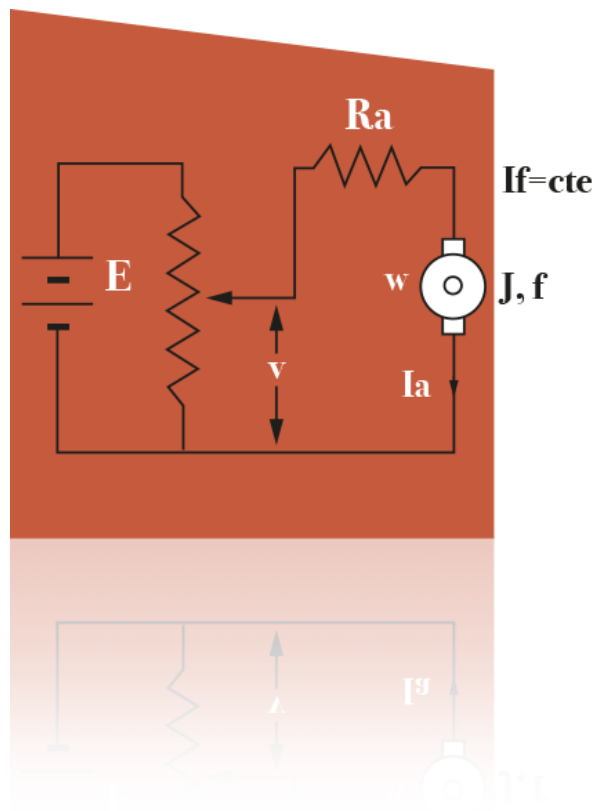


Automática II

3. Diseño de reguladores en frecuencia



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Carlos Torre Ferrero

Elías Revestido Herrero

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

3

Diseño de Reguladores en Frecuencia

3.1. INTRODUCCIÓN

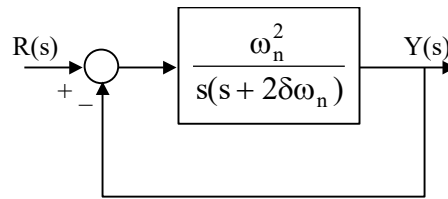
La técnica de diseño que presenta este capítulo constituye, junto con el lugar de las raíces y el ajuste de controladores tipo PID, uno de los procedimientos clásicos más ampliamente utilizados para la obtención de reguladores para los sistemas continuos de control.

Debe señalarse en este punto que los reguladores utilizados, preferentemente, en este procedimiento de diseño son las Redes de Avance, las Redes de Retardo y las Redes de Avance-Retardo, aunque también es común el diseño de reguladores tipo PI, PD, PID o, incluso, otros tipos de reguladores con una estructura no tan estándar. Todos los reguladores obtenidos pueden ser realizados mediante circuitos electrónicos y estarán compuestos de resistencias, condensadores, bobinas y amplificadores operacionales.

Es importante tener en cuenta que, aunque el diseño del regulador se realiza en el plano frecuencial (este tema se centrará en los diagramas de Bode), se hace siempre manteniendo presente una respuesta temporal deseada. Por este motivo, es muy conveniente que el lector revise las relaciones existentes entre la respuesta temporal y la respuesta frecuencial.

3.2. RELACIÓN FRECUENCIA-TIEMPO-LUGAR DE LAS RAÍCES

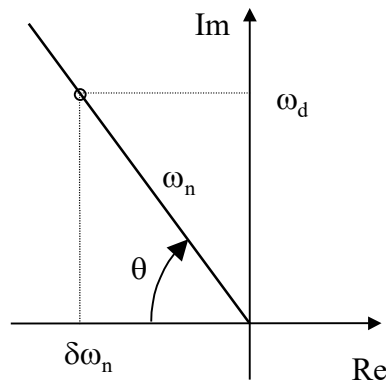
Suponiendo el sistema con realimentación unitaria mostrado en la siguiente figura:



Donde la función de transferencia de lazo cerrado viene dada por:

$$M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

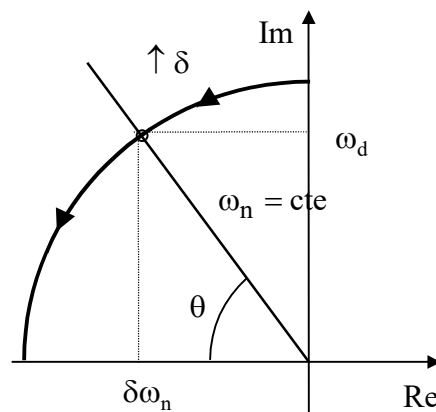
Se pueden representar los polos de lazo cerrado como:



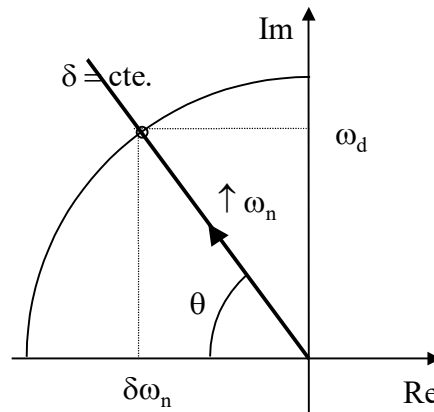
Suponiendo que el sistema en lazo cerrado disponga de un comportamiento similar a uno de segundo orden, por ser éstas las raíces más representativas.

$$\theta = \arccos \frac{\delta\omega_n}{\omega_n} = \arccos \delta \quad \delta = \cos \theta$$

Se sabe que si se mantiene constante el valor de ω_n y se varía el valor de δ , entonces la raíz se mueve dentro de una semicircunferencia:



Y se mantiene constante el valor de δ y se varía el valor de ω_n la raíz se mueve por una línea recta.



Además sabiendo que de la respuesta del sistema ante un escalón se tiene:

$$\text{Máximo sobreimpulso: } M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

$$\text{Tiempo de pico: } t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\text{Tiempo de subida: } t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

$$\text{Tiempo de asentamiento: } t_s = \frac{\pi}{\delta\omega_n}$$

Se puede deducir que:

- Fijando el amortiguamiento δ en un valor constante y aumentando la frecuencia natural ω_n , el tiempo de subida, pico y asentamiento disminuye.
- Fijando la frecuencia natural ω_n en un valor constante y aumentando el valor del amortiguamiento δ disminuye el tiempo de asentamiento y el máximo sobreimpulso. Pero aumenta el tiempo de pico y el tiempo de subida.

Analizando la respuesta frecuencial del sistema se tiene:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\delta\omega_n)}$$

El margen de fase del sistema será:

$$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega)_{\omega_{cg}}$$

El valor de ω_{cg} corresponde con el valor de la frecuencia para el que el sistema tiene ganancia 1:

$$1 = \frac{\omega_n^2}{\omega \sqrt{(2\delta\omega_n)^2 + \omega^2}} \quad \omega \sqrt{(2\delta\omega_n)^2 + \omega^2} = \omega_n^2$$

$$\omega^2 (4\delta^2 \omega_n^2 + \omega^2) = \omega_n^4 \quad 4\delta^2 \omega_n^2 \omega^2 + \omega^4 = \omega_n^4$$

$$\omega^4 + 4\delta^2 \omega_n^2 \omega^2 - \omega_n^4 = 0$$

Haciendo el cambio de variable $v = \omega^2$ queda:

$$v^2 + 4\delta^2 \omega_n^2 v - \omega_n^4 = 0$$

$$v = \frac{-4\delta^2 \omega_n^2 \pm \sqrt{(4\delta^2 \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^4}}{2} = -2\delta^2 \omega_n^2 \pm \sqrt{4\delta^4 \omega_n^4 + \omega_n^4} = -2\delta^2 \omega_n^2 \pm \omega_n^2 \sqrt{4\delta^4 + 1}$$

