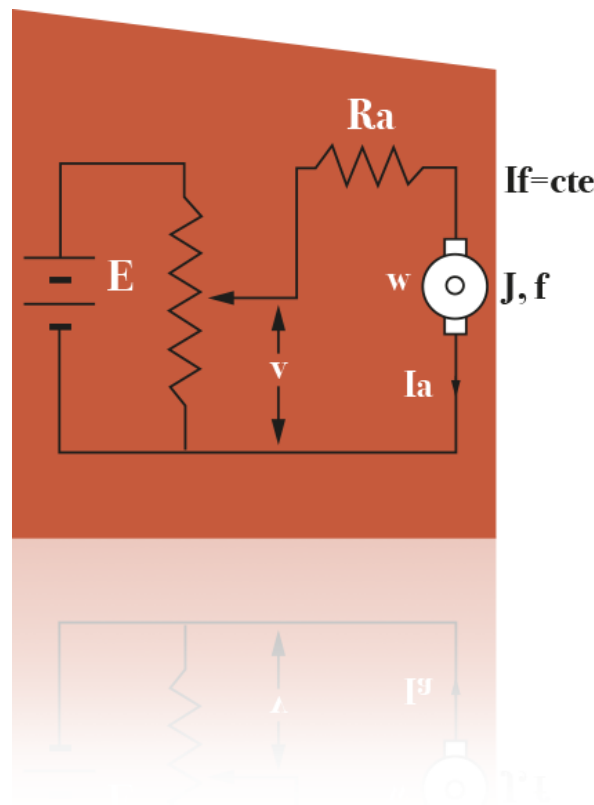


Automática II

1. Reguladores industriales



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Carlos Torre Ferrero

Elías Revestido Herrero

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

1

Reguladores Industriales

1.1. INTRODUCCIÓN

En el presente tema se analizan las acciones de control que clásicamente se emplean para la regulación de los sistemas de lazo cerrado.

El control de lazo cerrado básicamente consiste en comparar una determinada variable de salida, con un valor de entrada, y en función del valor obtenido, señal de error, actuar sobre el sistema para conseguir la respuesta deseada.

La obtención de dicha respuesta deseada se va a basar en la introducción de acciones de control por medio de reguladores. Estos reguladores, en función de la señal de error que les llega como entrada, generarán la acción de control que actuará sobre el sistema y que permitirá que la respuesta del sistema sea la buscada.

A continuación se presentan las acciones de control clásicas con sus características y efectos sobre los sistemas, así como la forma de los reguladores que las realizan, tanto la función de transferencia como el circuito electrónico correspondiente.

1.2. CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA REALIMENTACIÓN

1.2.1. Variación de parámetros

En lazo abierto:



$$Y(s) = G(s)R(s)$$

Si :

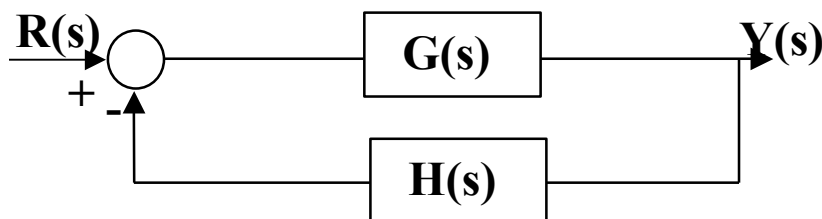
$$G(s) \rightarrow G(s) + \Delta G(s)$$

$$Y(s) = (G(s) + \Delta G(s))R(s)$$

$$\boxed{\Delta Y(s) = \Delta G(s)R(s)}$$

Un cambio en $G(s)$ provoca cambios proporcionales en la salida.

En lazo cerrado:



$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

Si : $G(s) \rightarrow G(s) + \Delta G(s)$

$$Y(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + (G(s) + \Delta G(s))H(s)} R(s)$$

Dividiendo arriba y abajo entre $(1 + G(s)H(s))$:

$$Y(s) = \frac{\frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + G(s)H(s)}}{1 + \frac{\Delta G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}} R(s)$$

Aproximando el denominador por $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$

$$Y(s) = \left[\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} + \frac{\Delta G(s)}{1+G(s)H(s)} \right] \left[1 - \frac{\Delta G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \right] R(s)$$

$$Y(s) = \left[\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} + \frac{\Delta G(s)}{1+G(s)H(s)} - \frac{G(s)\Delta G(s)H(s)}{(1+G(s)H(s))^2} \right] R(s)$$

Llamando $Y'(s)$ a la salida sin perturbar:

$$Y(s) = Y'(s) + \left[\frac{\Delta G(s)}{(1+G(s)H(s))^2} \right] R(s)$$

La modificación en la salida debida a $\Delta G(s)$:

$$\Delta Y(s) = \left[\frac{\Delta G(s)}{(1+G(s)H(s))^2} \right] R(s)$$

Si $|G(s)H(s)| \gg 1 \rightarrow \Delta Y$ es muy pequeña.

Las variaciones de los parámetros de las funciones de transferencia de lazo directo afectan muy poco a la respuesta del sistema.

Sensibilidad a cambios en $G(s)$:

$$S_G^M = \frac{\Delta M/M}{\Delta G/G}$$

$$S_G^M = \frac{\partial M/M}{\partial G/G} = \frac{\partial M}{\partial G} \frac{G}{M}$$

Como $M = \frac{G}{1+GH}$

$$S_G^M = \frac{1}{(1+GH)^2} \frac{G}{G/(1+GH)}$$

$$S_G^M = \frac{1}{1+GH}$$

Si $|GH| \gg 1$ sensibilidad muy pequeña.

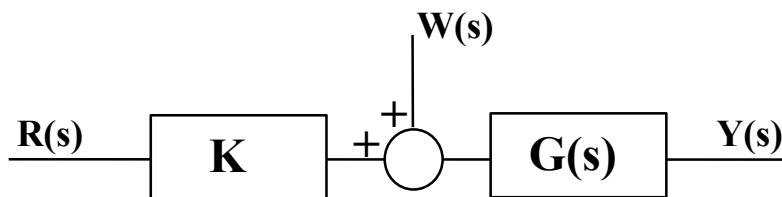
Sensibilidad a cambios en H(s):

$$S_H^M = \frac{\partial M}{\partial H} \frac{H}{M} = \frac{-GH}{1+GH}$$

Si $|GH| \gg 1$ sensibilidad igual a 1.

1.2.2. Perturbaciones

En lazo abierto:

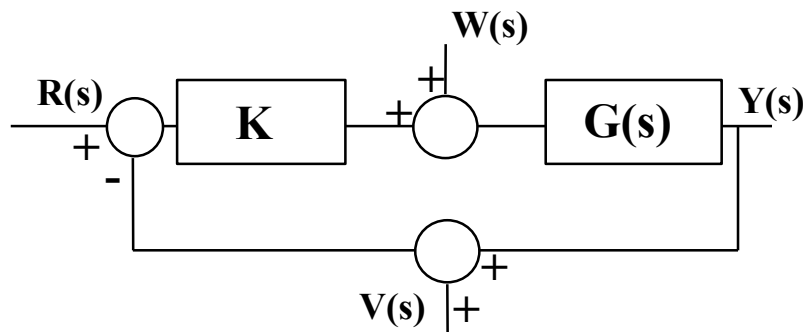


La salida debido a la entrada de perturbación será:

$$Y_w(s) = G(s)W(s)$$

No hay posibilidad de limitarla.

En lazo cerrado:



$$Y_w(s) = \frac{G(s)}{1+KG(s)} W(s)$$

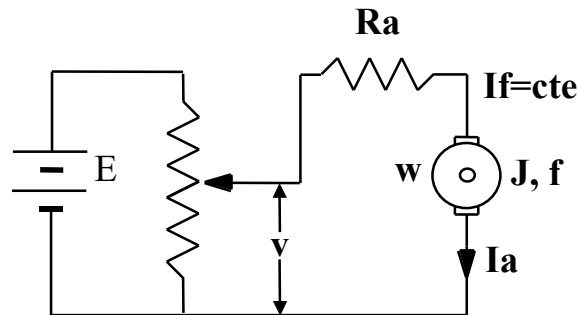
Posibilidad de limitar la influencia de W(s), incrementando el valor de K.

$$Y_v(s) = -\frac{KG(s)}{1+KG(s)} V(s)$$

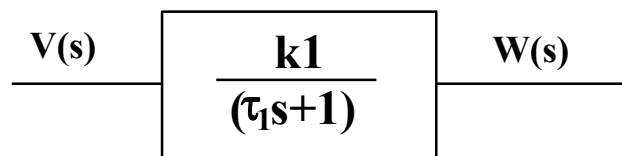
No hay posibilidad de limitar la influencia de V(s).

1.2.3. Respuesta transitoria

Control de velocidad con motor de cc:



En lazo abierto:



La respuesta ante un escalón: $V(s) = A/s$

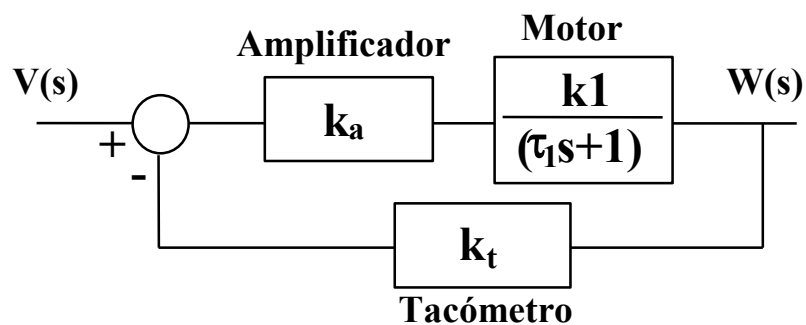
$$W(s) = \frac{AK_1}{(\tau_1 s + 1)s}$$

$$w(t) = AK_1(1 - e^{-t/\tau_1})$$

τ_1 viene fijado por el motor.

No es posible modificar el tiempo de respuesta del sistema si no se cambia el motor y/o la carga.

En lazo cerrado:



$$M(s) = \frac{K_a K_1}{\tau_1 s + 1 + K_a K_1 K_t} = \frac{K_a K_1 / \tau_1}{s + (1 + K_a K_1 K_t) / \tau_1}$$

La respuesta ante un escalón: $V(s) = A/s$

$$W(s) = \frac{AK}{(s + P)s}$$

$$w(t) = \frac{AK}{P} \left[1 - e^{-pt} \right]$$

Posibilidad de variar la respuesta del sistema sin cambiar el motor.

1.2.4. Error en estado estacionario

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

Si $|GH| \gg 1$ Error estacionario pequeño.

Posibilidad de seleccionar la ganancia del amplificador para obtener el error deseado.

