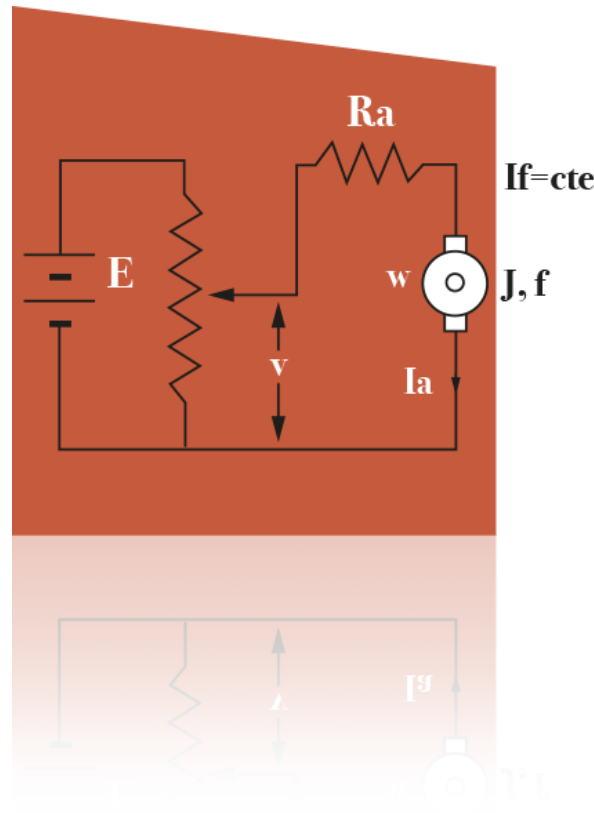


Automática II

6. Análisis de sistemas no lineales



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Carlos Torre Ferrero

Elías Revestido Herrero

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

6

Análisis de Sistemas No Lineales

6.1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas no lineales son aquellos en los que las ecuaciones diferenciales que definen su comportamiento dinámico no son lineales. Estos sistemas se comportan de forma diferente ante distintos tipos de entrada y ante distintas amplitudes de un mismo tipo de entrada. En este tipo de sistemas no se puede aplicar superposición.

Los sistemas empleados en los capítulos anteriores corresponden todos ellos a sistemas lineales. Pero en la mayoría de los sistemas reales existen en mayor o menor medida factores no lineales, los sistemas se ven afectados por ejemplo por zonas muertas, histéresis, contienen elementos que responden de forma todo-nada, etc. En este caso, no existe un método único y válido para el análisis de todos los tipos de no linealidades existentes en los sistemas.

Cuando el grado de no linealidad no es muy elevado se pueden utilizar técnicas de linealización equivalente. Dentro de este tipo está el método de la función descriptiva. Éste método permite analizar la estabilidad de sistemas no lineales desde el dominio de la frecuencia. Otro tipo de análisis de sistemas no lineales que se va a aplicar en el presente capítulo y que no depende del grado de no linealidad es el plano de fase. Se analiza por último también el efecto que producen los retardos del transporte sobre un sistema.

6.2. FUNCIÓN DESCRIPTIVA.

Cuando a un sistema no lineal se le aplica una entrada senoidal, la salida no será senoidal. Es decir, si la salida se descompone en serie de Fourier existirá un armónico fundamental y una serie de armónicos de orden superior. Para el método de la función descriptiva se considera que únicamente el armónico de orden superior (componente fundamental) es significativo. Esto suele ser cierto para muchos sistemas de control ya que muchos de ellos se comportan como filtros paso bajo atenuándose las componentes de alta frecuencia.

El método de la función descriptiva es una técnica de linealización equivalente que permite estudiar la estabilidad de los sistemas de control no lineales desde el punto de vista del dominio de la frecuencia

La función descriptiva se define como la relación compleja entre la componente fundamental de la salida y la entrada:

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1$$

donde: Y_1 : amplitud de la componente fundamental de la salida
 X : amplitud de la señal senoidal de entrada
 ϕ_1 : desfase entre la componente fundamental y la entrada

Cálculo de la componente fundamental de la salida:

Considerando que la entrada al elemento no lineal es una senoide de la forma:

$$X(t) = X \cdot \text{sen}(\omega t)$$

Descomponiendo la salida del sistema no lineal mediante una serie de Fourier:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \text{sen}(n\omega t)) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \text{sen}(n\omega t + \phi_n)$$

donde:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos(n\omega t) d(\omega t)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \text{sen}(n\omega t) d(\omega t)$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

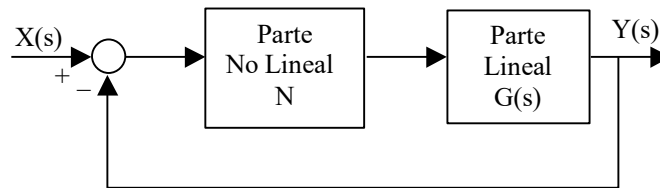
$$\phi_n = \text{arctg}\left(\frac{A_n}{B_n}\right)$$

Si la señal de salida es impar ($f(x) = -f(-x)$) los términos A_n son cero.

6.3. ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD DE SISTEMAS NO LINEALES MEDIANTE LA FUNCIÓN DESCRIPTIVA.

Si en un sistema de control con elementos no lineales, los armónicos superiores de dichos elementos se atenúan suficientemente por los elementos lineales, tal que se pueda considerar que sólo el armónico fundamental de la salida es significativo, se puede tratar a la función descriptiva como una ganancia (real o compleja).