$$v = \omega_n^2 \left(-2\delta^2 \pm \sqrt{4\delta^4 + 1} \right)$$

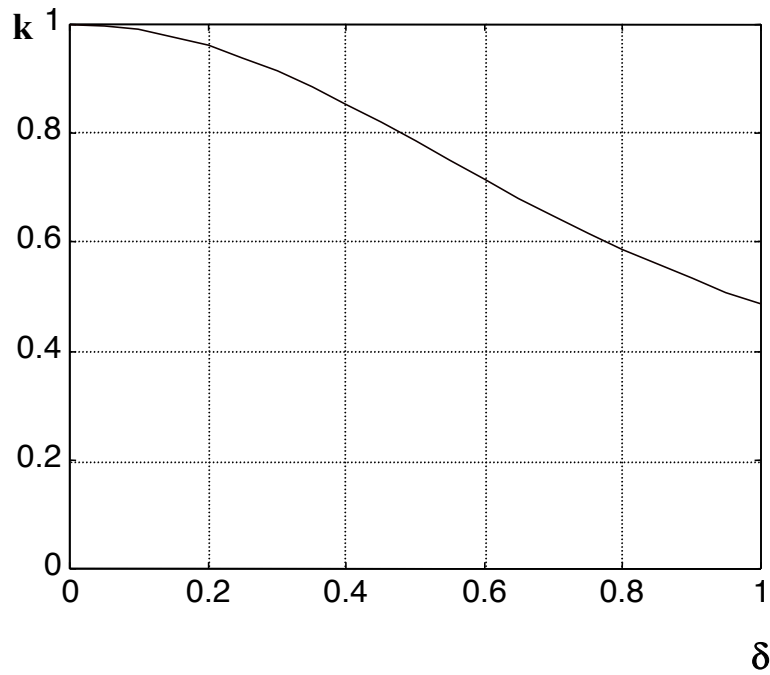
Deshaciendo el cambio y considerando que ω debe tomar valores reales:

$$\omega_{cg} = \sqrt{v} = \sqrt{\omega_n^2 (-2\delta^2 \pm \sqrt{4\delta^4 + 1})} = \omega_n \sqrt{-2\delta^2 \pm \sqrt{4\delta^4 + 1}} = \omega_n \cdot k$$

$$\text{donde: } k = \sqrt{-2\delta^2 \pm \sqrt{4\delta^4 + 1}}$$

Puede observarse que la frecuencia de corte de fase está relacionada con el amortiguamiento δ y la frecuencia natural ω_n .

La gráfica muestra la evolución de k cuando δ varía desde 0 hasta 1:



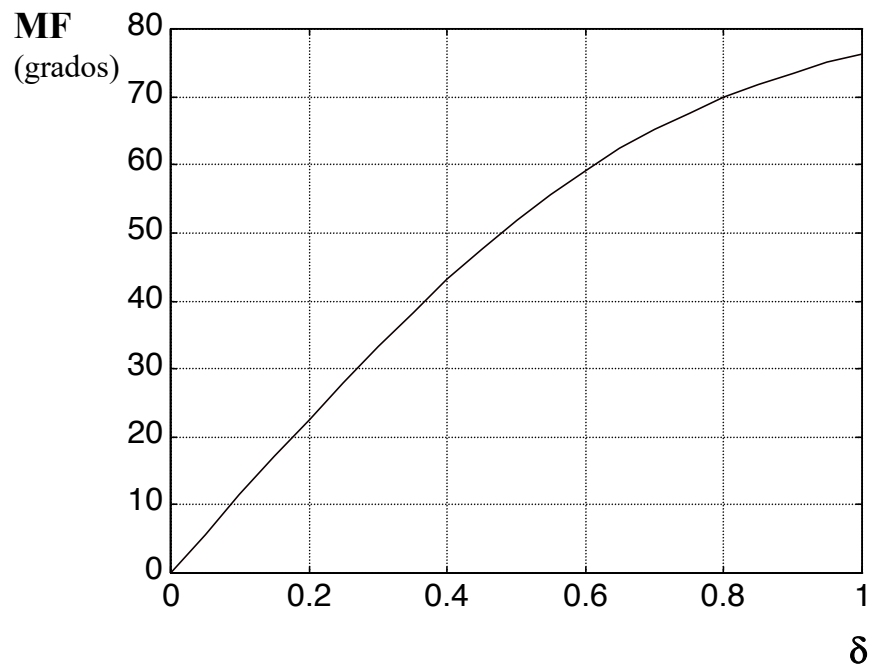
Para valores bajos de δ : $\omega_{cg} \approx \omega_n$ ya que k está próximo a 1.

Puede verse que para todo el rango de variación de δ el valor de k varía entre 1 y 0.5. Luego para un valor fijo del amortiguamiento δ la frecuencia de corte de ganancia es proporcional a la frecuencia natural del sistema.

$$\omega_{cg} = \omega_n k$$

$$\angle G(j\omega)_{\omega_{cg}} = -90 - \arctg \frac{\omega}{2\delta\omega_n} \Big|_{\omega=\omega_{cg}} = -90 - \arctg \frac{\omega_{cf}}{2\delta\omega_n} = -90 - \arctg \frac{\omega_n k}{2\delta\omega_n} = -90 - \arctg \frac{k}{2\delta}$$

$$MF = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \frac{k}{2\delta} = 90^\circ - \arctg \frac{k}{2\delta} = \arctg \frac{2\delta}{k}$$



Se comprueba que hasta $\delta = 0.6$ existe una relación de proporcionalidad de la forma:

$$MF \approx 100\delta$$

A partir de $\delta = 0.6$ se va perdiendo esta relación de proporcionalidad, con lo que también se va perdiendo la validez de esta aproximación.

Resumiendo:

$$\omega_{cg} = \omega_n k$$

$$MF \approx 100\delta$$

Al incrementar el margen de fase se incrementa el amortiguamiento, con lo que el sistema es más estable y disminuye el máximo sobreimpulso.

La frecuencia de corte de ganancia (corte con 0db) es proporcional a la frecuencia natural del sistema.

Luego cuando se realiza un controlador que aumenta el margen de fase se está consiguiendo un sistema con mayor amortiguamiento y, por tanto, más estable y con menor sobreimpulso.

Si mantiene el amortiguamiento (margen de fase) constante y aumenta la frecuencia de corte de ganancia, se aumenta la frecuencia natural del sistema, luego se hace el sistema más rápido (disminuyen los tiempos de subida, pico y asentamiento).

3.3. DIAGRAMAS DE BODE PARA SISTEMAS DE FASE NO MÍNIMA.

Un sistema que presenta todos sus polos y ceros en el semiplano izquierdo se denomina de fase mínima, mientras que un sistema que presenta algún polo o cero en el semiplano derecho

se denomina de fase no mínima.

Para un sistema de fase mínima se puede obtener la función de transferencia directamente de la curva de módulo, mientras que para un sistema de fase no mínima esto no es posible.

- Los sistemas de fase no mínima no cumplen la condición de que la fase a la que se estabiliza el sistema a altas frecuencias es -90° (n° polos - n° ceros).
- En cambio sí cumplen que la pendiente del módulo a altas frecuencias se estabiliza a -20 (n° polos - n° de ceros).

EJEMPLO 3.1.

Representar los diagramas de Bode para los tres sistemas siguientes:

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$G(s) = \frac{1}{2-s}$$

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

La primera función de transferencia corresponde con un sistema de fase mínima:

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega} = \frac{0.5}{1+\frac{j\omega}{2}}$$