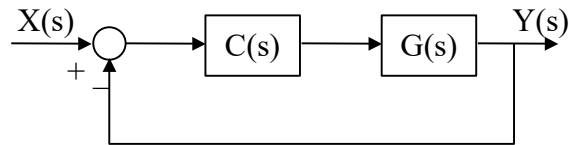
1.2.5. Resumen de las principales características de los sistemas en lazo cerrado

1. Disminución de la sensibilidad del sistema a la variación de los parámetros del lazo directo, $G(s)$.
2. Gran sensibilidad a la variación de los parámetros de la realimentación, $H(s)$.
3. Disminución de la influencia de las perturbaciones en el lazo directo en la salida.
4. Gran influencia de las perturbaciones en el lazo de realimentación en la salida (imposibilidad de disminución).
5. Posibilidad de ajuste de la respuesta transitoria mediante variación de parámetros externos al proceso.
6. Posibilidad de reducción y ajuste del error en estado estacionario.

1.3. ESQUEMAS DE COMPENSACIÓN

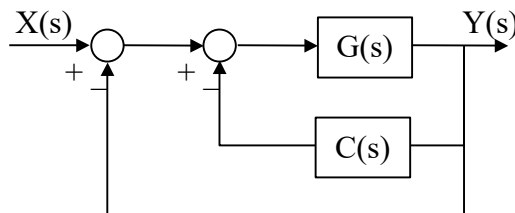
A continuación se muestran varios ejemplos de posibles esquemas de compensación a emplear. Los dos primeros casos emplean un único regulador mientras que el resto emplean dos o tres reguladores.

a) Compensación en cascada:



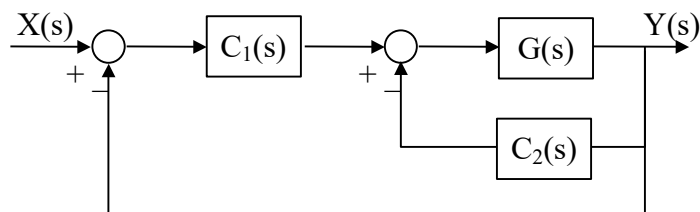
El controlador se sitúa en serie con el proceso a controlar. Mediante la inclusión del regulador se modifica la respuesta del sistema. Dicho regulador ha de calcularse para que el sistema en lazo cerrado presente el comportamiento deseado. Este esquema será el empleado en los próximos capítulos para el diseño de reguladores.

b) Compensación por realimentación:



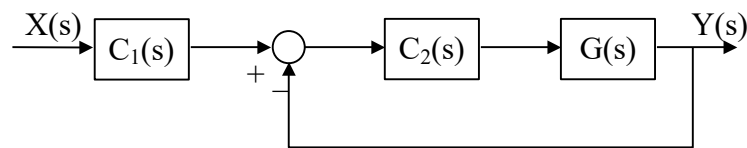
El controlador se sitúa en la realimentación de un lazo de control interno. De esta forma se puede ajustar el comportamiento del lazo interno.

c) Compensación cascada y realimentación:



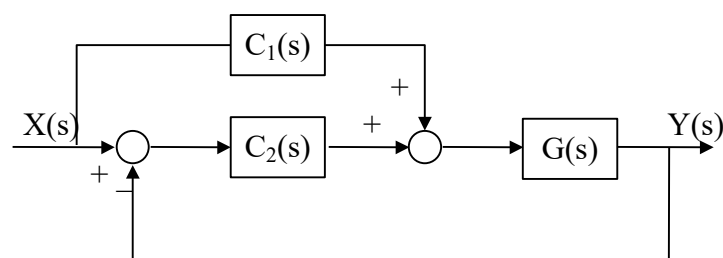
En este esquema se emplean dos reguladores de tal forma que agrupa a los dos esquemas anteriores. En este caso existirá un regulador en la realimentación interna para el control de dicho lazo y otro en cascada para el sistema completo.

d) Compensación serie y cascada:



Es un esquema con dos reguladores que combina un regulador en serie con otro en cascada. Una vez ajustado el regulador $C_2(s)$, con el regulador $C_1(s)$ se pueden añadir o cancelar elementos de la función de transferencia de lazo cerrado obtenida.

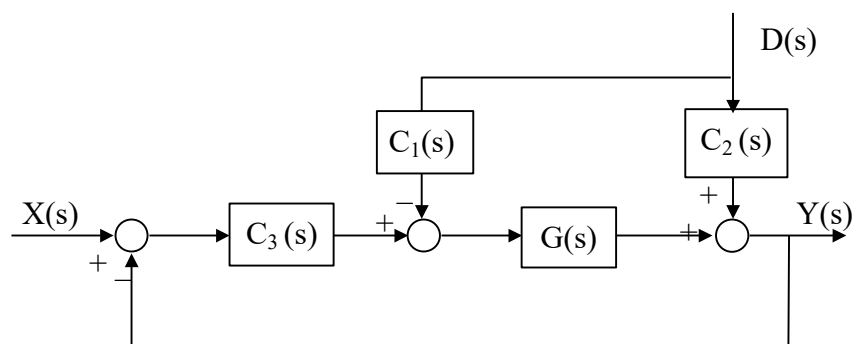
e) Compensación feedforward y cascada.



El compensador feedforward está en paralelo con el compensador en cascada con lo que no está en el lazo del sistema.

El añadir el controlador feedforward $C_1(s)$ no modifica la ecuación característica del sistema de lazo cerrado empleando sólo el regulador $C_2(s)$. De esta forma se puede utilizar el regulador $C_1(s)$ para modificar la función de transferencia de lazo cerrado sin modificar la posición de los polos dominantes.

f) Compensación cascada y feedforward en la perturbación.

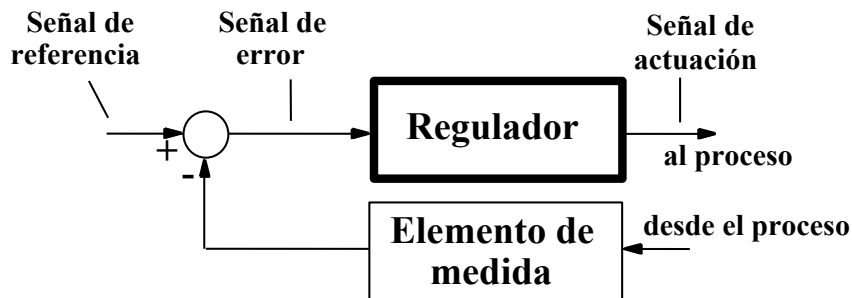


A menudo existen perturbaciones inevitables que afectan a los sistemas de control. Este esquema mediante los reguladores $C_1(s)$ y $C_2(s)$ pretende minimizar el efecto de las perturbaciones. El controlador $C_3(s)$ se emplea para ajustar la dinámica del sistema de lazo cerrado.

Es necesario incluir un regulador $C_2(s)$ para que el regulador $C_1(s)$ obtenido sea físicamente realizable.

1.4. CLASIFICACIÓN DE LOS REGULADORES INDUSTRIALES

Se van a analizar reguladores en cascada con el proceso según se representa en la siguiente figura:



Clasificación:

Atendiendo a la energía utilizada:

- Neumáticos.
- Hidráulicos.
- Electrónicos.

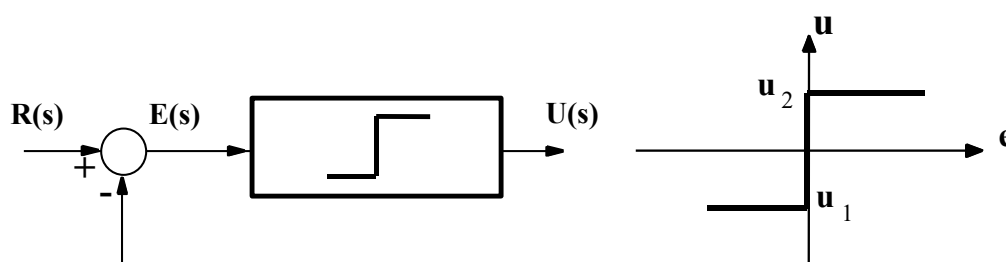
Atendiendo al tipo de acción:

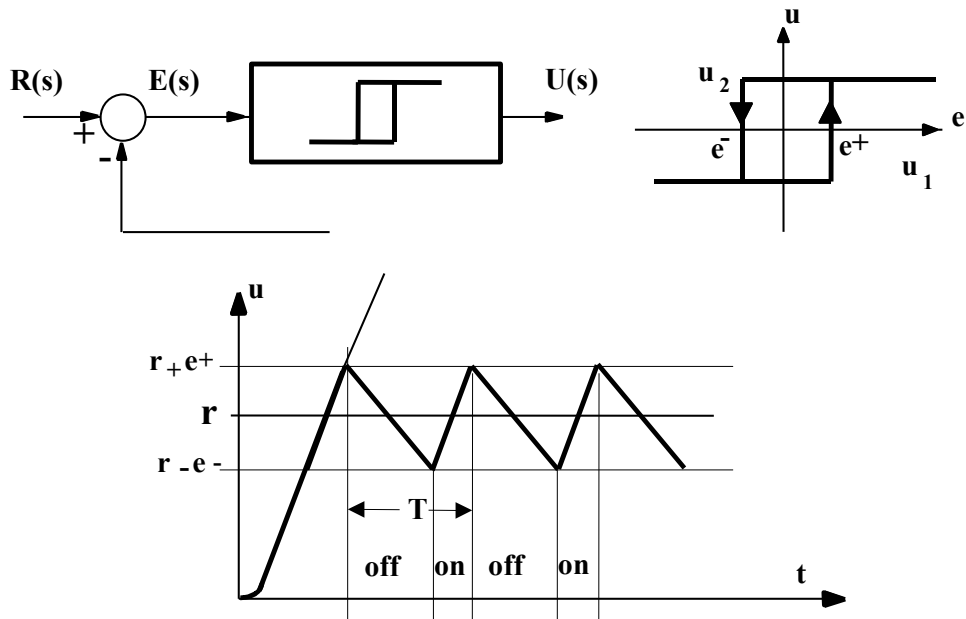
- Control Todo - Nada
- Control Proporcional (P).
- Control Integral (I).
- Control Proporcional - Integral (PI) y Redes de Retardo de Fase.
- Control Proporcional - Derivativo (PD) y Redes de Avance de Fase.
- Control Proporcional - Integral - Derivativo (PID) y Redes de Avance-Retardo.

1.4.1. Control Todo-Nada

Características principales:

- Sencillo y económico.
- No lineal.
- Dos únicos posibles valores de salida.
- Sin histéresis. Con histéresis.
- Oscilación de la salida.

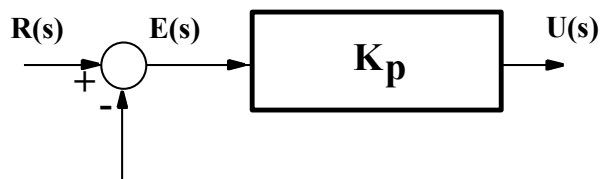




1.4.2. Control Proporcional

$$u(t) = K_p e(t)$$

$$D(s) = K_p$$



Características del Control Proporcional

Para los sistemas de primer orden:

- Mejora la constante de tiempo.
- Disminuye el error estacionario.