Dado un sistema de control donde existen elementos lineales (representados por su función de transferencia $G(s)$) y elementos no lineales (representados por su función descriptiva N) como el que se muestra en la figura:



La respuesta frecuencial del sistema completo de lazo cerrado se puede obtener como:

$$M(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{NG(j\omega)}{1 + NG(j\omega)}$$

La ecuación característica de este sistema será:

$$1 + NG(j\omega) = 0$$

que vista despejando $G(j\omega)$ es:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N}$$

Esta ecuación representa el límite de estabilidad del sistema, es decir, el punto donde la salida del sistema presenta un ciclo límite (oscilaciones mantenidas). Puede verse que a diferencia de los sistemas lineales donde en el análisis frecuencial el límite de estabilidad se situaba en el punto $1 \angle 180^\circ$, en los sistemas no lineales el lugar de puntos críticos corresponde al lugar de $-1/N$.

Al igual que en los sistemas lineales, la posición relativa entre los lugares de $-1/N$ y $G(j\omega)$ da información sobre la estabilidad del sistema. $G(j\omega)$ debe ser un sistema de fase mínima.

Si el lugar $-1/N$ está rodeado por el lugar de $G(j\omega)$ el sistema será inestable.

Si ambos lugares se cortan el sistema puede presentar un ciclo límite. Estas oscilaciones se pueden aproximar por una senoidal definida por el valor de X en el lugar $-1/N$ y el valor de ω en el lugar $G(j\omega)$.

6.4. PLANO DE FASE

Otro método de análisis de sistemas no lineales es el plano de fase. Se diferencia del análisis por medio de la función descriptiva en que éste método no está limitado a pequeñas alinealidades.

Para ello se emplea una representación del sistema en variables de estado. Si el sistema es no lineal entonces:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

donde x son los estados y u las entradas.

Cuando se utiliza la representación de variables de estado se puede hacer una representación gráfica de los valores que van tomando dichas variables en función del tiempo. A este tipo de representación se la denomina espacio de estados. En general si existen n variables de estado será un espacio n -dimensional. Podrán visualizarse en una gráfica tridimensional aquellos sistemas con tres variables de estado. Y en un plano cuando sean dos variables de estado, en este caso se denomina plano de estados.

Un caso especial del plano de estados es cuando las variables de estado empleadas para la representación son tales que la segunda variable de estado corresponde con la derivada de la primera. En este caso toma el nombre de plano de fase.

El plano de fase consiste en una representación donde el eje de abscisas corresponde con la primera variable de estado, y el eje de ordenadas corresponde con la segunda variable de estado (derivada de la primera). Por los motivos señalados este análisis está prácticamente limitado a sistemas de primer y segundo orden.

El plano de fase es útil para visualizar el comportamiento de sistemas no lineales como por ejemplo los ciclos límites. En un plano de fase un ciclo límite estará representado por una trayectoria cerrada aislada.

Para realizar la representación en el plano de fase se parte de las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento del sistema. Para un sistema de segundo orden, la forma de obtener las ecuaciones diferenciales de primer orden que relacionan las variables de estado es eliminando la variable tiempo. La representación por tanto no contendrá explícitamente a la variable tiempo, ya que representa una variable de estado frente a otra.

Dado un sistema de segundo orden representado mediante dos variables de estado x_1 y x_2 :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

donde f_1 y f_2 son funciones no lineales.

Por la definición de plano de fase la variable de estado x_2 será la derivada de la variable de estado x_1 , luego las expresiones anteriores se simplifican a:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2)$$

o su representación simplificada:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2)\end{aligned}$$

donde f representa en este caso es una función no lineal.

Representando ahora x_1 simplemente por x y uniendo las dos ecuaciones en una se tiene:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

Se puede eliminar la variable tiempo de las dos ecuaciones iniciales de la siguiente forma:

$$\frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

Esta ecuación da la pendiente de la tangente a la trayectoria en cada punto (x_1, x_2) .

La solución de esta ecuación, dada una condición inicial, es única siempre que f_1 y f_2 sean analíticas. Esto no puede aplicarse a los puntos en que $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$. A estos puntos se les denomina puntos singulares y son los puntos de equilibrio.

La solución de la ecuación será:

$$x_2 = \phi(x_1)$$

o lo que es lo mismo:

$$\dot{x} = \phi(x)$$

que representa la segunda variable de estado frente a la primera sin aparecer explícitamente la variable tiempo.

Para la representación de los diagramas de plano de fase se parte de unas condiciones iniciales (que definen el punto inicial de la gráfica) y se va representando los valores de las variables de estado según va avanzando el tiempo.

Para cada condición inicial la gráfica representará todos los estados posibles del sistema formando una trayectoria. Existe una trayectoria para cada condición inicial y todas estas trayectorias no se cruzan entre sí salvo en los puntos singulares.

Estas trayectorias pueden presentar simetrías en determinadas circunstancias.

Dada la ecuación:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

Si $f(x, \dot{x}) = f(x, -\dot{x})$ la trayectoria será simétrica respecto al eje x .

Si $f(x, \dot{x}) = -f(-x, \dot{x})$ la trayectoria será simétrica respecto al eje $\dot{x}$.

Si $f(-x, \dot{x}) = -f(x, -\dot{x})$ la trayectoria será simétrica respecto a los dos ejes.

6.5. MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE TRAYECTORIAS EN EL PLANO DE FASE

A continuación, se van a ver diferentes métodos, tanto analíticos como gráficos para la obtención de las trayectorias en el plano de fase para sistemas de segundo orden.

En general, un sistema de segundo orden con alinealidades que dependen de la señal, se puede aproximar, por tramos, por sistemas lineales. Por tanto, se va a dividir el rango de la variable de estado considerada en rangos en que se pueda analizar como un sistema lineal.