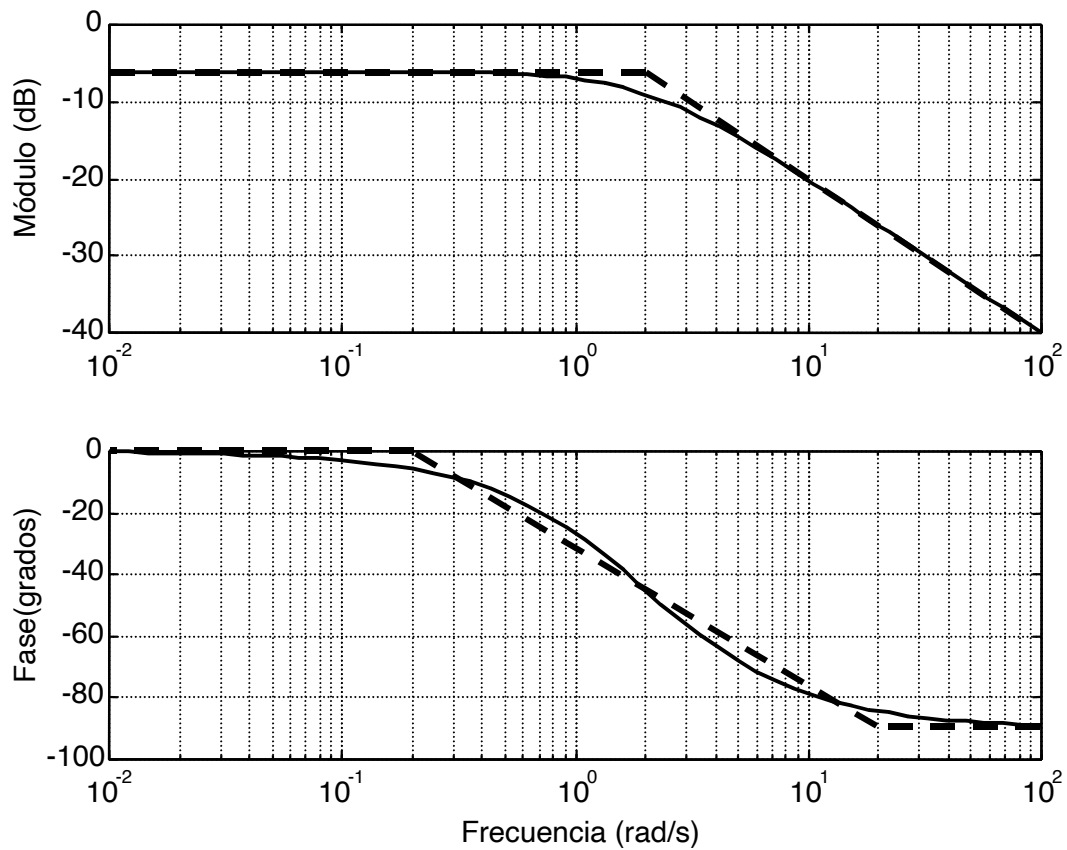
A continuación, se calcular las expresiones para el módulo y la fase en función de la frecuencia.

$$|G(j\omega)| = 20 \log \left(\frac{0.5}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}} \right)$$

$$|G(j\omega)| = 20 \log 0.5 - 20 \log \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctg \frac{\omega}{2}$$

Cuyos diagramas de Bode se representan en la siguiente figura.



Para la segunda función de transferencia se tiene un sistema de fase no mínima:

$$G(s) = \frac{1}{2-s}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{2-j\omega} = \frac{0.5}{1 - \frac{j\omega}{2}}$$

Calculando la expresión del módulo y la fase en función de la frecuencia queda:

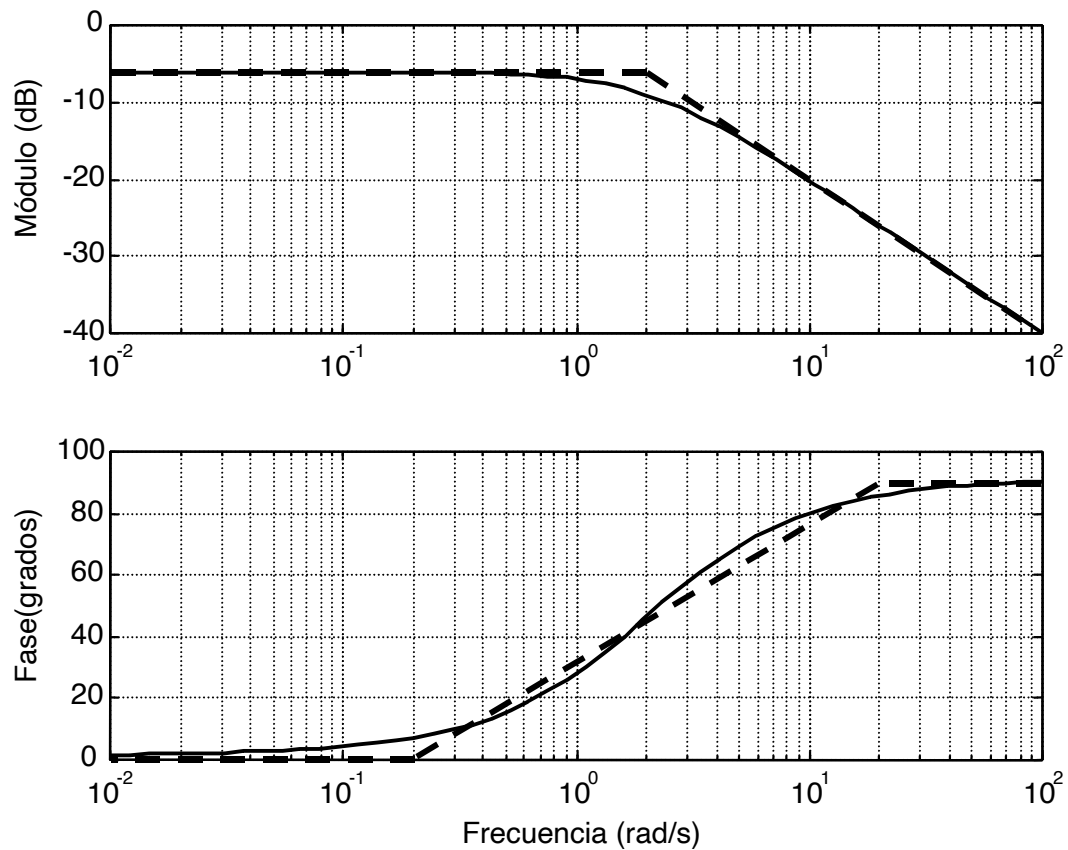
$$|G(j\omega)| = 20\log 0.5 - 20\log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctg\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \arctg \frac{\omega}{2}$$

Esta expresión para la fase coincide con la que tendría un cero de fase no mínima del mismo valor. Es decir, los polos de fase no mínima se comportan como ceros para la fase. Y lo mismo ocurre para los ceros de fase no mínima, que se comportan como polos.

Por tanto, cuando existe polos o ceros de fase no mínima, el diagrama del módulo es el mismo que para el sistema equivalente de fase mínima, pero en el diagrama de fase, los polos de fase mínima se comportarán como ceros y los ceros como polos.

Los diagramas de Bode se representan en la siguiente figura.



Y por último la tercera función de transferencia también corresponde con un sistema de fase mínima:

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

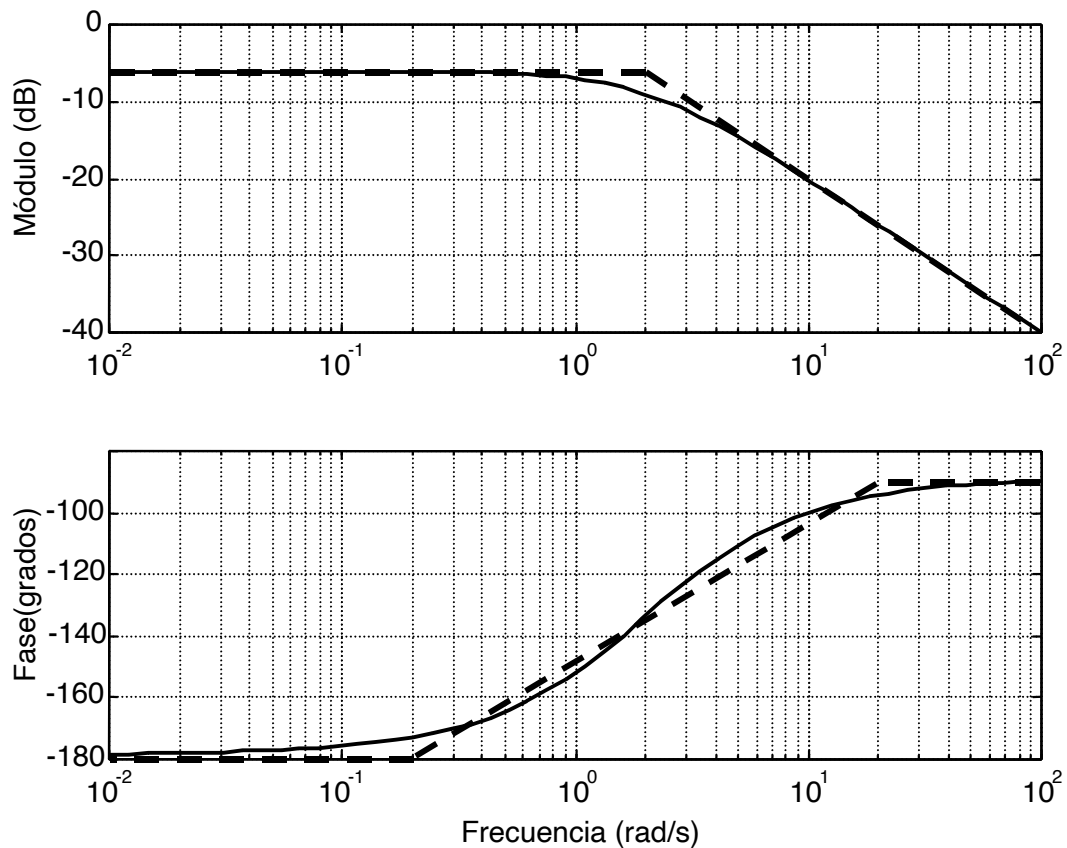
$$G(j\omega) = \frac{-1}{2-j\omega} = \frac{-0.5}{1-\frac{j\omega}{2}}$$