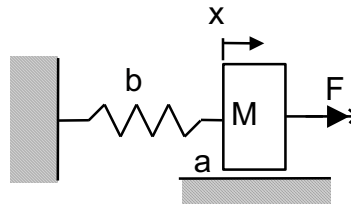
Para los sistemas de segundo orden:

- Disminuye la constante de tiempo (más rápido).
- Disminuye el amortiguamiento.
- Disminuye error estacionario.

En general:

- Sistema más rápido.
- Disminución del error estacionario.
- Limitación máxima de K_p :
 - Por oscilación e inestabilidad.
 - Por energía de la señal de entrada a $G(s)$.

Al sistema mostrado en la figura se le aplica un control proporcional:



$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

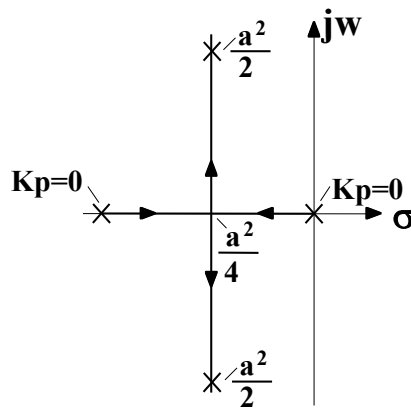
$$M(s) = \frac{K_p}{s^2 + as + b + K_p}$$

- Muelle adicional que aumenta la velocidad de regreso al equilibrio.

Para $b=0$.

$$M(s) = \frac{K_p}{s^2 + as + K_p}$$

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - K_p}$$



Para $0 < K_p < a^2/4$ polos reales:

A mayor K_p , menor es la constante de tiempo asociada (más rápido).

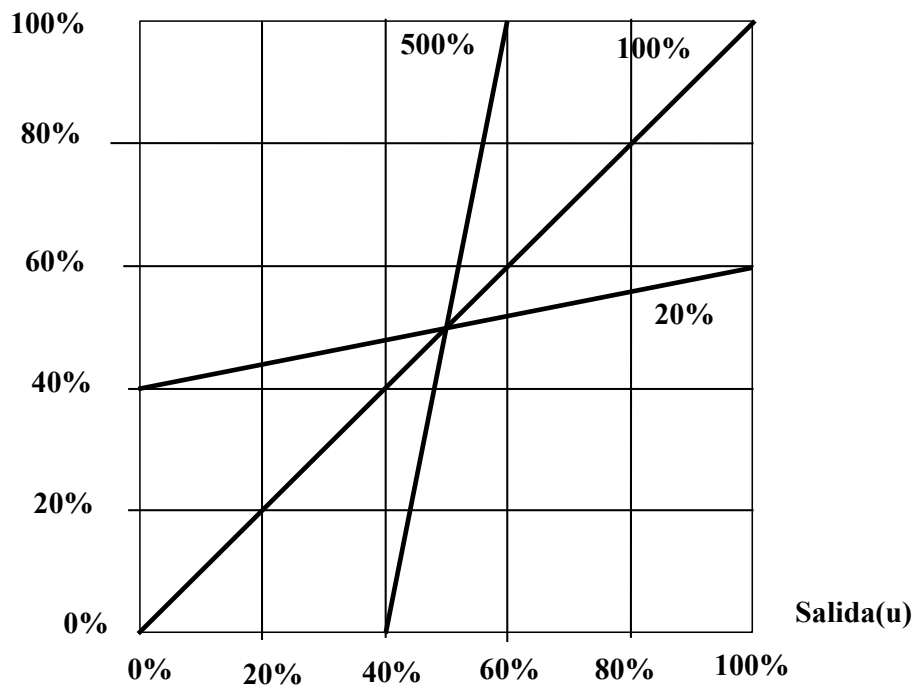
Para $K_p > a^2/4$ polos complejos conjugados:

A mayor K_p , mayor es ω_n y menor es δ , luego menor t_r y mayor M_p (oscilación e inestabilidad).

Banda proporcional:

$$BP = \frac{e}{u} 100 = \frac{1}{K_p} 100$$

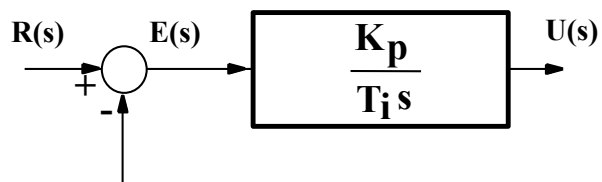
Entrada(e)



1.4.3. Control Integral

$$u(t) = \frac{K_p}{T_i} \int_{t_0}^t e(t) dt$$

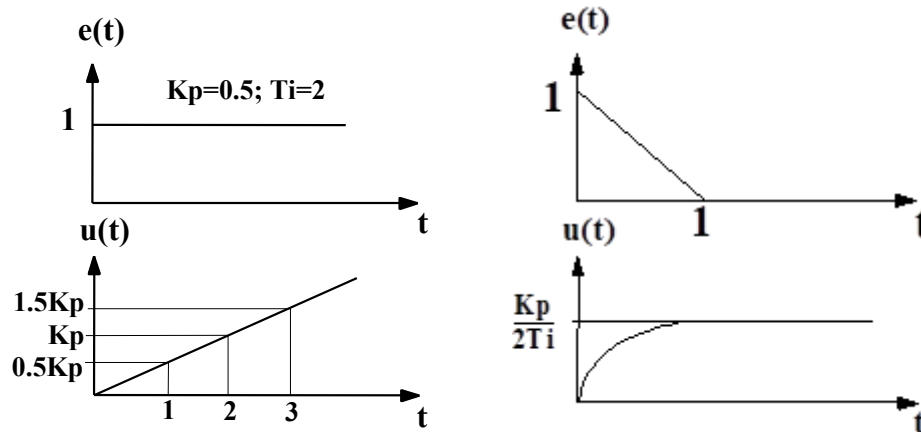
$$D(s) = \frac{K_p}{T_i s}$$



Ti: Tiempo integral.

1/Ti: Frecuencia de reposición.

Nº de veces por segundo que se duplica la ganancia Kp.



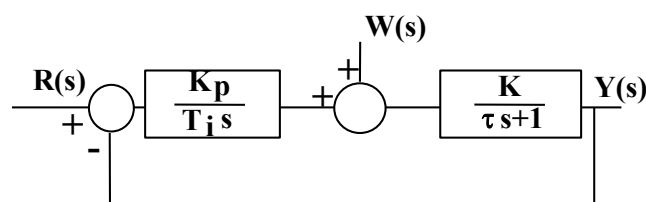
- Disminuye el error en estado estacionario ya que aumenta el tipo del sistema.
- Disminuye la estabilidad ya que introduce un polo, de lazo abierto, en el origen.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p K / (T_i \tau)}{s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{K K_p}{T_i \tau}}$$

Elevando la ganancia del control integral el sistema se hace menos amortiguado (oscilación)

Características del control Integral

- Señal de salida aún sin error.
- Disminuye el error estacionario.
- Disminuye la influencia de las perturbaciones.
- Disminuye la amortiguación (oscilación)



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K s}{\tau s^2 + s + \frac{K K_p}{T_i}}$$

Si $w(s) = D/s$:

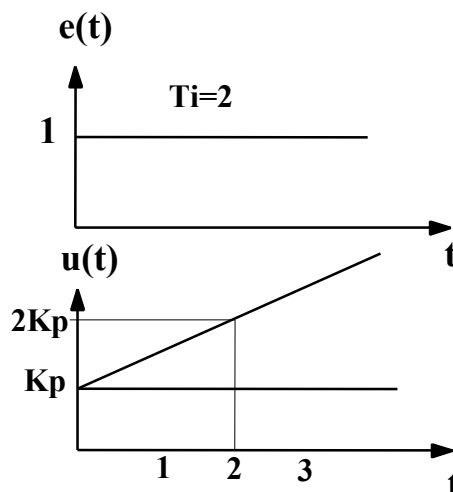
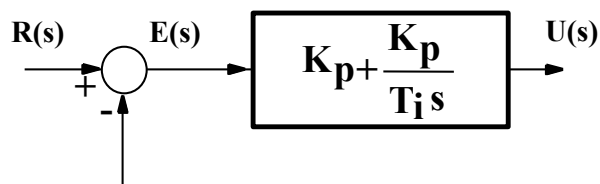
$$y_w(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ks}{\tau s^2 + s + \frac{KK_p}{T_i}} \frac{D}{s} = 0$$

1.4.4. Control Proporcional – Integral y Redes de Retardo de Fase

Control PI:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_{t_0}^t e(t) dt$$

$$D(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} \right] = K_p \left[\frac{T_i s + 1}{T_i s} \right]$$



Propiedades del control PI

Suma de las propiedades de los controladores P e I por separado:

- Sistema más rápido.
- Disminución del error estacionario.
- Señal de salida aún sin error.
- Disminuye la influencia de las perturbaciones.
- Disminuye la amortiguación (oscilación)

Redes de Retardo de fase:

$$D(s) = \frac{1}{\beta} \frac{\frac{1}{T} + s}{\frac{1}{\beta T} + s} \quad \text{ó} \quad D(s) = \frac{1 + T \cdot s}{1 + \beta T \cdot s}$$

donde $\beta > 1$.

Se puede observar que esta red está formada, por un cero y un polo, siendo en este caso la magnitud del polo, en valor absoluto, menor que la del cero.

Se observa así mismo la ganancia de esta red para el estado estacionario es la unidad. Para cualquier diseño, esta red irá acompañada por un amplificador de ganancia K , que permitirá variar el comportamiento de la red.

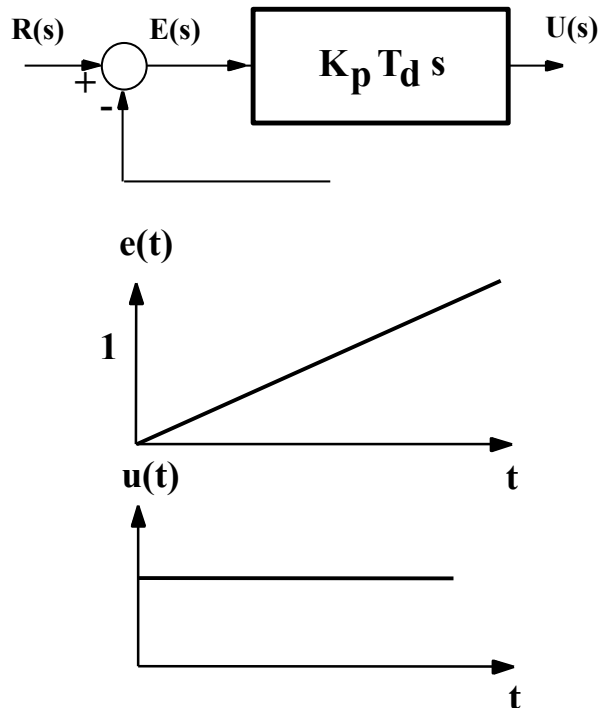
Propiedades del control con red de retardo de fase:

Poseen prácticamente las mismas propiedades que los reguladores PI con la ventaja de ser más estables. Reducen el ancho de banda. Disminuyen el error en estado estacionario pero no llega a error nulo como el PI.