Por representarse la variable x frente a su derivada $\dot{x}$, esto implica que siempre que la variable x crezca su derivada $\dot{x}$ debe ser positiva y al contrario si x disminuye, la derivada $\dot{x}$ debe ser negativa. Esto se traduce en que las trayectorias representan curvas que giran en el sentido de las agujas del reloj.

Otra característica será que si la derivada $\dot{x}$ es cero, esto corresponde con un valor de x constante. Es decir, en el punto de corte de las trayectorias con el eje x la trayectoria es siempre perpendicular al eje.

Métodos analíticos:

Son de utilidad cuando las ecuaciones diferenciales que representan al sistema no son demasiado complejas y a pesar de ser no lineales, puedan representarse por tramos lineales. Una forma de representar las trayectorias consiste en, dadas las ecuaciones diferenciales del funcionamiento del sistema, obtener la relación existente entre las variables de estado:

$$\dot{x} = \phi(x)$$

e ir representando, dando valores a la variable tiempo, una variable de estado frente a la otra.

Otra forma puede ser obtener la solución temporal de las variables de estado:

$$x = \phi_1(t)$$

$$\dot{x} = \phi_2(t)$$

y luego eliminar la variable tiempo entre ellas.

Métodos gráficos:

Son de utilidad cuando los métodos analíticos se complican. La sencillez tiene como contraposición que la exactitud es menor que la de los métodos analíticos y además depende mucho de los criterios empleados para su construcción. Entre los métodos gráficos destaca el método de las isoclinas por su simplicidad.

Método de las isoclinas:

En el plano de fase, la pendiente de la trayectoria en cada punto será:

$$N = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dx}{dx}$$

Que corresponde con la expresión general obtenida anteriormente:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

Esta ecuación da la pendiente de la tangente a la trayectoria en cada punto (x_1, x_2) .

Si se iguala la expresión anterior a valores constantes se pueden obtener los lugares de pendiente constante dentro del plano de fase, denominados isoclinas. De esta forma se obtendrán los campos de direcciones de las tangentes a las trayectorias. Este método es de utilidad sobre todo cuando las isoclinas son líneas rectas, por su facilidad de representación. Esto ocurre cuando se representa un sistema de segundo orden lineal. Las isoclinas para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales son líneas rectas que pasan por el origen del plano de fase. Si se puede dividir el espacio del plano de fase en tramos lineales entonces en cada tramo las isoclinas serán líneas rectas.

Como se comentó anteriormente, el eje x corresponde con una isoclina de pendiente infinito.

6.6. ANÁLISIS DE LOS SISTEMAS NO LINEALES MEDIANTE EL PLANO DE FASE.

La estabilidad de un sistema no lineal de segundo orden puede analizarse observando las trayectorias generadas en el plano de fase. (para sistemas de mayor orden no es posible hacer una representación en un plano). Según la tendencia que presenten las trayectorias pueden darse los siguientes casos:

- Sistemas estables: las trayectorias tienden hacia puntos de equilibrio estables.
- Sistemas que presentan oscilaciones mantenidas: las trayectorias tienden hacia ciclos límites.
- Sistemas inestables: las trayectorias tienden hacia infinito.

Los ciclos límite (oscilaciones automantenidas) en el plano de fase se representan por una

trayectoria cerrada aislada. En un sistema pueden existir más de un ciclo límite. Las trayectorias próximas a una de estas pueden converger o divergir de la trayectoria de ciclo límite, pero nunca cruzarla. Un ciclo límite será estable si las trayectorias próximas a él (ya sean exteriores o interiores) convergen hacia la trayectoria de ciclo límite. Un ciclo límite es inestable si las trayectorias próximas a él divergen del ciclo límite.

Además de la estabilidad del sistema estas trayectorias dan información de la respuesta temporal del sistema tales como error de régimen permanente, valores de máximo sobreimpulso y frecuencia del sistema vista como el número de oscilaciones hasta que el sistema se estabiliza (cada vuelta completa de la trayectoria corresponde con un ciclo de oscilación). Además, si se incluye información de los instantes de tiempo sobre puntos de la trayectoria se pueden obtener los tiempos de subida, pico y de establecimiento del sistema.

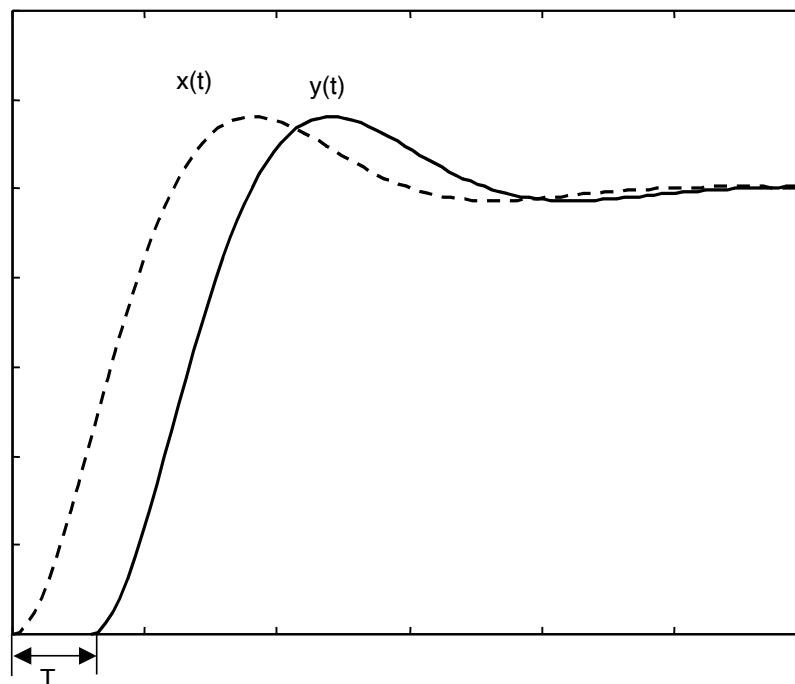
6.7. TRATAMIENTO DE LOS RETARDOS DE TRANSPORTE EN LOS SISTEMAS

En la mayor parte de los procesos, la transmisión de las señales no es instantánea, sino que existe un retardo en la transmisión de las señales. este fenómeno también se denomina como retardo de transporte, tiempo muerto o retraso. Estos retardos se pueden presentar en cualquier parte del sistema, como en la planta a controlar, en los transductores utilizados o en el controlador empleado.