Calculando la expresión del módulo y la fase en función de la frecuencia queda:

$$|G(j\omega)| = 20\log 0.5 - 20\log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = -180^\circ - \arctg\left(-\frac{\omega}{2}\right) = -180^\circ + \arctg\frac{\omega}{2}$$

En la siguiente figura se representan los diagramas de Bode para el módulo y la fase de este sistema.



EJEMPLO 3.2.

Representar los diagramas de Bode para el sistema con la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{716} \frac{(s+272)(10-s)}{(s+1)(s+0.2)}$$

$$G(s) = \frac{272 \cdot 10}{716 \cdot 0.2} \frac{\left(\frac{s}{272} + 1\right) \left(1 - \frac{s}{10}\right)}{(s+1) \left(\frac{s}{0.2} + 1\right)}$$

$$G(s) = \frac{19 \left(1 + \frac{s}{272}\right) \left(1 - \frac{s}{10}\right)}{(1+s) \left(1 + \frac{s}{0.2}\right)}$$

$$G(j\omega) = \frac{19 \left(1 + \frac{j\omega}{272}\right) \left(1 - \frac{j\omega}{10}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{0.2}\right)}$$

Para el diagrama del módulo las pendientes serán:

Término	$\left(1 + \frac{j\omega}{0.2}\right)^{-1}$	$\left(1 + \frac{j\omega}{1}\right)^{-1}$	$\left(1 - \frac{j\omega}{10}\right)$	$\left(1 + \frac{j\omega}{272}\right)$	Pendiente acum.
(0.01 , 0.2]	0	0	0	0	0
[0.2 , 1]	-20	0	0	0	-20
[1 , 10]	-20	-20	0	0	-40
[10 , 272]	-20	-20	+20	0	-20
[272 , ∞)	-20	-20	+20	+20	0

Amplitud en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$A(\omega \leq 0.2) = 20 \log 19 = 25.575 \text{dB}$$

$$A(\omega = 1 \text{rad/seg}) = 25.575 - 20 \log \frac{1}{0.2} = 25.575 - 13.9794 = 11.5956 \text{dB}$$

$$A(\omega = 10 \text{rad/seg}) = 11.5956 - 40 \log \frac{10}{1} = 11.5956 - 40 = -28.4044 \text{dB}$$

$$A(\omega \geq 272 \text{rad/seg}) = -28.4044 - 20 \log \frac{272}{10} = -28.4044 - 28.6914 = -57.0958 \text{dB}$$

Para el diagrama de fase las pendientes serán:

El sistema es de fase no mínima, por tanto, para la fase el cero en $1 - j\omega / 10$ se comporta como un polo.

Término	$\left(1 + \frac{j\omega}{0.2}\right)^{-1}$	$\left(1 + \frac{j\omega}{1}\right)^{-1}$	$\left(1 - \frac{j\omega}{10}\right)$	$\left(1 + \frac{j\omega}{272}\right)$	Pendiente acum.
(0.01 , 0.02]	0	0	0	0	0
[0.02 , 0.1]	-45	0	0	0	-45
[0.1 , 1]	-45	-45	0	0	-90
[1 , 2]	-45	-45	-45	0	-135
[2 , 10]	0	-45	-45	0	-90
[10 , 27.2]	0	0	-45	0	-45
[27.2 , 100]	0	0	-45	+45	0
[100 , 2720]	0	0	0	+45	+45
[2720 , ∞)	0	0	0	0	0

Fase en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$\varphi(\omega \leq 0.02 \text{ rad/seg}) = 0^\circ$$

$$\varphi(\omega = 0.1 \text{ rad/seg}) = -45 \log \frac{0.1}{0.02} = -31.4537^\circ$$

$$\varphi(\omega = 1 \text{ rad/seg}) = -31.4537 - 90 \log \frac{1}{0.1} = -31.4537 - 90 = -121.4537^\circ$$

$$\varphi(\omega = 2 \text{ rad/seg}) = -121.4537 - 135 \log \frac{2}{1} = -121.4537 - 40.6390 = -162.0927^\circ$$

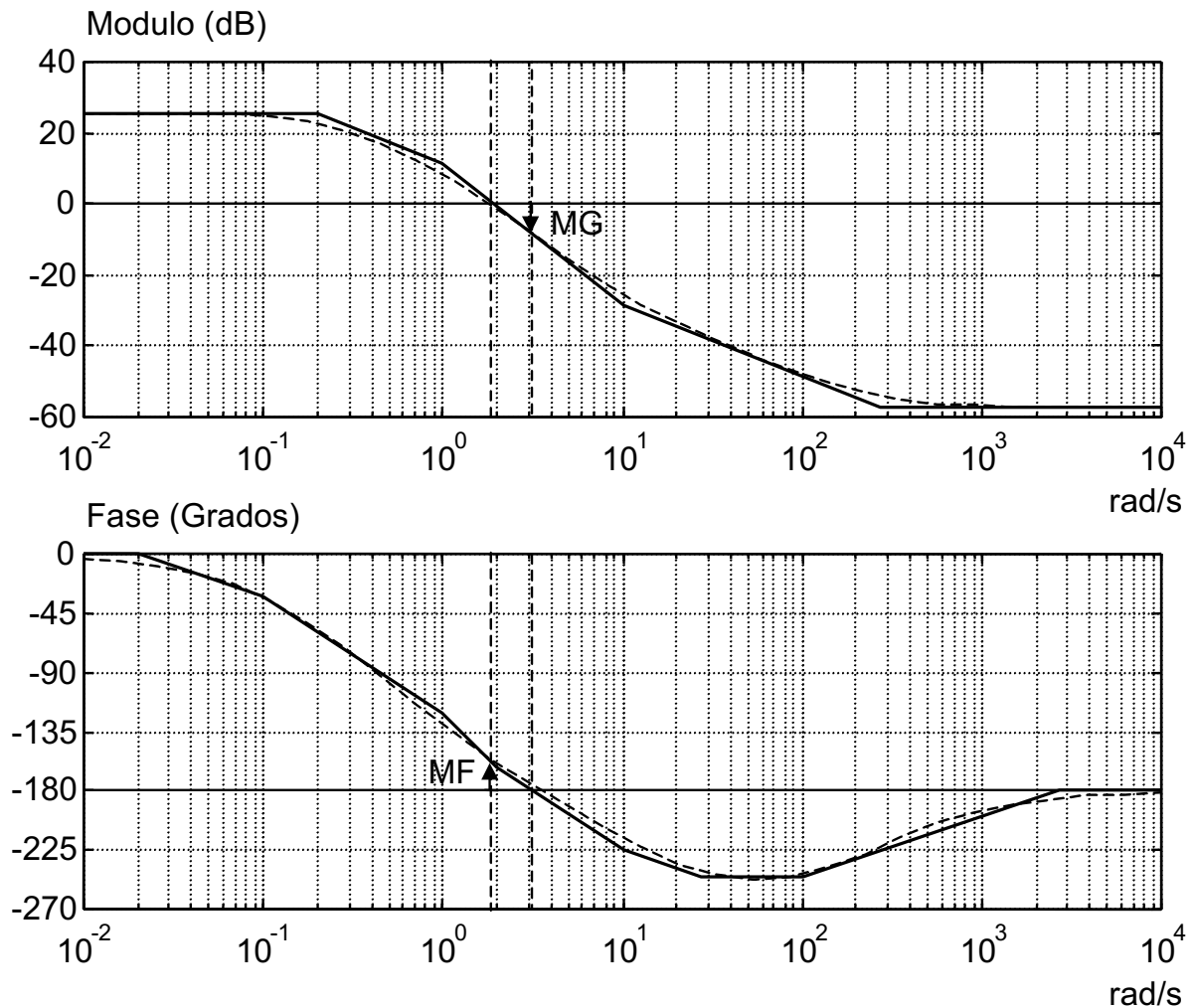
$$\varphi(\omega = 10 \text{ rad/seg}) = -162.0927 - 90 \log \frac{10}{2} = -162.0927 - 62.9073 = -225^\circ$$

$$\varphi(\omega = 27.2 \text{ rad/seg}) = -225 - 45 \log \frac{27.2}{10} = -225 - 19.5556 = -244.5556^\circ$$

$$\varphi(\omega = 100 \text{ rad/seg}) = -244.5556^\circ$$

$$\varphi(\omega = 2720 \text{ rad/seg}) = -244.5556 + 45 \log \frac{2720}{100} = -244.5556 + 64.5556 = -180^\circ$$