1.4.5. Control Derivativo

$$u(t) = K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$D(s) = K_p T_d s$$



Nunca se utiliza solo.

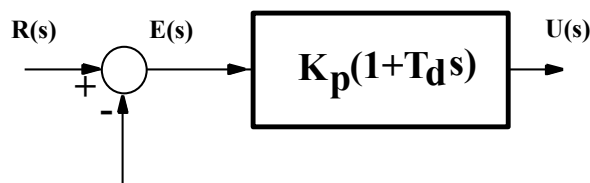
El cambio repentino de la señal de error puede dar lugar a cambios muy grandes en la salida del actuador.

1.4.6. Control Proporcional – Derivativo y Redes de Avance de Fase

Control proporcional derivativo:

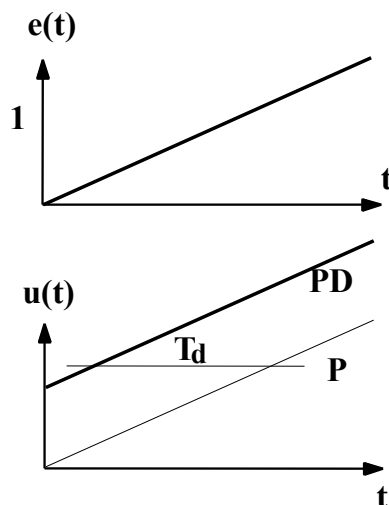
$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$D(s) = K_p (1 + T_d s)$$



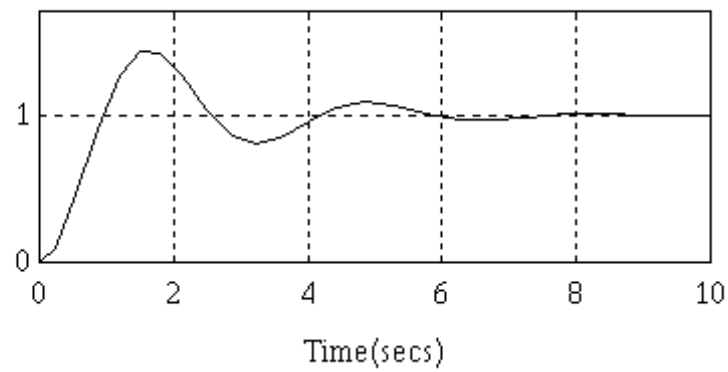
Td: Tiempo derivativo.

Tiempo en el que la acción PD se adelanta a la acción P (Anticipación).

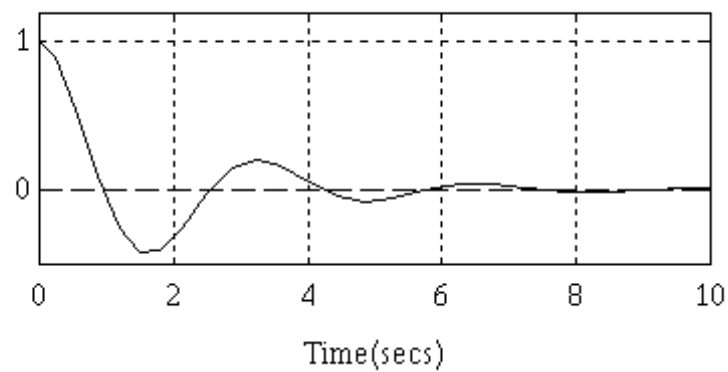


La magnitud de la señal de actuación depende de la velocidad de variación del error.

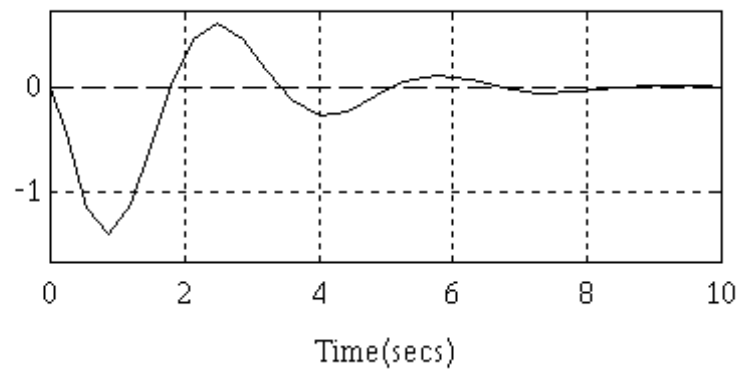
Respuesta:



Error:



Derivada del error:

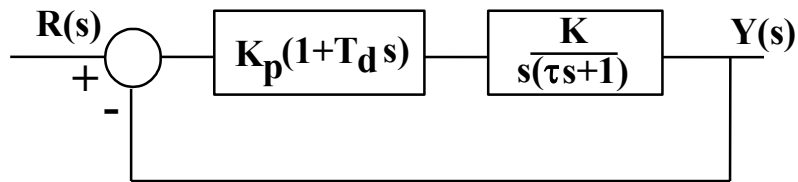


Estabilización de la respuesta del sistema.

Aumento del tiempo de respuesta.

No afecta al error estacionario.

Para:



$$M(s) = \frac{K_p K (T_d s + 1)}{\tau s^2 + s(1 + K K_p T_d) + K K_p}$$

Un aumento de $K_p T_d$ produce un incremento del amortiguamiento.

Propiedades del control PD

- Magnitud de salida (actuación) en función de la velocidad de variación del error.
- Estabilización de la respuesta (amortiguación).
- Aumento del tiempo de respuesta.
- No afecta al error estacionario.

Red de Avance de Fase:

$$\left[D(s) = \frac{1/T + s}{1/\alpha T + s} \right] \quad \text{ó} \quad \left[D(s) = \alpha \frac{1 + T \cdot s}{1 + \alpha T \cdot s} \right]$$

donde $\alpha < 1$.

Se puede observar que esta red está formada por un cero y un polo igual que la red de retardo, siendo en este caso la magnitud del polo, en valor absoluto, mayor que la del cero, y que presenta una ganancia (atenuación) en estado estacionario de valor α .

Para cualquier diseño, esta red irá acompañada por un amplificador de ganancia K , que permitirá variar el comportamiento de la red.

Propiedades del control con red de avance de fase:

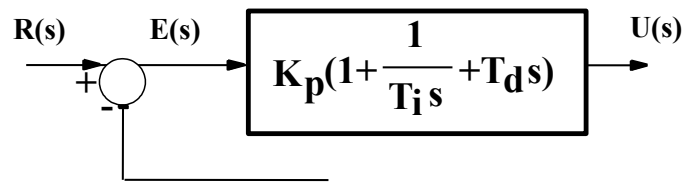
Poseen prácticamente las mismas propiedades que los reguladores PD pero limitando el ruido de alta frecuencia.

1.4.7. Control Proporcional – Integral - Derivativo (PID) y Red de Avance-Retardo

Control PID:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_{t_0}^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$D(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$



Acción combinada del P, I, D. Gran uso industrial.

Ajuste de K_p , T_i y T_d .

Aumentando K_p y $1/T_i$ se eliminan errores.

Aumentando $1/T_i$ disminuye la estabilidad.

Aumentando T_d aumenta la estabilidad.

Control con Red de Avance-Retardo:

$$D(s) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1/T_1 + s}{1/\alpha T_1 + s} \cdot \frac{1/T_2 + s}{1/\beta T_2 + s} \quad \text{ó} \quad D(s) = \alpha \frac{1 + T_1 \cdot s}{1 + \alpha T_1 \cdot s} \cdot \frac{1 + T_2 \cdot s}{1 + \beta T_2 \cdot s}$$

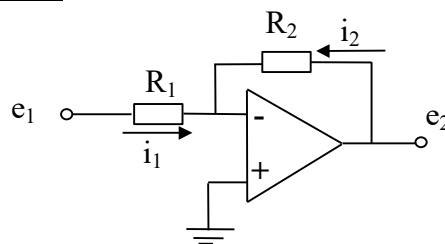
donde $\alpha < 1$ y $\beta > 1$.

Combina los efectos de las redes de avance y retardo. Es muy similar a un regulador de tipo PID.

1.5. ESQUEMAS ELECTRÓNICOS DE LOS REGULADORES

A continuación, se muestran ejemplos de posibles circuitos que pueden emplearse para la realización de los reguladores anteriormente citados.

1.5.1. Regulador proporcional



$$i_1(t) = -i_2(t)$$

$$i_1(t) = \frac{e_1(t)}{R_1}; \quad i_2(t) = \frac{e_2(t)}{R_2}$$

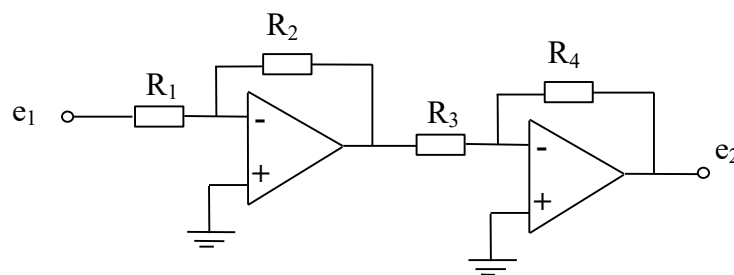
$$\frac{e_1(t)}{R_1} = -\frac{e_2(t)}{R_2}$$

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$E_2(s) = -\frac{R_2}{R_1} E_1(s)$$

Corresponde con un regulador proporcional inversor con ganancia $K = R_2 / R_1$.

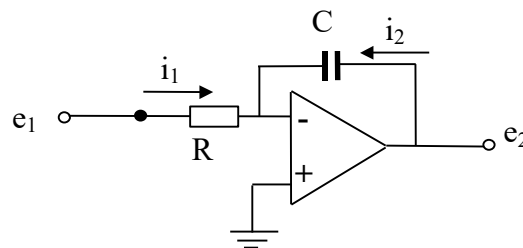
Si se desea un regulador proporcional no inversor puede conseguirse mediante dos reguladores de este tipo en cascada:



$$E_2(s) = \frac{R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3} E_1(s)$$

En este caso la ganancia del regulador proporcional es $K=(R_2R_4)/(R_1R_3)$

1.5.2. Regulador integral



$$i_1(t) = -i_2(t)$$

$$i_1(t) = \frac{e_1(t)}{R}$$

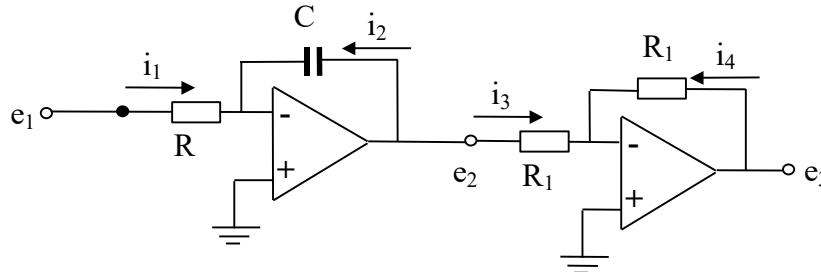
$$e_2(t) = \frac{1}{C} \int i_2(t) dt = -\frac{1}{C} \int \frac{e_1(t)}{R} dt$$

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$E_2(s) = -\frac{1}{RCs} E_1(s)$$

Luego este esquema corresponde con un integrador inversor donde $T_i = RC$.