En la respuesta temporal, el efecto de un retardo T entre dos señales x e y es:

$$y(t) = x(t - T)$$

donde T es el retardo que existe entre la señal $x(t)$ e $y(t)$.



La función de transferencia de un retardo es:

$$G_r(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-Ts}$$

Representación del lugar de las raíces para un sistema con retardo:

Suponiendo un sistema donde su ecuación característica es:

$$1 + K \cdot e^{-Ts} \cdot G(s) = 0$$

$$1 + K \cdot e^{-Ts} \cdot \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)} = 0$$

A la vista de esta expresión puede verse que el número de ramas del lugar de las raíces es infinito, ya que la ecuación característica tiene infinitas soluciones:

$$\prod_j (s - p_j) + K \cdot e^{-Ts} \cdot \prod_i (s - z_i) = 0$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones ya que la exponencial de una variable compleja es periódica:

$$e^{-Ts} = e^{-T(\sigma + j\omega_d)} = e^{-T\sigma} \cdot e^{-jT\omega_d} = e^{-T\sigma} \cdot [\cos(T\omega_d) - j \cdot \sen(T\omega_d)]$$

es una función periódica de periodo 2π .

También el número de asíntotas será infinito siendo además todas ellas paralelas al eje real, puesto que la parte imaginaria de e^{-Ts} es la que se repite periódicamente:

$$e^{-jT\omega_d}$$

Esto puede llevar a que incluso un sistema de primer orden sea inestable para algún valor de K puesto que, si las asíntotas son horizontales, las ramas pueden cortar al eje imaginario.

escribiendo la ecuación característica como:

$$K \cdot e^{-Ts} \cdot \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)} = -1$$

Condición del argumento para el lugar directo de las raíces será:

$$\angle e^{-Ts} + \sum_i \angle(s - z_i) - \sum_j \angle(s - p_j) = \pm 180^\circ (2q + 1)$$

donde:

$$\angle e^{-Ts} = \angle(e^{-T\sigma} \cdot e^{-jT\omega_d}) = -T \cdot \omega_d \text{ radianes} = -T \cdot \omega_d \frac{180^\circ}{\pi} \text{ grados}$$

Luego la condición del argumento queda:

$$\sum_i \angle(s - z_i) - \sum_j \angle(s - p_j) = T \cdot \omega_d \frac{180^\circ}{\pi} \pm 180^\circ (2q + 1)$$

Condición para el módulo:

$$|K| \cdot |e^{-Ts}| \cdot \frac{\prod_i |s - z_i|}{\prod_j |s - p_j|} = 1$$

donde:

$$|e^{-Ts}| = e^{-T\sigma}$$

Luego la condición de módulo queda:

$$\frac{\prod_i |s - z_i|}{\prod_j |s - p_j|} = \frac{e^{T\sigma}}{K}$$

Puede verse que cuando $\omega_d = 0$ (eje real) el retardo no afecta a la condición del argumento. Por lo tanto, el lugar de las raíces en el eje real es el mismo para el sistema con retardo que sin él. Para el resto de los puntos del lugar de las raíces será necesario ir calculando el valor del ángulo aportado por el retardo.

Ahora en el criterio del argumento para cada valor de q aparece una nueva rama en el lugar de las raíces. Para $q=0$ se tiene la rama primaria, que será la que marque la estabilidad del sistema por ser la que corte al eje imaginario con los valores de K más bajos.

Como existen infinitas ramas, para cada valor de K existirán polos de lazo cerrado en cada una de las ramas, lo que quiere decir que el sistema de lazo cerrado presenta infinitos polos, como ya se dijo al analizar que la ecuación característica tenía infinitas soluciones. Para cada valor de K los polos más dominantes serán los de la rama primaria ya que estarán más próximos al eje imaginario que los del resto de las ramas.

Para cada punto del lugar de las raíces se obtendrá el valor de la ganancia K correspondiente como:

$$K = \frac{e^{T\sigma} \cdot \prod_j |s - p_j|}{\prod_i |s - z_i|}$$

Debido a la complejidad que representa dibujar este lugar de las raíces se emplean en su lugar aproximaciones.

Aproximación de Padé:

La función de transferencia del retardo se puede expandir en una serie infinita de términos empleando el desarrollo en serie de la exponencial:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Luego:

$$e^{-Ts} = 1 - Ts + \frac{T^2 s^2}{2!} - \frac{T^3 s^3}{3!} + \dots$$

o

$$e^{-Ts} = \frac{1}{e^{Ts}} = \frac{1}{1 + Ts + \frac{T^2 s^2}{2!} - \frac{T^3 s^3}{3!} + \dots}$$

o

$$e^{-Ts} = \frac{e^{-\frac{Ts}{2}}}{e^{\frac{Ts}{2}}} = \frac{2 - Ts + \frac{T^2 s^2}{2 \cdot 2!} + \dots}{2 + Ts + \frac{T^2 s^2}{2 \cdot 2!} + \dots}$$