La figura muestra la representación de los diagramas de Bode asintóticos en línea continua y la correspondiente a los diagramas de Bode reales en línea discontinua.



3.4. COMPENSACION POR AVANCE DE FASE

3.4.1. Forma de la red de avance de fase.

La función de transferencia de una red de compensación de avance de fase es:

$$D(s) = \frac{1/T + s}{1/\alpha T + s}$$

que puede escribirse también como:

$$D(s) = \alpha \frac{1 + T \cdot s}{1 + \alpha T \cdot s}$$

Es importante tener en cuenta que en este caso $\alpha \leq 1$.

Se puede observar que esta red está formada por un cero y un polo, siendo la magnitud del polo, en valor absoluto, mayor que la del cero, y que presenta una ganancia (atenuación) en estado estacionario de valor α .

Para cualquier diseño, esta red irá acompañada por un amplificador de ganancia K , que permitirá variar el comportamiento de la red.

Se comprueba, además, que la función de transferencia de la red de avance de fase tiene la misma forma que la que se vio al realizar la compensación por el lugar de las raíces:

$$D(s) = K \frac{s + a}{s + b}$$

Sólo que se ha sustituido $1/T$ por a y $1/\alpha T$ por b .

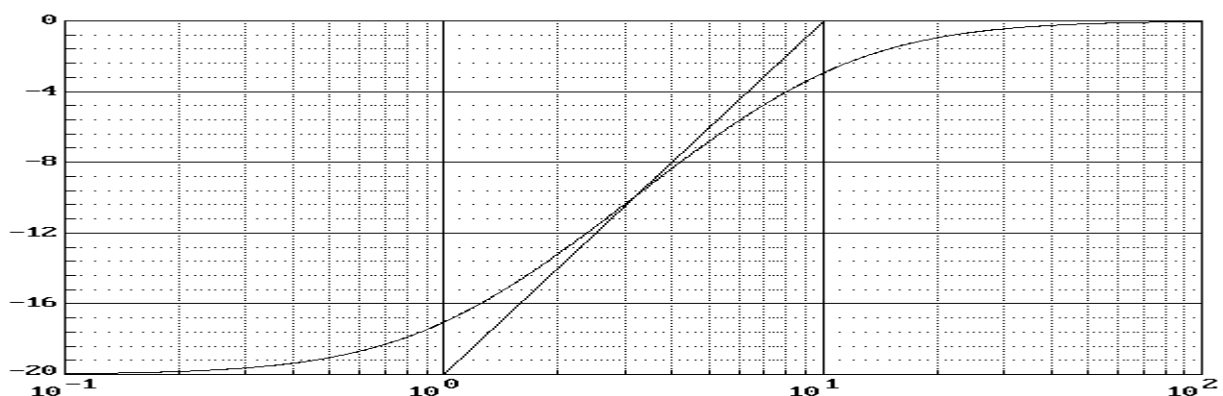
Veamos cómo es la respuesta en frecuencia de esta red, sin el amplificador añadido.

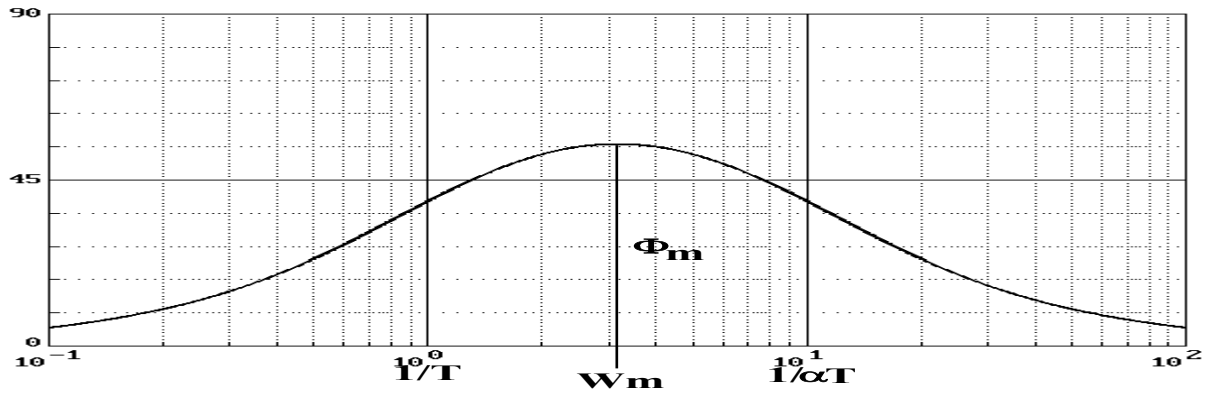
En la gráfica siguiente se observa la respuesta para la red:

$$D(s) = \frac{s + 1}{s + 10} = 0.1 \frac{s + 1}{0.1s + 1}$$

Para bajas frecuencias (cuando ω tiende a cero) la ganancia es α (0.1 para este caso), que si es expresado en decibelios (dB):

$$A = 20 \log(\alpha)$$





w_m : Frecuencia intermedia.
 Φ_m : Avance de fase máximo.

Como el valor de α va a ser siempre menor que la unidad, se comportará como una atenuación y aparecerá en el diagrama de Bode por lo tanto por debajo de la línea de 0 dB de magnitud, y puede ser tan grande como se quiera, en función del valor de α , y por lo tanto de la separación entre el polo y el cero.

Así mismo, se observa que para altas frecuencias (w tiende a infinito) la ganancia es la unidad (0 dB). Con lo cual, se observa que la Red de Avance de Fase tiene el mismo funcionamiento que un filtro paso alto.

En cuanto a la fase, se observa que esta red produce un adelanto de fase (motivo por el cual recibe el nombre de red de avance de fase), debido a que la frecuencia esquina del cero está situada antes que la del polo, tomando el valor máximo de avance (Φ_m) a la frecuencia intermedia de la red (w_m).

3.4.2. Cálculo de los parámetros para definición de la red

En la figura anterior se pueden ver estos parámetros gráficamente. Como se puede comprobar, para definir en el espacio de frecuencia el comportamiento (forma) y la posición la red, es necesario definir la frecuencia intermedia de la red (w_m), el avance de fase máximo (Φ_m) y la ganancia de la red o módulo (M). A continuación, se analiza el comportamiento de estos tres parámetros para la red de avance, en función de la frecuencia.

a) Frecuencia intermedia (w_m).