Si se desea un regulador integral no inversor puede añadirse un regulador proporcional a la salida, que además permitirá gracias a su ganancia aumentar el rango de ajuste del regulador.

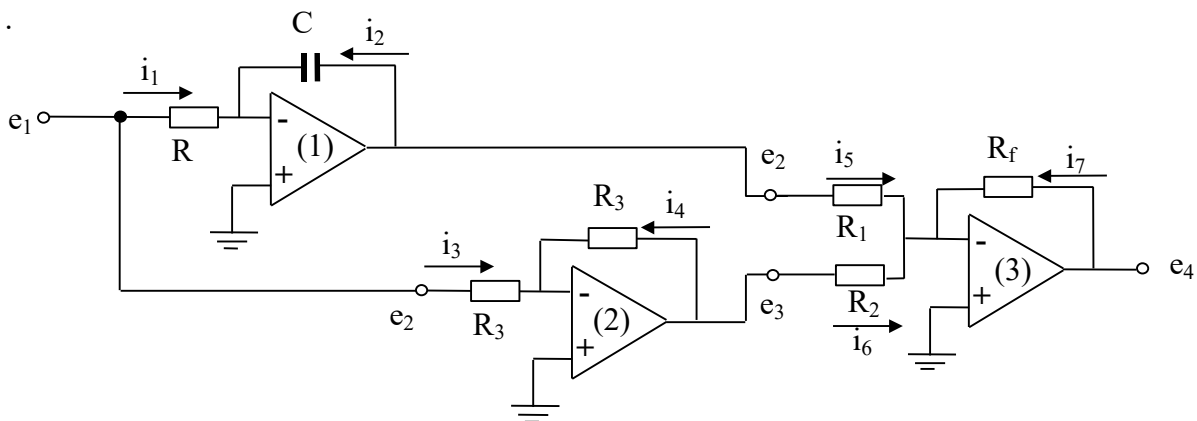


$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = -\frac{1}{RCs}$$

$$\frac{E_3(s)}{E_2(s)} = -\frac{R_1}{R_1} = -1$$

$$E_3 = \frac{1}{RCs} E_1$$

1.5.3. Regulador proporcional integral



El circuito formado por el primer operacional corresponde con un integrador inversor como el visto en el apartado anterior:

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = -\frac{1}{RCs}$$

El segundo operacional está en configuración de amplificador inversor de ganancia unidad:

$$\frac{E_3(s)}{E_1(s)} = -1$$

El tercer operacional está en configuración de sumador inversor:

$$i_5(t) + i_6(t) = -i_7(t)$$

$$i_5(t) = \frac{e_2(t)}{R_1}$$

$$i_6(t) = \frac{e_3(t)}{R_2}$$

$$i_7(t) = \frac{e_4(t)}{R_f}$$

$$\frac{e_2(t)}{R_1} + \frac{e_3(t)}{R_2} = -\frac{e_4(t)}{R_f}$$

$$e_4(t) = -\left(\frac{R_f}{R_1} e_2(t) + \frac{R_f}{R_2} e_3(t)\right)$$

$$E_4(s) = -\left(\frac{R_f}{R_1} E_2(s) + \frac{R_f}{R_2} E_3(s)\right)$$

Uniando los tres:

$$E_2(s) = -\frac{1}{RCs} E_1(s)$$

$$E_3(s) = -E_1(s)$$

$$E_4(s) = -\left(\frac{R_f}{R_1} E_2(s) + \frac{R_f}{R_2} E_3(s)\right)$$

queda:

$$E_4(s) = -\left(-\frac{R_f}{R_1} \frac{1}{RCs} E_1(s) - \frac{R_f}{R_2} E_1(s)\right)$$

$$E_4(s) = \left(\frac{R_f}{R_2} + \frac{R_f}{R_1} \frac{1}{RCs}\right) E_1(s)$$

$$\boxed{E_4(s) = \frac{R_f}{R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{RCs}\right) E_1(s)}$$

Comparando con:

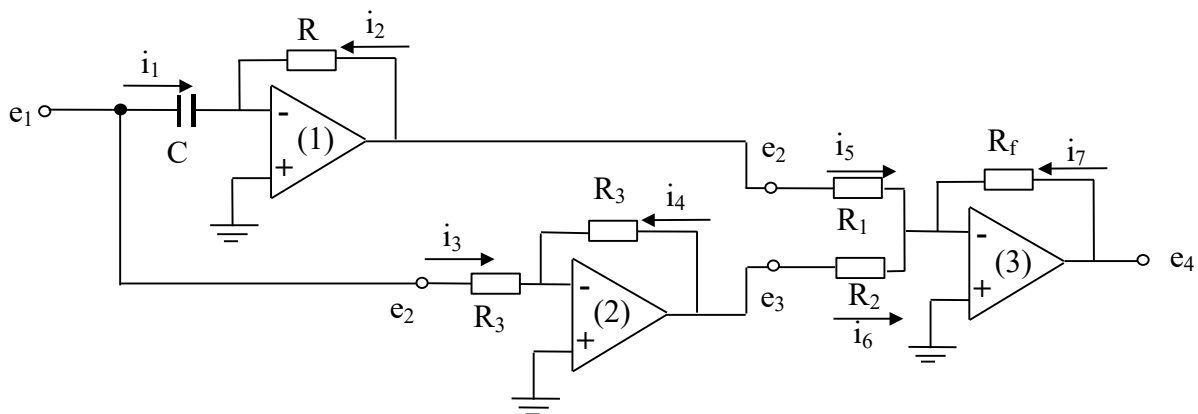
$$D(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} \right]$$

Se tiene que:

$$K_p = \frac{R_f}{R_2}$$

$$T_i = RC \frac{R_1}{R_2}$$

1.5.3. Regulador proporcional derivativo



El primer operacional está en configuración de diferenciador inversor:

$$i_1(t) = -i_2(t)$$

$$i_1(t) = C \frac{de_1(t)}{dt}$$

$$i_2(t) = \frac{e_2(t)}{R}$$

$$C \frac{de_1(t)}{dt} = -\frac{e_2(t)}{R}$$

$$e_2(t) = -RC \frac{de_1(t)}{dt}$$

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$E_2(s) = -RCsE_1(s)$$

Luego corresponde a un diferenciador inversor.

El segundo operacional está en configuración de amplificador inversor de ganancia unidad:

$$\frac{E_3(s)}{E_1(s)} = -1$$

El tercer operacional está en configuración de sumador inversor como en el caso anterior.

$$E_4(s) = -\left(\frac{R_f}{R_1} E_2(s) + \frac{R_f}{R_2} E_3(s)\right)$$

Uniendo los tres:

$$E_2(s) = -RCsE_1(s)$$

$$E_3(s) = -E_1(s)$$

$$E_4(s) = -\left(\frac{R_f}{R_1} E_2(s) + \frac{R_f}{R_2} E_3(s)\right)$$

queda:

$$E_4(s) = -\left(-\frac{R_f}{R_1} RCsE_1(s)E_1(s) - \frac{R_f}{R_2} E_1(s)\right)$$

$$E_4(s) = \left(\frac{R_f}{R_2} + \frac{R_f}{R_1} RCs\right)E_1(s)$$

$$E_4(s) = \frac{R_f}{R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} RCs\right)E_1(s)$$

Comparando con:

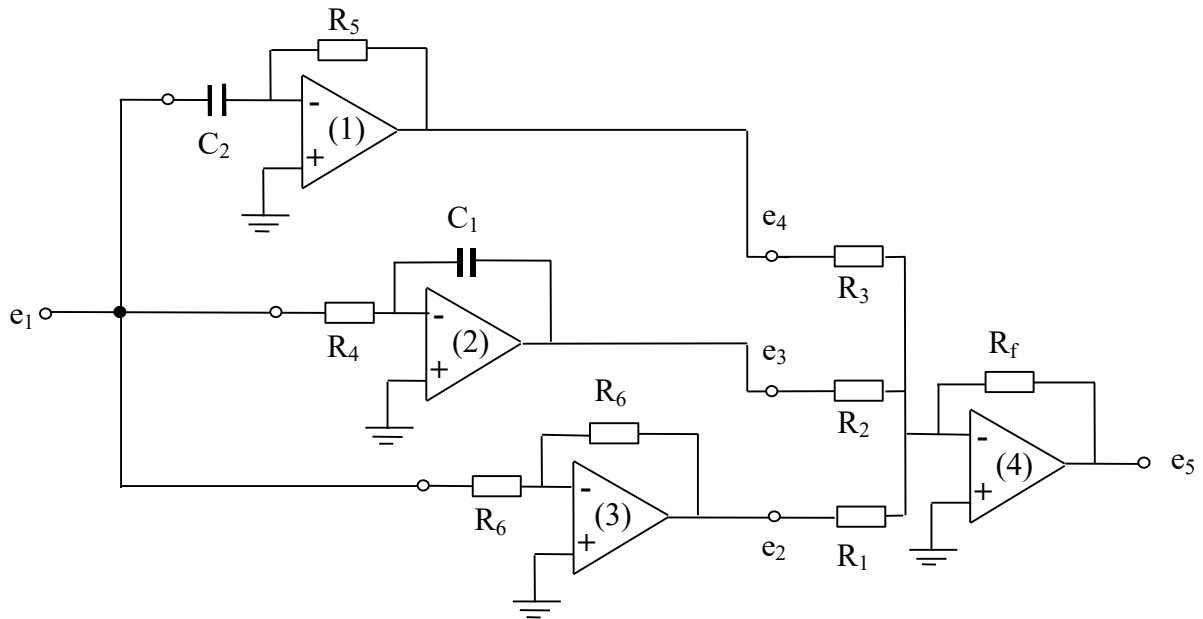
$$D(s) = K_p(1 + T_d s)$$

Se tiene que:

$$K_p = \frac{R_f}{R_2}$$

$$T_d = \frac{R_2}{R_1} RC$$

1.5.4. Regulador proporcional integral derivativo



El primer operacional está en configuración de diferenciador inversor:

$$E_4(s) = -R_5 C_2 s E_1(s)$$

El segundo operacional está en configuración de integrador inversor:

$$E_3(s) = -\frac{1}{R_4 C_1 s} E_1(s)$$

El tercer operacional está en configuración de inversor con ganancia unidad:

$$E_2(s) = -E_1(s)$$

El cuarto operacional está en configuración de sumador inversor:

$$E_5(s) = -\left(\frac{R_f}{R_1} E_2(s) + \frac{R_f}{R_2} E_3(s) + \frac{R_f}{R_3} E_4(s) \right)$$