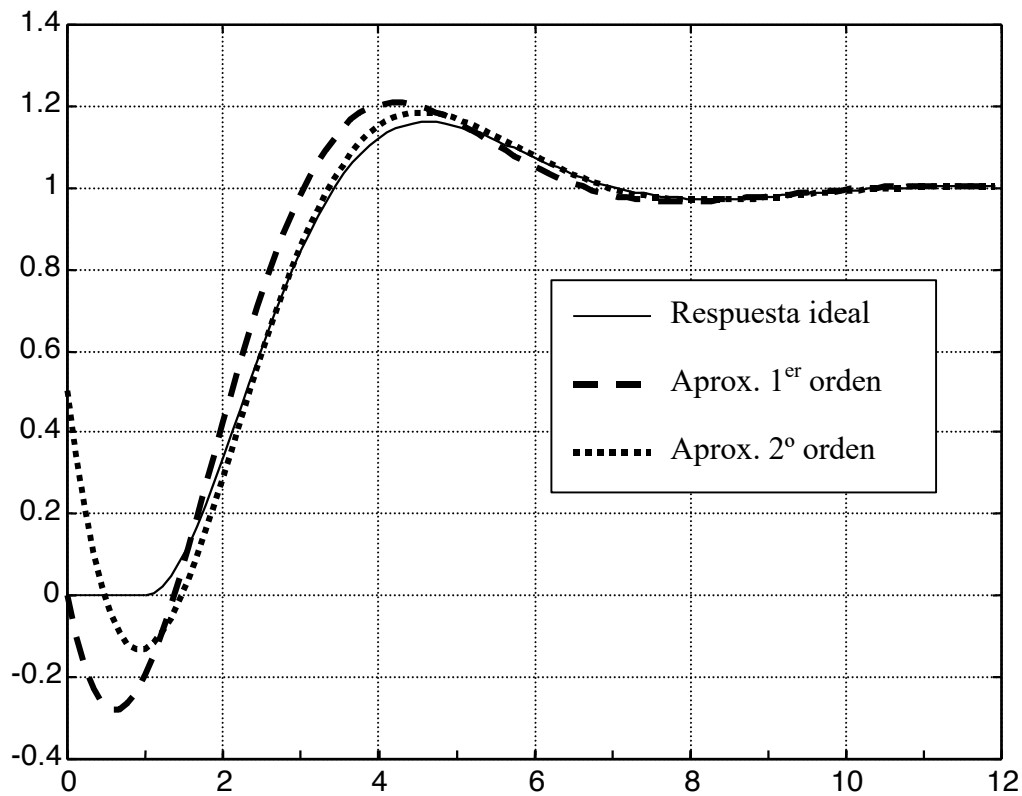
Luego una aproximación exacta del retardo implicaría la introducción de una función de transferencia con infinitos polos, ceros o polos y ceros. Lo que se emplea es una aproximación truncando la serie. Según se empleen mayor número de términos en la aproximación, mejor aproximación se obtendrá, pero más compleja será la función de transferencia. Cuanto menor sea el valor del retardo y cuanto más suaves sean las señales de entrada a la función de retardo, mejor será la aproximación.

En la siguiente figura se muestra la respuesta al escalón un sistema de segundo orden al que se le ha añadido un retardo de un segundo empleando la aproximación por adición de ceros.

$$\text{Sistema: } G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$\text{Regulador de primer orden: } R_{11}(s) = 1 - s$$

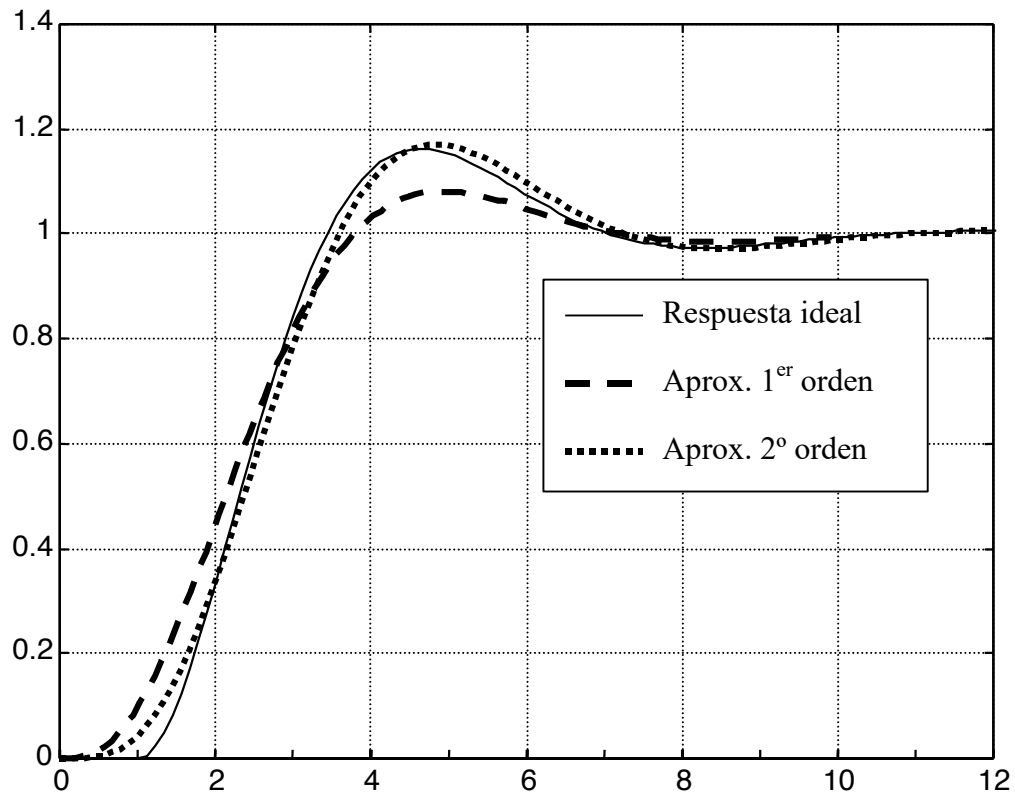
$$\text{Regulador de segundo orden: } R_{12}(s) = 1 - s + 0.5s^2.$$