Es el valor intermedio entre la frecuencia del cero y la del polo:

$$\log(w_m) = \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{1}{T}\right) + \log\left(\frac{1}{\alpha T}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{1}{\alpha T^2}\right) \right] = \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha} T}\right)$$

$$w_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

b) Fase aportada por la red en el punto máximo (Φ_m):

El ángulo de fase aportado por la red, de forma general, es de la forma siguiente:

$$\Phi = \arctg(wT) - \arctg(w\alpha T)$$

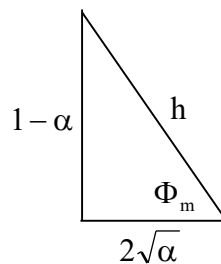
Tomando ahora la tangente de la expresión anterior:

$$\operatorname{tg}(\Phi) = \frac{wT - w\alpha T}{1 + wT \cdot w\alpha T}$$

Y, para la frecuencia intermedia:

$$\operatorname{tg}(\Phi_m) = \frac{\frac{T}{T\sqrt{\alpha}} - \frac{\alpha T}{T\sqrt{\alpha}}}{1 + \frac{T}{T\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{T\alpha}{T\sqrt{\alpha}}} = \frac{1 - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}$$

Representando gráficamente el valor de la tangente obtenido:



Se puede escribir:

$$h = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 4\alpha} = \sqrt{(1 + \alpha)^2} = (1 + \alpha) \text{ Luego:}$$

$$\boxed{\operatorname{Sen}(\Phi_m) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}}$$

Esta expresión proporciona una relación entre la fase de la red para la frecuencia intermedia de la curva real y la separación entre el polo y el cero de la misma. Si, en lugar de las curvas reales, se desea utilizar el trazado asintótico, la fase se puede escribir como:

$$\begin{aligned} 45^\circ & \text{-----} \log 10 \\ \Phi_m & \text{-----} \log\left(\frac{0.1}{\alpha T}\right) - \log\left(\frac{0.1}{T}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi_m = 45^\circ \cdot \log\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

c) Ganancia de la red.

Tanto en la respuesta en frecuencia de la red, como en la función de transferencia, se observa que la ganancia para bajas frecuencias es igual a α , que, escrito en decibelios es:

$$M_{w \rightarrow 0} = 20 \log(\alpha)$$

Por el contrario, para altas frecuencias la ganancia, o módulo de la red, tiende a la unidad.

Realizando ahora el análisis del módulo a partir de las curvas reales:

$$M = \alpha \cdot \frac{\sqrt{1 + T^2 w^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2 T^2 w^2}}$$

Para bajas frecuencias: $M_{w \rightarrow 0} = \alpha$ y en dB: $A_{w \rightarrow 0} = 20 \log(\alpha)$

Para altas frecuencias: $M_{w \rightarrow \infty} = 1$ y en dB: $A_{w \rightarrow \infty} = 20 \log(1) = 0$

Donde se ha denominado como A, a la amplitud del módulo en decibelios.

Y para la frecuencia intermedia:

$$M_{w=w_m} = \alpha \cdot \frac{\sqrt{1 + T^2 \left(\frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \right)^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2 T^2 \left(\frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \right)^2}} = \alpha \cdot \frac{\sqrt{\frac{\alpha + 1}{\alpha}}}{\sqrt{1 + \alpha}} = \sqrt{\alpha}$$

Que expresado en decibelios queda de la forma siguiente:

$$M_{w=w_m} = 20 \log(\sqrt{\alpha}) = 10 \log(\alpha)$$

3.4.3. Utilización de la Red de Avance de Fase

Esta red, tal y como se puede observar en su respuesta frecuencial, produce en módulo una atenuación para las bajas frecuencias y una ganancia unidad para las altas, actuando como un filtro paso alto. Respecto a la fase, produce un adelanto, o avance, que será muy útil para mejorar la estabilidad del sistema completo.

Los parámetros a tener en cuenta a la hora de realizar el diseño en frecuencia son:

- Frecuencia de corte de ganancia:
Relacionada con el ancho de banda, tiempo de subida y tiempo de asentamiento.
- Margen de Fase:
Relacionado con el amortiguamiento, y por lo tanto con el Mp.
- Ganancia a Baja frecuencia:
Relacionada con el error en estado estacionario.

Observando las características de esta red, se puede utilizar de los siguientes modos:

Modo 1: Control del Margen de Fase y del Error en Régimen Permanente

La mayoría de las aplicaciones de las redes de avance de fase trabajan en este modo. Permite aumentar la estabilidad del sistema, mediante la utilización del avance de fase para el incremento de su margen de fase, y reducir el error en estado estacionario (dentro del mismo tipo) a través de la ganancia. Presenta, sin embargo, el problema de que no permite controlar la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}), con lo que no es posible ajustar la velocidad de respuesta del sistema resultante.

La idea, en este modo de funcionamiento, es que la red aporte la fase necesaria en la w_{cg} del sistema sin compensar para obtener el margen de fase deseado (es decir, pegar la curva de fase de la red sobre la del sistema). En este modo de funcionamiento, el módulo proporcionado por la red a bajas frecuencias (atenuación) es una molestia.

En este modo de operación, se da por supuesto que parte de la ganancia (K) del amplificador que se incluye con la red de avance, va a hacer que la ganancia en estado estacionario (frecuencia cero) de la red sea la unidad, de esta forma la curva del módulo queda por encima de los cero decibelios.

Procedimiento de Cálculo:

- 1- Calcular la ganancia K para satisfacer las condiciones de error estacionario.
- 2- Trazar Bode con este valor de ganancia.
- 3- Calcular ángulo de fase a aportar por la red: $\Phi_m = \theta_1 - \theta_2 + \theta_3$
 $\theta_1 = MF_{deseado} \quad \theta_2 = MF_{actual} \quad \theta_3 = \text{coef. seguridad}$
- 4- Calcular el parámetro α a partir de Φ_m , y la ganancia en w_m (la denominaremos K_r).
- 5- Observar cuál es la nueva frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}') y dar este valor a w_m .
- 6- Calcular el parámetro T .
- 7- Aplicar amplificación para ganancia unidad de la red en estado estacionario.

En este procedimiento se observa que es necesario cambiar (ajustar) el valor de w_m para que coincida con la nueva frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}'). Esto se debe a que al introducir la red de avance de fase, ajustada mediante un amplificador para tener ganancia de cero decibelios en las bajas frecuencias, en el punto en que se produce el máximo avance de la fase, la red introduce también una amplitud de valor $\frac{1}{2}$ de la amplitud total para altas frecuencias. Debido a esto, la nueva frecuencia de corte de ganancia se debe situar donde el sistema inicial presenta una atenuación igual a $\frac{1}{2}$ de la amplitud total que introduce la red. De esta forma la respuesta en lazo abierto del sistema con compensador pasará por los 0dB a dicha frecuencia.

En la práctica, no es recomendable utilizar una única red de avance de fase para obtener avances mayores de 65° - 70° . Si el ángulo que debe aportar la red está por encima de este valor, el valor que tomaría α sería muy pequeño, y esto requeriría un valor de ganancia adicional excesivo. Por tanto, no deben usarse valores de α menores de 0.05 o lo que es lo mismo, que una única red no debe aportar más de 65° . En caso de necesidad de avances mayores se deben usar dos o más redes de avance en serie.

En el procedimiento indicado para el modo de funcionamiento anterior, se observa que es necesario introducir un coeficiente de seguridad (θ_3). Esto se debe a que, si la fase del sistema

inicial disminuye muy pronunciadamente en la zona de la frecuencia crítica de ganancia, hace que al moverse dicha frecuencia hacia la derecha, el margen de fase sin compensador sea mucho menor, con lo que el adelanto de fase calculado no sería suficiente. Se incluye un coeficiente de seguridad para corregir este efecto, en la medida de lo posible, cuando la pendiente de la fase no es demasiado elevada.

Modo 2: Control del Margen de Fase y de la Frecuencia de Cruce de Ganancia

Este modo de aplicación de la red de avance permite controlar (normalmente interesa aumentar) la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}), y hacer, por lo tanto al sistema más rápido. Además, permite controlar (aumentar) el margen de fase del sistema, mediante la fase aportada por la red. Sin embargo, presenta el inconveniente de que no permite controlar el valor del error en régimen permanente.

La idea es incrementar la ganancia (K) del amplificador hasta llegar a la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}) deseada y, posteriormente, situar la red para corregir el margen de fase. Es necesario tener en cuenta que, normalmente, al incrementar la ganancia (K) la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}) se desplaza a la derecha (valores mayores), y disminuye el margen de fase. Así, la red debe situarse de forma de obtener el margen de fase deseado y tratando de no modificar frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}), la cual aumentará un poco debido a la ganancia de la red. Se puede comprobar como, en este caso, el modulo aportado por la red es, en cierto modo, una molestia ya que modifica un poco la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}) deseada.

En este modo, se da también por supuesto que parte de la ganancia (K) del amplificador se utilizará para hacer que la ganancia en estado estacionario (frecuencia cero) de la red sea la unidad. Así, se consigue que la curva del módulo de la red quede por encima de los cero decibelios para todo valor de frecuencia y, así, no se modifica la curva del módulo del sistema hasta llegar al cero de la red.