Uniendo los cuatro circuitos:

$$E_5(s) = -\left(-\frac{R_f}{R_1} E_1(s) - \frac{R_f}{R_2} \frac{1}{R_4 C_1 s} E_1(s) - \frac{R_f}{R_3} R_5 C_2 s E_1(s) \right)$$

$$E_5(s) = \left(\frac{R_f}{R_1} + \frac{R_f}{R_2} \frac{1}{R_4 C_1 s} + \frac{R_f}{R_3} R_5 C_2 s \right) E_1(s)$$

$$E_5(s) = \frac{R_f}{R_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{R_4 C_1 s} + \frac{R_1}{R_3} R_5 C_2 s \right) E_1(s)$$

Comparando con:

$$D(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Se tiene que:

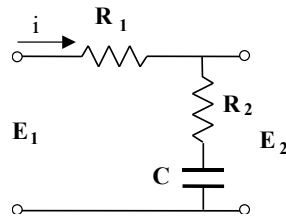
$$K_p = \frac{R_f}{R_1}$$

$$T_i = \frac{R_2 R_4 C_1}{R_1}$$

$$T_d = \frac{R_1 R_5 C_2}{R_3}$$

1.5.5. Red de retardo de fase

La estructura de una red de compensación por retardo de fase es la siguiente:



y su función de transferencia:

$$E_1 = \frac{1}{C} \int i dt + R_2 i + R_1 i$$

$$E_2 = \frac{1}{C} \int i dt + R_2 i$$

$$E_1(s) = \left[\frac{1}{s \cdot C} + R_2 + R_1 \right] I(s)$$

$$E_2 = \left[\frac{1}{s \cdot C} + R_2 \right] I(s) \rightarrow I(s) = \frac{s \cdot C}{1 + s \cdot C \cdot R_2} E_2(s)$$

$$E_1(s) = \left[\frac{1 + (R_2 + R_1)s \cdot C}{s \cdot C} \right] \left[\frac{s \cdot C}{1 + s \cdot C \cdot R_2} \right] E_2(s)$$

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \left[\frac{1 + s \cdot C \cdot R_2}{1 + (R_2 + R_1)s \cdot C} \right]$$

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2}{(R_2 + R_1)} \left[\frac{\frac{1}{C \cdot R_2} + s}{\frac{1}{(R_2 + R_1) \cdot C} + s} \right]$$

Comparando con:

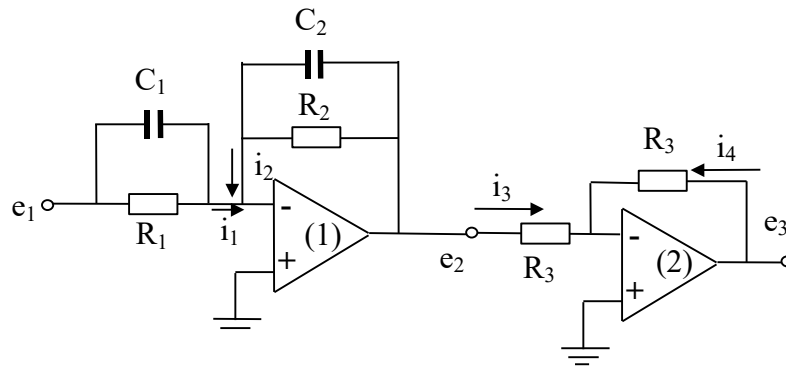
$$D(s) = \frac{1}{\beta} \frac{\frac{1}{T} + s}{\frac{1}{\beta T} + s}$$

Se tiene:

$$T = R_2 C; \quad \beta = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

Es importante tener en cuenta que en este caso $\beta > 1$.

La red de retardo de fase puede construirse igualmente con elementos activos. En este caso una posible configuración será:



Para el primer operacional:

$$i_1(t) = -i_2(t)$$

$$i_1(t) = \frac{e_1(t)}{R_1} + C_1 \frac{de_1(t)}{dt}$$

$$i_2(t) = \frac{e_2(t)}{R_2} + C_2 \frac{de_2(t)}{dt}$$

$$\frac{e_1(t)}{R_1} + C_1 \frac{de_1(t)}{dt} = - \left(\frac{e_2(t)}{R_2} + C_2 \frac{de_2(t)}{dt} \right)$$

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales nulas:

$$\left(\frac{1}{R_1} + C_1 s\right) E_1(s) = -\left(\frac{1}{R_2} + C_2 s\right) E_2(s)$$

$$E_2(s) = -\frac{\frac{1}{R_1} + C_1 s}{\frac{1}{R_2} + C_2 s} E_1(s)$$

$$E_2(s) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{\frac{1}{R_1 C_1} + s}{\frac{1}{R_2 C_2} + s} E_1(s)$$

El segundo operacional está en configuración de amplificador inversor de ganancia unidad:

$$E_3(s) = -E_2(s)$$

Luego:

$$E_3(s) = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{\frac{1}{R_1 C_1} + s}{\frac{1}{R_2 C_2} + s} E_1(s)$$

Comparando con:

$$D(s) = K \frac{1}{\beta} \frac{\frac{1}{T} + s}{\frac{1}{\beta T} + s}$$

Se tiene:

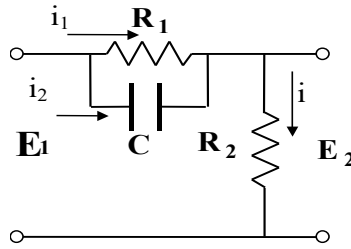
$$T = R_1 C_1 \quad \beta T = R_2 C_2$$

$$\beta = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} \quad K = \frac{R_2}{R_1}$$

Para ser red de retardo debe cumplirse que $\beta > 1$.

1.5.6. Red de avance de fase

La estructura de una red de compensación por avance de fase es la siguiente



y su función de transferencia:

$$i_1 + i_2 = i$$

$$\frac{E_1 - E_2}{R_1} + C \frac{d(E_1 - E_2)}{dt} = \frac{E_2}{R_2}$$

$$E_1 \left[\frac{1}{R_1} + C \cdot s \right] = E_2 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C \cdot s \right]$$

$$E_1 [R_2 + R_1 R_2 C \cdot s] = E_2 [R_2 + R_1 + R_1 R_2 C \cdot s]$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{[R_2 + R_1 R_2 C \cdot s]}{[R_2 + R_1 + R_1 R_2 C \cdot s]} = \frac{R_1 R_2 C \left[\frac{R_2}{R_1 R_2 C} + s \right]}{R_1 R_2 C \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} + s \right]}$$

$$D(s) = \frac{\frac{1}{T} + s}{\frac{1}{\alpha T} + s}$$

que puede verse también como:

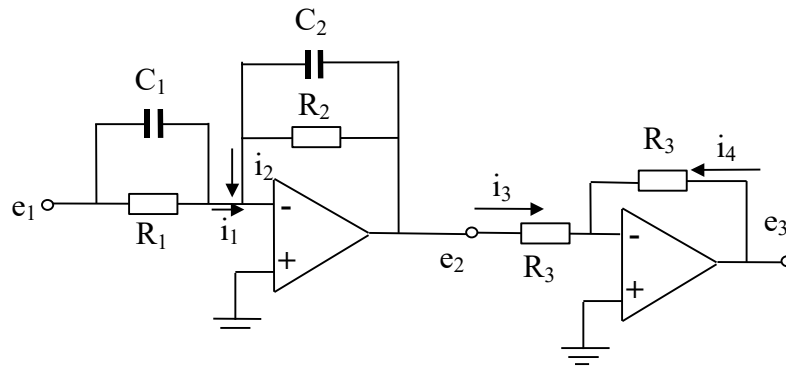
$$D(s) = \alpha \frac{1 + T \cdot s}{1 + \alpha T \cdot s}$$

donde:

$$T = R_1 C; \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Es importante tener en cuenta que en este caso $\alpha < 1$.

La red de avance de fase puede construirse igualmente con elementos activos. La configuración será la misma que para la red de retardo:



$$E_3(s) = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{\frac{1}{R_1 C_1} + s}{\frac{1}{R_2 C_2} + s} E_1(s)$$

Comparando con:

$$D(s) = K \frac{\frac{1}{T} + s}{\frac{1}{\alpha T} + s}$$

Se tiene:

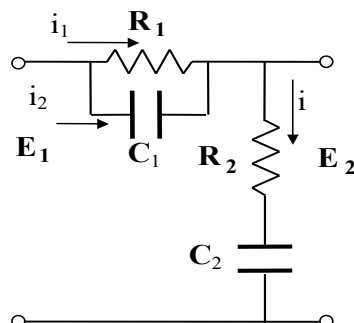
$$T = R_1 C_1 \quad \alpha T = R_2 C_2$$

$$\alpha = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} \quad K = \frac{C_1}{C_2}$$

Para ser red de avance debe cumplirse que $\alpha < 1$.

1.5.6. Red de avance-retardo de fase

La estructura de una red de compensación de avance - retardo de fase es la siguiente



y su función de transferencia:

$$I_1(s) + I_2(s) = I(s)$$

$$I_1(s) = \frac{E_1(s) - E_2(s)}{R_1}$$

$$I_2(s) = \frac{E_1(s) - E_2(s)}{\frac{1}{sC_1}}$$

$$I(s) = \frac{E_2(s)}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}$$

$$\frac{E_1(s) - E_2(s)}{R_1} + \frac{E_1(s) - E_2(s)}{\frac{1}{sC_1}} = \frac{E_2(s)}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}$$

$$\frac{E_1(s) - E_2(s)}{R_1} + [E_1(s) - E_2(s)]sC_1 = \frac{E_2(s)}{\frac{sR_2C_2 + 1}{sC_2}}$$

$$\frac{E_1(s) - E_2(s)}{R_1} + [E_1(s) - E_2(s)]sC_1 = \frac{E_2(s)sC_2}{sR_2C_2 + 1}$$

$$\frac{E_1(s) - E_2(s)}{R_1} - \frac{E_2(s)sC_2}{sR_2C_2 + 1} = -[E_1(s) - E_2(s)]sC_1$$

$$sR_2C_2E_1(s) - sR_2C_2E_2(s) + E_1(s) - E_2(s) - E_2(s)sC_2R_1 = -[E_1(s) - E_2(s)]sC_1R_1(sR_2C_2 + 1)$$

$$(1 + (C_1R_1 + R_2C_2)s + C_1R_1R_2C_2s^2)E_1(s) = (1 + (C_1R_1 + R_2C_2 + C_2R_1)s + C_1R_1R_2C_2s^2)E_2(s)$$

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{1 + (R_1C_1 + R_2C_2)s + C_1R_1R_2C_2s^2}{1 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + R_1C_1R_2C_2s^2}$$

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{(1 + R_1C_1s)(1 + R_2C_2s)}{1 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + R_1C_1R_2C_2s^2}$$

Lo que corresponde con una función con dos polos y dos ceros, es decir, el producto de una red de retardo por una de avance.