Empleando la aproximación por adición de polos para el mismo sistema:

Regulador de primer orden: $R_{21}(s) = \frac{1}{1+s}$

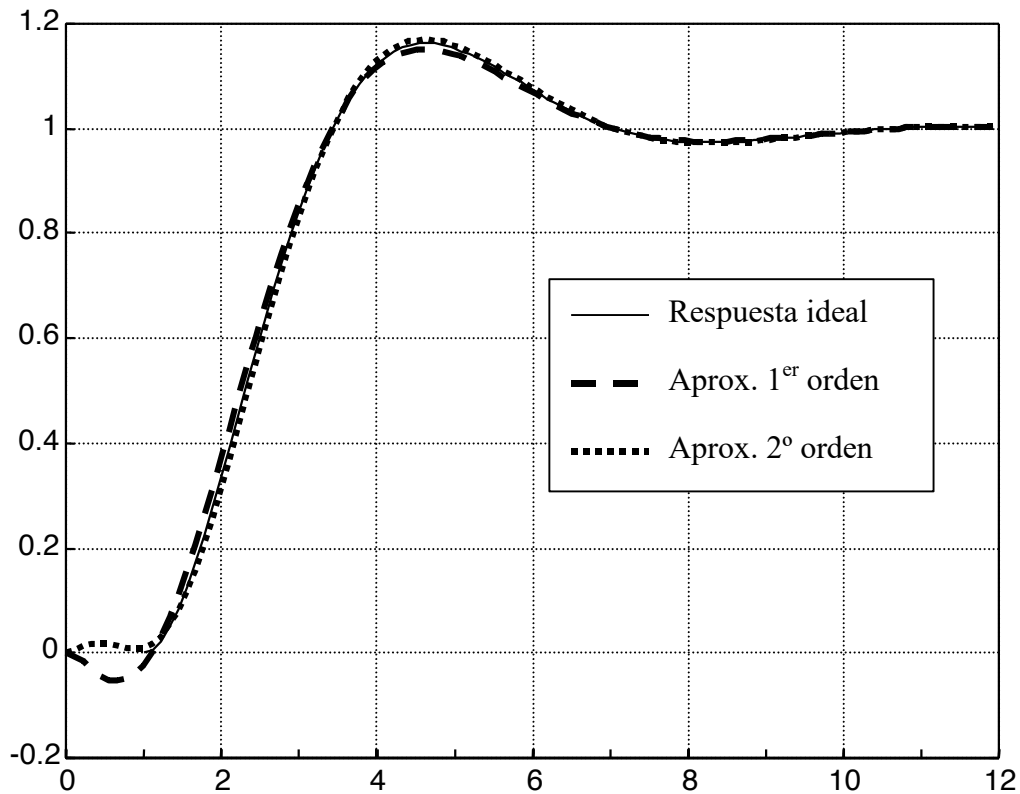
Regulador de segundo orden: $R_{22}(s) = \frac{1}{1+s+0.5s^2}$



Y empleando la aproximación por adición de polos y ceros:

$$\text{Regulador de primer orden: } R_{31}(s) = \frac{2-s}{2+s}$$

$$\text{Regulador de segundo orden: } R_{32}(s) = \frac{2-s+0.25s^2}{2+s+0.25s^2}$$



Aproximación por funciones de primer orden en serie:

Consiste en reemplazar el retardo por un término de la forma:

$$e^{-Ts} = \frac{1}{\left(1 + \frac{Ts}{n}\right)^n}$$

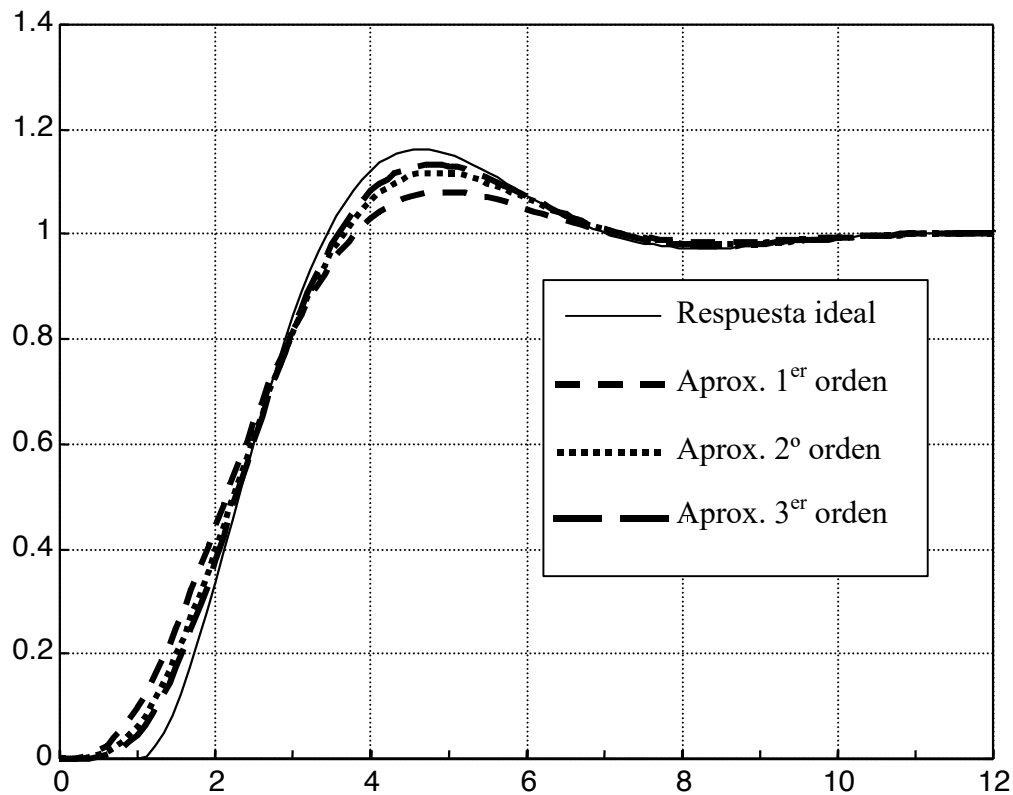
donde n es el orden de la aproximación. A mayor valor de n más exacta será. A diferencia de la aproximación de Pade, no produce oscilaciones en la zona del retardo, pero se necesita emplear un orden más alto para obtener una buena aproximación.