Procedimiento de Cálculo:

- 1- Ajustar la ganancia (K) para obtener la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}) deseada.
- 2- Realizar los pasos 2 al 7 del caso anterior.

Modo 3: Control de Frecuencia de Cruce de Ganancia y Error en Estado Estacionario.

Este modo de operación permite ajustar (normalmente aumentar) la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}) y el error en régimen permanente (reducir). Sin embargo, no permite controlar el valor del margen de fase con lo cual pueden resultar diseños que provoquen inestabilidad en el sistema.

La idea es incrementar la ganancia del amplificador (K) hasta obtener el error en régimen permanente deseado y, posteriormente, aprovechar la modificación que produce la red en el módulo para conseguir ajustar (aumentar) la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}). La red se podría situar en el diagrama de frecuencias muy a la derecha (a muy alta frecuencia), ya que la idea es utilizar sólo el módulo, pero puede ser interesante situarla a más bajas frecuencias para tratar de aprovechar el avance de fase de la red (si interesa).

En este modo, también da por supuesto que parte de la ganancia del amplificador (K) se utilizará para hacer que la ganancia en estado estacionario de la red sea la unidad. De esta forma la curva del módulo de la red queda por encima de los cero decibelios, y así no se modifica la curva del módulo subida por la ganancia del amplificador.

Procedimiento de Cálculo:

- 1- Calcular la ganancia K para satisfacer el error deseado, y dibujar el diagrama de Bode.
- 2- Situar la red de avance, teniendo en cuenta:
 - El cero debe estar situado a la izquierda de la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}) sin compensar. Así el módulo no pasa a la zona negativa.
 - Calcular el parámetro α a partir de la observación de la ganancia necesaria para ajustar el módulo de forma que pase por los cero decibelios en el valor de frecuencia correspondiente a la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}) deseada.
 - Cuanto más cercana esté la red a la nueva frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}) mayor será el margen de fase y, por lo tanto, más estable.
 - Cuanto mayor sea la pendiente del sistema sin compensar, menor será la modificación de la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}), con una sola red.

3.5. COMPENSACION POR RETARDO DE FASE

3.5.1. Forma de la red de retardo de fase.

La función de transferencia de una red de compensación por retardo de fase es la siguiente:

$$D(s) = \frac{1}{\beta} \frac{\frac{1}{T} + s}{\frac{1}{\beta T} + s}$$

ó

$$D(s) = \frac{1 + T \cdot s}{1 + \beta T \cdot s}$$

Es importante tener en cuenta que en este caso $\beta > 1$.

Se puede observar que esta red está formada, al igual que en el caso de la red de avance, por un cero y un polo, siendo en este caso la magnitud del polo, en valor absoluto, menor que la del cero.

Se observa así mismo la ganancia de esta red para el estado estacionario es la unidad, lo que no ocurriría con la de avance.

Para cualquier diseño, esta red irá acompañada por un amplificador de ganancia K, que permitirá variar el comportamiento de la red.

Se comprueba, además, que la función de transferencia de la red de atraso de fase tiene la misma forma que la que se observó al realizar la compensación por el lugar de las raíces:

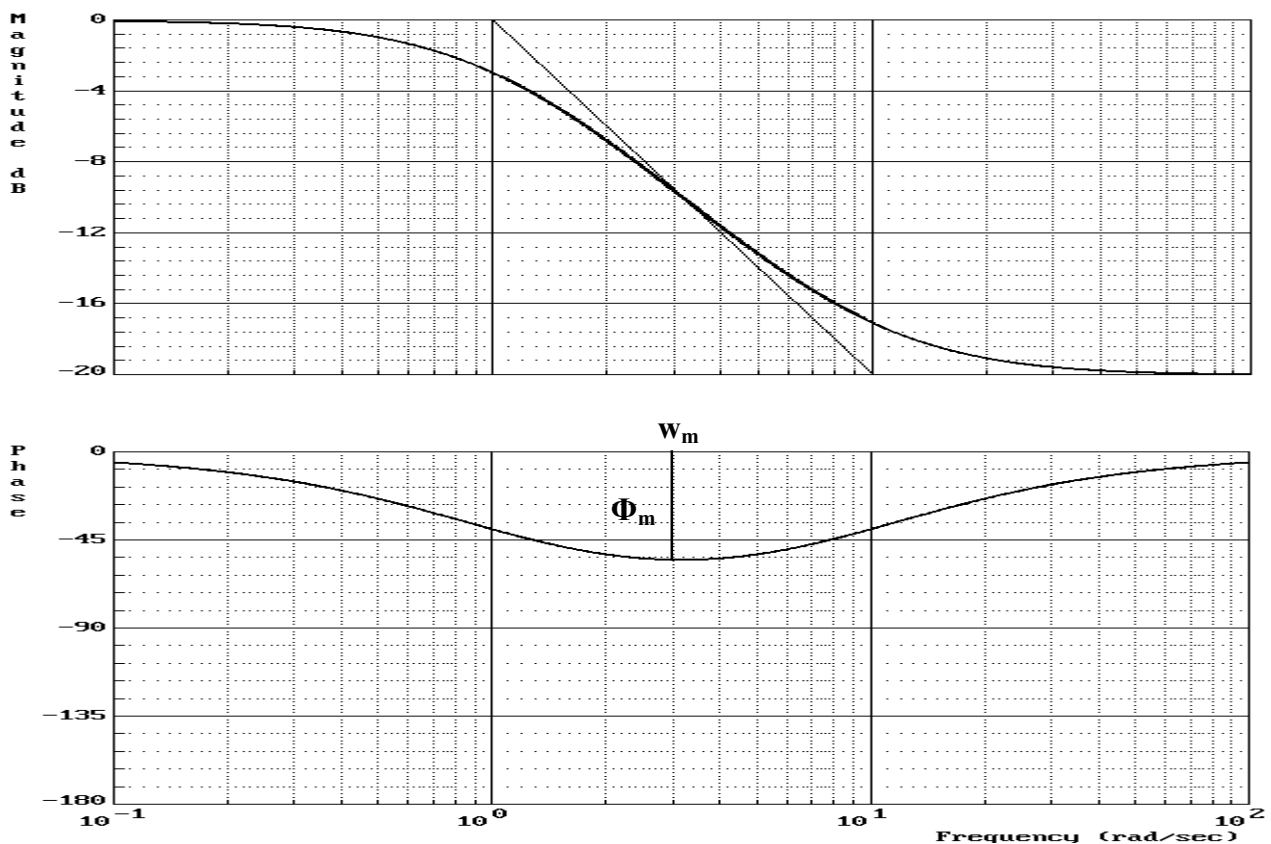
$$D(s) = K \frac{s+a}{s+b}$$

Sólo que se ha sustituido $1/T$ por a y $1/\beta T$ por b .

Se presenta, a continuación, la forma que toma la respuesta en frecuencia de esta red, sin el amplificador añadido.

En la gráfica siguiente se observa la respuesta para la red:

$$D(s) = \frac{1}{10} \frac{s+10}{s+1} = \frac{0.1s+1}{s+1}$$



donde:

w_m : Frecuencia intermedia.

Φ_m : Retraso de fase máximo.

Para bajas frecuencias (cuando w tiende a cero) la ganancia es igual a la unidad, por eso la respuesta en frecuencia toma el valor cero para bajas frecuencias.

Por el contrario, para altas frecuencias (w tiende a infinito), presenta una ganancia $1/\beta$. Es decir, como β es mayor que la unidad, su inversa es menor que esta y por lo tanto será una atenuación para las altas frecuencias, que tomará el valor siguiente en decibelios:

$$A = 20 \log \left(\frac{1}{\beta} \right)$$

Se comprueba, por lo tanto, que el comportamiento en módulo de la red de Retardo de Fase presenta el mismo funcionamiento que un filtro paso bajo.

En cuanto a la fase, se observa que esta red produce un desfase negativo, o atraso de fase (motivo por el que recibe el nombre de red de retardo de fase), debido a que la frecuencia esquina del polo está situada antes que la del cero, tomando el valor mínimo (Φ_m) a la frecuencia intermedia de la red (w_m).