Comparando con:

$$D(s) = K\alpha \frac{1 + T_1 \cdot s}{1 + \alpha T_1 \cdot s} \cdot \frac{1 + T_2 \cdot s}{1 + \beta T_2 \cdot s}$$

$$D(s) = K\alpha \frac{(1 + T_1 \cdot s)(1 + T_2 \cdot s)}{1 + (\alpha T_1 + \beta T_2) \cdot s + \alpha \beta T_1 T_2 s^2}$$

Comparando el numerador se tiene:

$$T_1 = R_1 C_1$$

$$T_2 = R_2 C_2$$

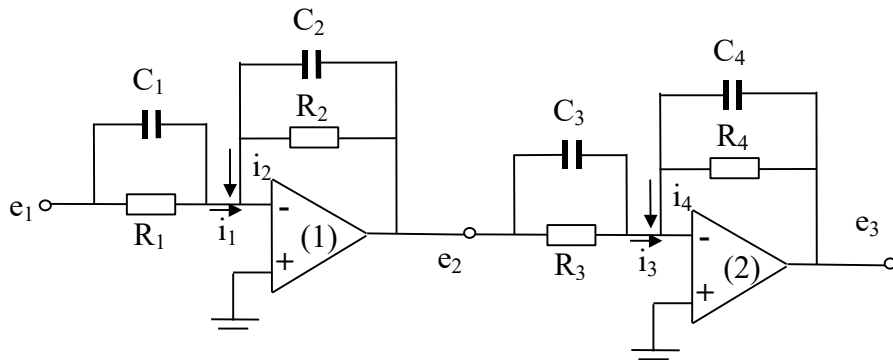
Comparando el término de s^2 del denominador:

$$\alpha \cdot \beta = 1$$

Comparando el término de s del denominador:

$$\alpha T_1 + \beta T_2 = R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2$$

Una red de avance – retardo puede construirse igualmente con elementos activos uniendo una red de avance con una de retardo.



Para el primer operacional:

$$E_2(s) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{\frac{1}{R_1 C_1} + s}{\frac{1}{R_2 C_2} + s} E_1(s)$$

Para el segundo operacional:

$$E_3(s) = -\frac{C_3}{C_4} \cdot \frac{\frac{1}{R_3 C_3} + s}{\frac{1}{R_4 C_4} + s} E_2(s)$$

Luego el sistema completo será:

$$E_3(s) = \frac{C_1}{C_2} \frac{C_3}{C_4} \cdot \frac{\frac{1}{R_1 C_1} + s}{\frac{1}{R_2 C_2} + s} \cdot \frac{\frac{1}{R_3 C_3} + s}{\frac{1}{R_4 C_4} + s} \cdot E_1(s)$$

Comparando con:

$$D(s) = K \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\frac{1}{T_1} + s}{\frac{1}{\alpha T_1} + s} \cdot \frac{\frac{1}{T_2} + s}{\frac{1}{\beta T_2} + s}$$

Se tiene:

$$T_1 = R_1 C_1 \quad \alpha T_1 = R_2 C_2 \quad \alpha = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}$$

$$T_2 = R_3 C_3 \quad \beta T_2 = R_4 C_4 \quad \beta = \frac{R_4 C_4}{R_3 C_3}$$

$$K = \frac{C_1}{C_2} \frac{R_4}{R_3}$$

Donde $\alpha < 1$ y $\beta > 1$

1.6. SINTONIZACIÓN DE REGULADORES

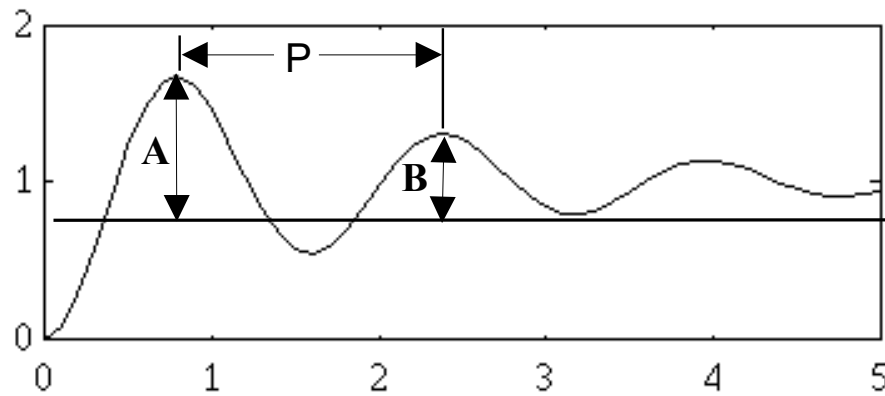
Son procedimientos experimentales y basados en el análisis de la respuesta.

1.6.1. Ziegler-Nichols

Se basan en las características de la respuesta transitoria del sistema ante una entrada escalón.

Se busca una razón de decaimiento de 0.25: Compromiso entre rapidez y estabilidad.

$$\boxed{\frac{B}{A} = \frac{1}{4}}$$



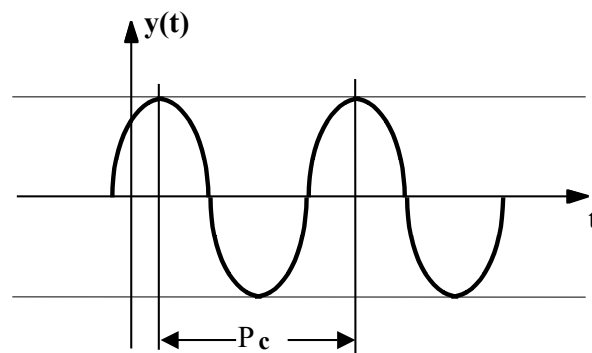
El regulador que se desea sintonizar es de la forma:

$$G_c(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Primer método: Método del límite de estabilidad:

Se analiza la planta en lazo cerrado. Utilizando únicamente un regulador proporcional se incrementa su valor hasta K_c en el que el sistema presente un comportamiento oscilante (límite de estabilidad).

Con el valor de ganancia crítica K_c y el periodo de la oscilación mantenida obtenida P_c se calculan los parámetros del regulador según la siguiente tabla:



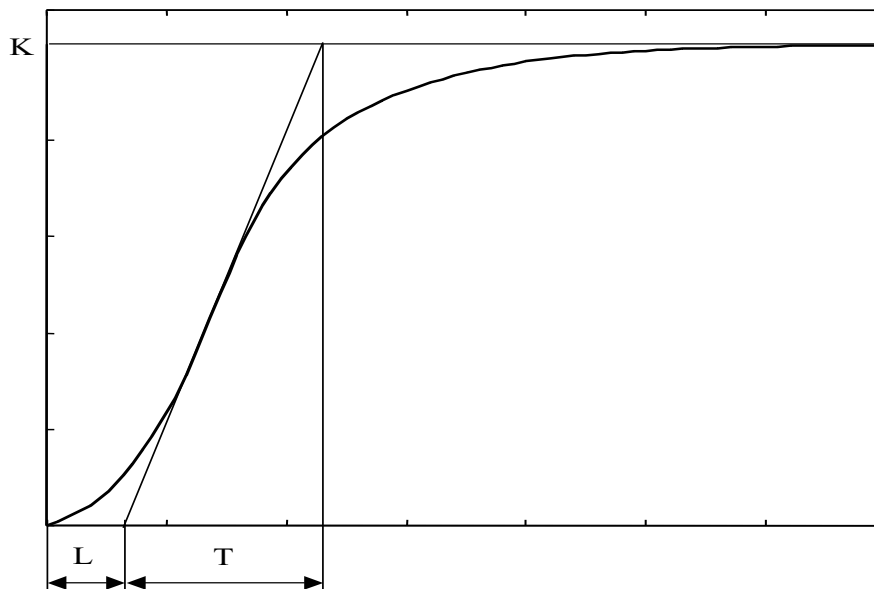
Tipo de Controlador	Valor de los parámetros		
P	$K_p = 0.5K_c$	$T_i = \infty$	$T_d = 0$
PI	$K_p = 0.45K_c$	$T_i = \frac{1}{1.2}P_c$	$T_d = 0$
PID	$K_p = 0.6K_c$	$T_i = 0.5P_c$	$T_d = \frac{P_c}{8}$

Segundo método: En lazo abierto.

Para sintonizar el regulador en este método se emplea el sistema en lazo abierto, luego es necesario para poder aplicarlo que el sistema sea estable en lazo abierto.

Para sistemas tipo 0 y sin polos complejos conjugados dominantes y cuya respuesta ante una entrada escalón unitario presenta forma de S. Se representa la respuesta del sistema, se traza la recta tangente en el punto de inflexión y se leen de la gráfica los parámetros:

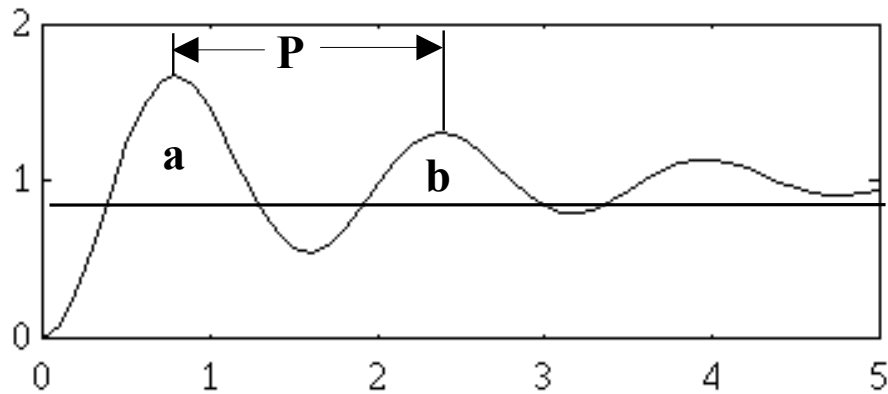
- Tiempo de retardo L
- Constante de tiempo T
- Valor de régimen permanente K



Tipo de Controlador	Valor de los parámetros		
P	$K_p = \frac{T}{L}$	$T_i = \infty$	$T_d = 0$
PI	$K_p = 0.9 \frac{T}{L}$	$T_i = \frac{L}{0.3}$	$T_d = 0$
PID	$K_p = 1.2 \frac{T}{L}$	$T_i = 2L$	$T_d = 0.5L$

1.6.2. Chindambara

En este caso consiste en un procedimiento iterativo. Se introduce un escalón en la entrada y se mide el área encerrada bajo dos picos consecutivos (áreas en a y b).