Para el mismo ejemplo anterior:

$$\text{Regulador de primer orden: } R_{41}(s) = \frac{1}{1+s}$$

$$\text{Regulador de segundo orden: } R_{42}(s) = \frac{1}{(1+0.5s)^2}$$

Regulador de tercer orden:
$$R_{43}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{3}\right)^3}$$



Representación de los diagramas de Bode para un sistema con retardo:

Dada la representación del retardo de transporte para el análisis en frecuencia:

$$G_r(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

El módulo vendrá dado por:

$$|G_r(j\omega)| = |e^{-j\omega T}| = |\cos(\omega T) - j\sin(\omega T)| = \sqrt{\cos^2(\omega T) + \sin^2(\omega T)} = 1$$

Luego el diagrama de Bode para módulo es el mismo tanto para el sistema con retardo como sin él.

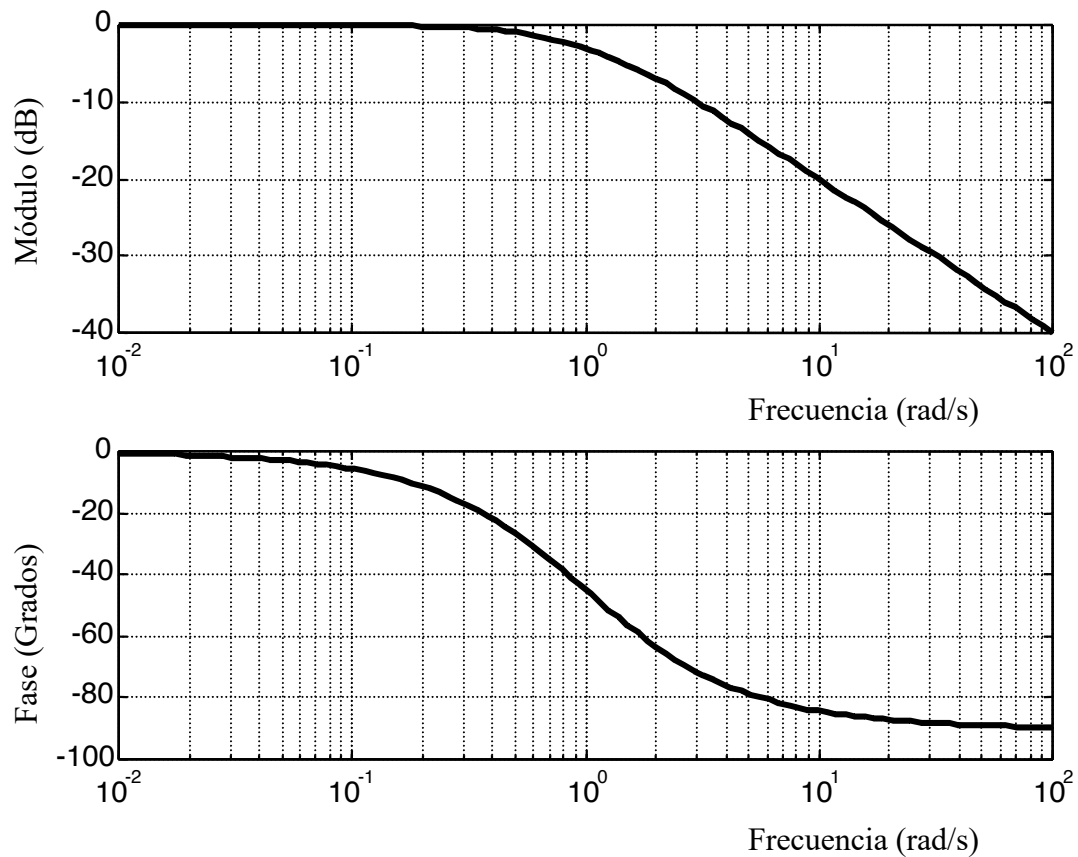
La fase vendrá dada por:

$$\angle G_r(j\omega) = \angle e^{-j\omega T} = -\omega T \text{ radianes} = -\omega T \frac{180^\circ}{\pi} \text{ grados}$$

Término que correspondería con una línea recta si el eje de frecuencias no fuera logarítmico, por lo que será necesario ir calculando su valor puntual para diferentes frecuencias para hacer su representación.