3.5.2. Cálculo de los parámetros para definición de la red

En la figura anterior se pueden ver estos parámetros gráficamente. Como se puede comprobar, para definir en el espacio de frecuencia el comportamiento (forma) y la posición la red, es necesario definir la frecuencia intermedia de la red (w_m), el retardo de fase máximo (Φ_m) y la ganancia de la red o módulo (M). A continuación, se analiza el comportamiento de estos tres parámetros para la red de retardo, en función de la frecuencia.

a) Frecuencia intermedia (w_m):

Es el valor intermedio entre la frecuencia del polo y el cero:

$$\log(w_m) = \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{1}{T}\right) + \log\left(\frac{1}{\beta T}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{1}{\beta T^2}\right) \right] = \log\left(\frac{1}{\sqrt{\beta} T}\right)$$

$$w_m = \frac{1}{T\sqrt{\beta}}$$

b) Fase aportada por la red en el punto mínimo (Φ_m):

La fase de la red, de forma general, es la siguiente:

$$\Phi = \arctg(wT) - \arctg(w\beta T)$$

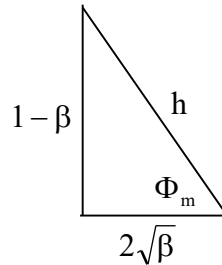
Tomando la tangente de la expresión anterior:

$$\operatorname{tg}(\Phi) = \frac{wT - w\beta T}{1 + wTw\beta T}$$

Y, para la frecuencia intermedia (w_m):

$$\operatorname{tg}(\Phi_m) = \frac{\frac{T}{T\sqrt{\beta}} - \frac{\beta T}{T\sqrt{\beta}}}{1 + \frac{T}{T\sqrt{\beta}} \cdot \frac{T\beta}{T\sqrt{\beta}}} = \frac{1-\beta}{2\sqrt{\beta}}$$

Representando esta tangente de forma gráfica, se puede dibujar:



Con lo cual, se puede escribir:

$$h = \sqrt{(1-\beta)^2 + 2\beta} = \sqrt{(1+\beta)^2} = (1+\beta)$$

Luego:

$$\boxed{\operatorname{Sen}(\Phi_m) = \frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Esta expresión relaciona la fase máxima (retraso en este caso) que proporciona la red, en la frecuencia intermedia de la curva real, en función del factor de separación entre el polo y el cero de la red (β).

Si se desea utilizar el trazado asintótico la fase en la frecuencia intermedia se puede obtener mediante una sencilla regla de tres:

$$45^\circ \text{ ----- } \log_{10}$$

$$\Phi_m^\circ \text{ ----- } \log\left(\frac{0.1}{\beta T}\right) - \log\left(\frac{0.1}{T}\right)$$

$$\boxed{\Phi_m = 45 \log\left(\frac{1}{\beta}\right)}$$

b) Ganancia de la red.

Tanto en la respuesta frecuencial de la red, como en su función de transferencia, se observa que presenta una ganancia para bajas frecuencias igual a la unidad, o cero decibelios, mientras que para altas frecuencias, tiende a $1/\beta$, ó expresado en decibelios:

$$A_{w \rightarrow \infty} = 20 \log \left(\frac{1}{\beta} \right)$$

Donde se ha denominado A, a la ganancia de la red en decibelios.

A partir de las curvas reales se puede escribir el valor del módulo como:

$$M = \frac{\sqrt{1 + T^2 w^2}}{\sqrt{1 + \beta^2 T^2 w^2}}$$

Para bajas frecuencias: $M_{w \rightarrow 0} = 0$ y en dBs: $A_{w \rightarrow 0} = 20 \log(1) = 0$

Para altas frecuencias: $M_{w \rightarrow \infty} = 1/\beta$ y en dBs: $A_{w \rightarrow \infty} = 20 \log(1/\beta)$

Y, para la frecuencia intermedia (w_m):

$$M_{w=w_m} = \frac{\sqrt{1 + T^2 \left(\frac{1}{T\sqrt{\beta}} \right)^2}}{\sqrt{1 + \beta^2 T^2 \left(\frac{1}{T\sqrt{\beta}} \right)^2}} = \frac{\sqrt{\frac{\beta+1}{\beta}}}{\sqrt{1+\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

Lo cual, expresado en decibelios es:

$$A_{w=w_m} = 20 \log(1/\sqrt{\beta}) = 10 \log(1/\beta)$$

3.5.3. Utilización de la Red de Retardo de Fase

En cuanto al comportamiento en módulo, esta red produce una atenuación para las altas frecuencias y una ganancia unidad para las bajas, de forma que actúa como un filtro paso bajo. Respecto a la fase, produce un retardo que, en principio, no va a ser nada interesante ya que tenderá a reducir el margen de fase del sistema y, por lo tanto, a llevar al sistema a la inestabilidad.

Los parámetros a tener en cuenta a la hora de realizar el diseño en frecuencia son:

- Frecuencia de corte de ganancia:
Relacionada con el ancho de banda, tiempo de subida y tiempo de asentamiento.
- Margen de Fase:
Relacionado con el amortiguamiento, y por lo tanto con el máximo sobreimpulso.
- Ganancia a Baja frecuencia:
Relacionada con el error en estado estacionario.

Observando las características de esta red, es posible emplearla de los siguientes modos:

Modo 1: Control del Margen de Fase y del Error en Régimen Permanente

Este modo de aplicación de la red de retardo es la más ampliamente utilizada. Se suele usar cuando se desea un margen de fase que no es posible obtener mediante una red de avance de fase (por ejemplo, cuando el sistema es inestable por tener un margen de fase negativo y para llevarlo a un valor determinado hacen falta más de 65°). En estos casos se utiliza la atenuación de la red de retardo para bajar la curva de módulo, reducir así la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}) y llevar a esta a una zona de mayor margen de fase.

En este modo de utilización, sólo interesa de la red de retardo la curva de módulo, y el retraso de fase que produce es una molestia. Por este motivo, se sitúa la red en un lugar donde el módulo actúe y la fase negativa de esta red no tenga gran efecto sobre la fase del sistema total, esto es, al menos una década por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}).

Método de Cálculo:

- 1-Calcular la ganancia (K) para satisfacer las condiciones de error estacionario.
- 2-Trazar Bode con este valor de ganancia (K).
- 3-Observar, en el Bode, la frecuencia (w') para la que se cumple el MF deseado.
- 4-Calcular la modificación de ganancia necesaria para que w' pase a ser la nueva w_{cg} .
- 5-Calcular el parámetro β .
- 6-Situar el cero una década por debajo de frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}).

b) Control del Error Estacionario y de la Frecuencia de Cruce de Ganancia.

En el diseño por el lugar de las raíces se observó que los reguladores de retraso de fase podían ser utilizados para corregir el error en régimen permanente sin modificar la respuesta dinámica del sistema. En el diseño en frecuencia puede conseguirse lo mismo.

Ahora, la idea es incrementar la ganancia del sistema a baja frecuencia mediante el incremento de la ganancia (K) del amplificador, y utilizar la relación cero-polo de la red para posicionar la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}). En la comparación con el diseño por el lugar de las raíces, sería utilizar la red para que a partir de una década antes de la frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}), el diagrama de Bode no presente variaciones respecto al diagrama antes de introducir la red.

Método de Cálculo:

- 1- Ajustar la ganancia (K) para obtener el error permanente deseado.
- 2- Calcular la modificación de ganancia necesaria volver a obtener la misma w_{cg} .
- 3- Calcular el parámetro β .
- 4- Situar el cero una década por debajo de frecuencia de cruce de ganancia (w_{cg}).

Diseño de Reguladores en Frecuencia.....	85
3.1. Introducción	85
3.2. Relación Frecuencia-Tiempo-Lugar de las raíces	86

3.3. Diagramas de Bode para sistemas de fase no mínima.....	90
3.4. COMPENSACION POR AVANCE DE FASE	97
3.4.1. Forma de la red de avance de fase.....	97
3.4.2. Cálculo de los parámetros para definición de la red.....	99
3.4.3. Utilización de la Red de Avance de Fase	101
3.5. COMPENSACION POR RETARDO DE FASE.....	104
3.5.1. Forma de la red de retardo de fase.....	104
3.5.2. Cálculo de los parámetros para definición de la red.....	106
3.5.3. Utilización de la Red de Retardo de Fase	108