Con estos valores se calcula R:

$$R = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

La acción proporcional K_p se ajustará según la siguiente expresión:

$$K_{n+1} = (0.5 + 2.27R)K_n$$

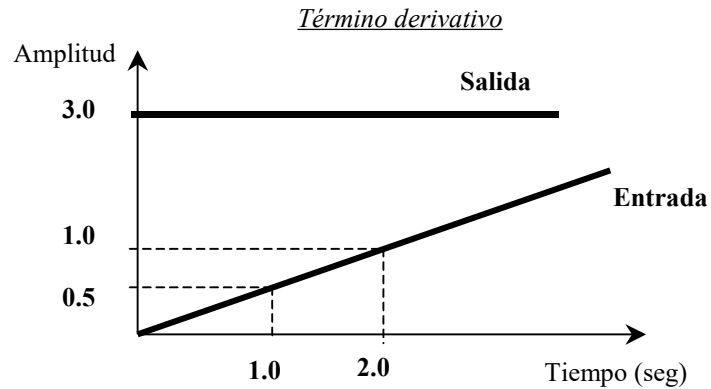
El proceso se repite hasta que $R=0.22$ lo que corresponde con una relación de decadencia de $\frac{1}{4}$.

La siguiente tabla muestra los valores de los parámetros para los diferentes tipos de reguladores:

Tipo de Controlador	Valor de los parámetros		
P	$K_{n+1} = (0.5 + 2.27R)K_n$		
PI	$K_{n+1} = (0.5 + 2.27R)K_n$	$T_i = \frac{P}{1.2\sqrt{1+R^2}}$	
PID	$K_{n+1} = (0.5 + 2.27R)K_n$	$T_i = \frac{P}{2\sqrt{1+R^2}}$	$T_d = \frac{P}{8\sqrt{1+R^2}}$

EJERCICIO 1.1. ** M3

Dado un controlador tipo PID del que se sabe que tiene una banda proporcional del 20%, que la frecuencia de reposición es de 0.1 y que la respuesta del término derivativo viene dada en la siguiente figura:



Obtener la función de transferencia del controlador.

La ecuación del PID es:

$$K_p e(t) + \frac{1}{T_i} \int_{t_0}^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Banda proporcional del 20% significa que una modificación del 20% en la entrada hace que la salida varíe un 100% de la entrada:

$$BP = \frac{1}{K_p} \times 100 = 20\% \Rightarrow K_p = 5$$

De la gráfica del término derivativo, tenemos que:

- la entrada es: $e(t) = 0.5t$
- la respuesta es: $r(t) = 3$

luego:

$$T_d \frac{de(t)}{dt} = 3 = T_d \frac{d}{dt}(0.5t) = 0.5 T_d \Rightarrow T_d = 6$$

y la frecuencia de reposición es $f_i = 0.1$, luego $\frac{1}{T_i} = 0.1$

luego:

$$PID = 5 + \frac{0.1}{s} + 6s = \frac{6s^2 + 5s + 0.1}{s}$$

EJERCICIO 1.2.

Dado un controlador tipo PID de la forma:

$$R(s) = \frac{9.63(s + 0.6944)(s + 0.01)}{s}$$

- a) Indicar los valores de la ganancia proporcional, la frecuencia de reposición y la constante de tiempo diferencial del controlador PID calculado.
 b) Diseñar el esquema electrónico que permite realizar la función PID diseñada.
-

a)

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{9.63(s + 0.6944)(s + 0.01)}{s} = \frac{9.63(s^2 + 0.7s + 0.007)}{s} = \\ &= 9.63 \left(s + 0.7 + \frac{0.007}{s} \right) = 9.63 \cdot 0.7 \left(\frac{s}{0.7} + 1 + \frac{0.007}{0.7s} \right) \\ R(s) &= 6.741 \left(1 + \frac{1}{100s} + 1.43s \right) \end{aligned}$$

Como la forma de un regulador PID es:

$$R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right)$$

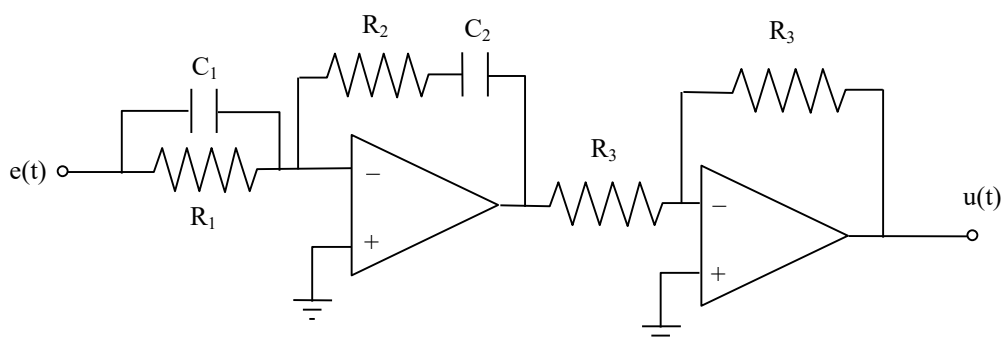
comparando términos se tiene:

$$K_p = 6.741$$

$$1/T_i = 0.01$$

$$T_d = 1.43$$

- b) Diseñar el esquema electrónico que permite realizar la función PID diseñada.



Para este esquema de regulador la función de transferencia en función de resistencias y condensadores es:

$$R(s) = -\left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{1}{C_2 \cdot R_1 \cdot s} - C_1 \cdot R_2 \cdot s$$

$$\frac{C_1}{C_2} + \frac{R_2}{R_1} = K_p \quad \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 C_2} = 6.741$$

$$\frac{1}{C_2 R_1} = \frac{K_p}{T_i} \quad \frac{1}{C_2 R_1} = \frac{6.741}{100} \quad C_2 R_1 = 14.83$$

$$C_1 R_2 = 6.741 \cdot 1.43 = 9.64$$

EJERCICIO 1.3.

Dado un controlador tipo PID de la forma:

$$C(s) = 0.383 (s + 71.31) \frac{(s + 0.1)}{s}$$

Indicar los valores de K_p , T_d , y T_i y calcular la expresión numérica de la respuesta de este controlador ante una entrada rampa unidad.

Regulador PID.

$$C(s) = K \cdot (s + a) \cdot \frac{(s + b)}{s} = K \left[\frac{s^2 + (a + b)s + ab}{s} \right]$$

$$C(s) = K \left[(a + b) + s + \frac{ab}{s} \right] = K(a + b) \left[1 + \frac{s}{(a + b)} + \frac{ab}{(a + b)} \cdot \frac{1}{s} \right]$$

Comparando con la expresión de un regulador PID:

$$C(s) = K_p \left[1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right]$$

Identificando los coeficientes:

$$K_p = K(a + b) = 0.383(71.31 + 0.1) = 27.35$$

$$T_d = \frac{1}{(a + b)} = \frac{1}{71.31 + 0.1} = 0.014$$

$$T_i = \frac{(a + b)}{ab} = \frac{71.31 + 0.1}{71.31 \cdot 0.1} = 10.014$$

Luego el PID será:

$$\text{PID} = 27.35 \left[1 + 0.014s + \frac{1}{10.014s} \right]$$

Cálculo de la respuesta del controlador PID ante una entrada rampa unitaria:

Al ser un sistema lineal tiempo invariante puede aplicarse superposición:

→ Proporcional: $g_p(t) = K_p \cdot t = 27.35t$

→ Derivativo: $g_d = T_d \frac{d}{dt} t = T_d = 0.014$

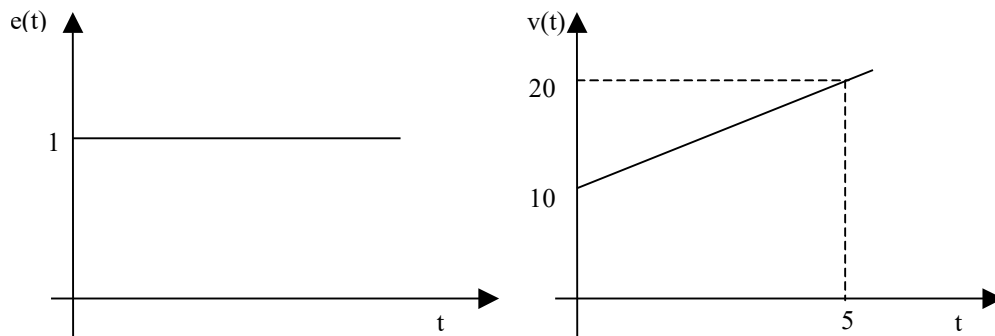
→ Integral: $g_i(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t t \, dt = \frac{1}{2T_i} t^2 = \frac{1}{2 \cdot 10.014} t^2 = 0.05 t^2$

Luego la respuesta total ante la entrada rampa es:

$$g_{\text{total}}(t) = g_p(t) + g_d(t) + g_i(t) = 27.35 t + 0.014 + 0.05 t^2$$

EJERCICIO 1.4.

La señal de error $e(t)$ alimenta un regulador. Las siguientes figuras muestran para una entrada $e(t)$ la respuesta $v(t)$ del regulador.



Calcular la función de transferencia de dicho regulador.

La entrada al regulador es: $e(t)=1$

Y aplicando la transformada de Laplace a la entrada: $E(s) = \frac{1}{s}$

La salida del regulador para esa entrada es: $v(t) = 10 + \frac{20-10}{5} t = 10 + 2t$

Y aplicando la transformada de Laplace: $V(s) = \frac{10}{s} + \frac{2}{s^2}$

La función de transferencia del regulador será:

$$\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{\frac{10}{s} + \frac{2}{s^2}}{\frac{1}{s}} = 10 + \frac{2}{s}$$

$$\boxed{\frac{V(s)}{E(s)} = 10 \left(1 + \frac{0.2}{s} \right)}$$

Reguladores Industriales.....	1
1.1. Introducción	1
1.2. CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA REALIMENTACIÓN	2
1.2.1. Variación de parámetros	2
1.2.2. Perturbaciones	4
1.2.3. Respuesta transitoria.....	5
1.2.4. Error en estado estacionario	6
1.2.5. Resumen de las principales características de los sistemas en lazo cerrado	6
1.3. Esquemas de compensación	7
1.4. Clasificación de los Reguladores Industriales	9
1.4.1. Control Todo-Nada.....	9
1.4.2. Control Proporcional	10
1.4.3. Control Integral.....	12
1.4.4. Control Proporcional – Integral y Redes de Retardo de Fase.....	14
1.4.5. Control Derivativo	15
1.4.6. Control Proporcional – Derivativo y Redes de Avance de Fase	16
1.4.7. Control Proporcional – Integral - Derivativo (PID) y Red de Avance-Retardo	18
1.5. Esquemas electrónicos de los reguladores.....	19
1.5.1. Regulador proporcional	19
1.5.2. Regulador integral	20
1.5.3. Regulador proporcional integral.....	21
1.5.3. Regulador proporcional derivativo	23
1.5.4. Regulador proporcional integral derivativo.....	24
1.5.5. Red de retardo de fase	26
1.5.6. Red de avance de fase.....	28
1.5.6. Red de avance-retardo de fase	30
1.6. Sintonización de reguladores.....	33
1.6.1. Ziegler-Nichols.....	33
1.6.2. Chindambara.....	35