En la siguiente figura se muestra la respuesta en frecuencia de la función:

$$G(s) = \frac{0.01}{s + 0.01}$$



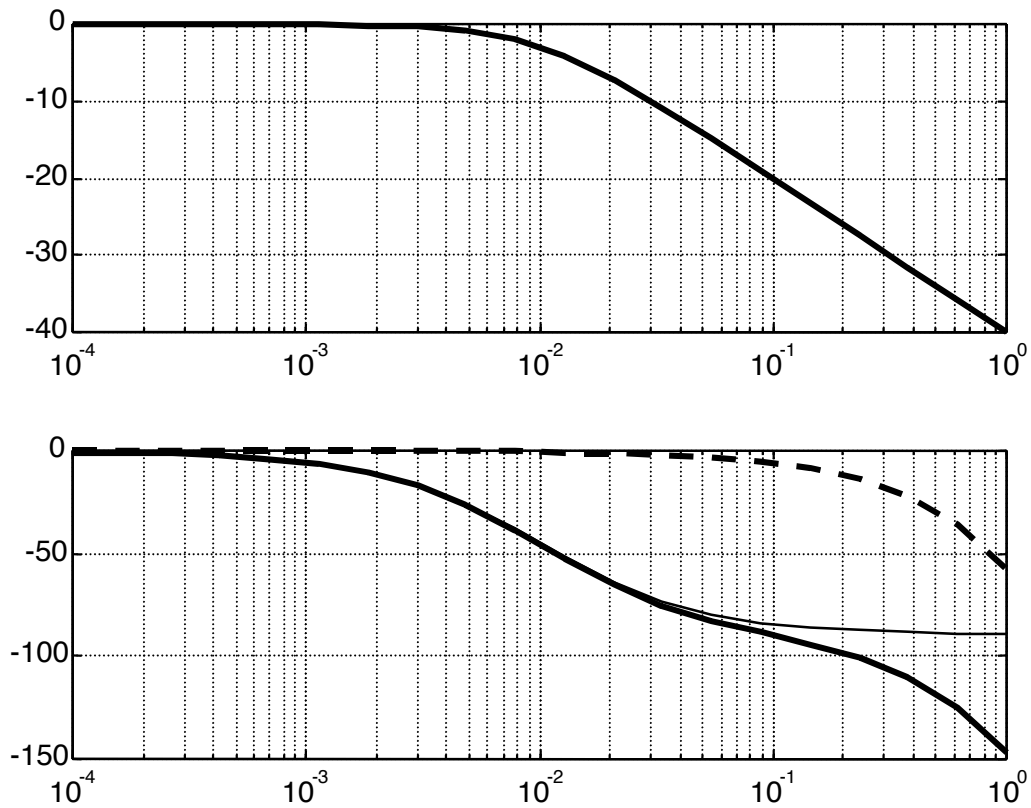
Se le añade al sistema ahora un retardo de 1 segundo:

$$G(s) = \frac{0.01e^{-s}}{s + 0.01}$$

En la siguiente tabla se presentan los valores de la fase para el término de retardo para una serie de valores de frecuencia.

Frecuencia	Fase
0.0001	-0.0057
0.0004	-0.0245
0.0011	-0.0647
0.0048	-0.2769
0.0078	-0.4496
0.0127	-0.7301
0.0546	-3.1258
0.0886	-5.0756
0.1438	-8.2417
0.2336	-13.3827
0.3793	-21.7305
0.6158	-35.2855
1.0000	-57.2958

Estos valores han de sumarse al valor de fase que tenía el sistema sin el retardo del sistema. En la siguiente figura puede verse la representación del sistema inicial (línea fina), el retardo (línea discontinua), y el sistema completo (línea gruesa).



Representación del diagrama polar para un sistema con retardo:

Como el retardo se puede representar como:

$$G_r(j\omega) = e^{-j\omega T} = 1 \angle -\omega T$$

Esto en el diagrama polar corresponde con un círculo de radio unidad que parte del punto (1,0) para la frecuencia $\omega = 0$ y que da infinitas vueltas.

Por ejemplo, para un sistema de primer orden con un retardo de la forma:

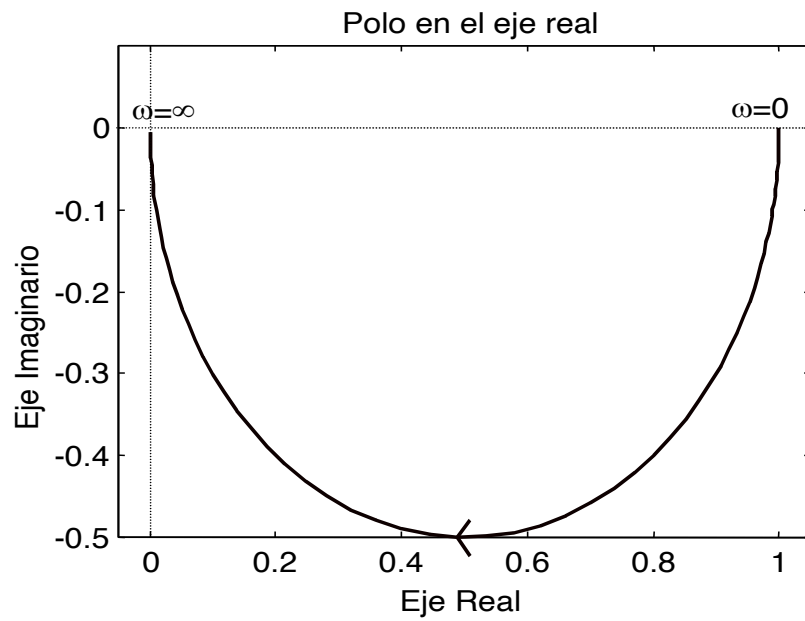
$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega\tau}}{1 + j\omega T}$$

$$G(j\omega) = \frac{\cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)}{1 + j\omega T}$$

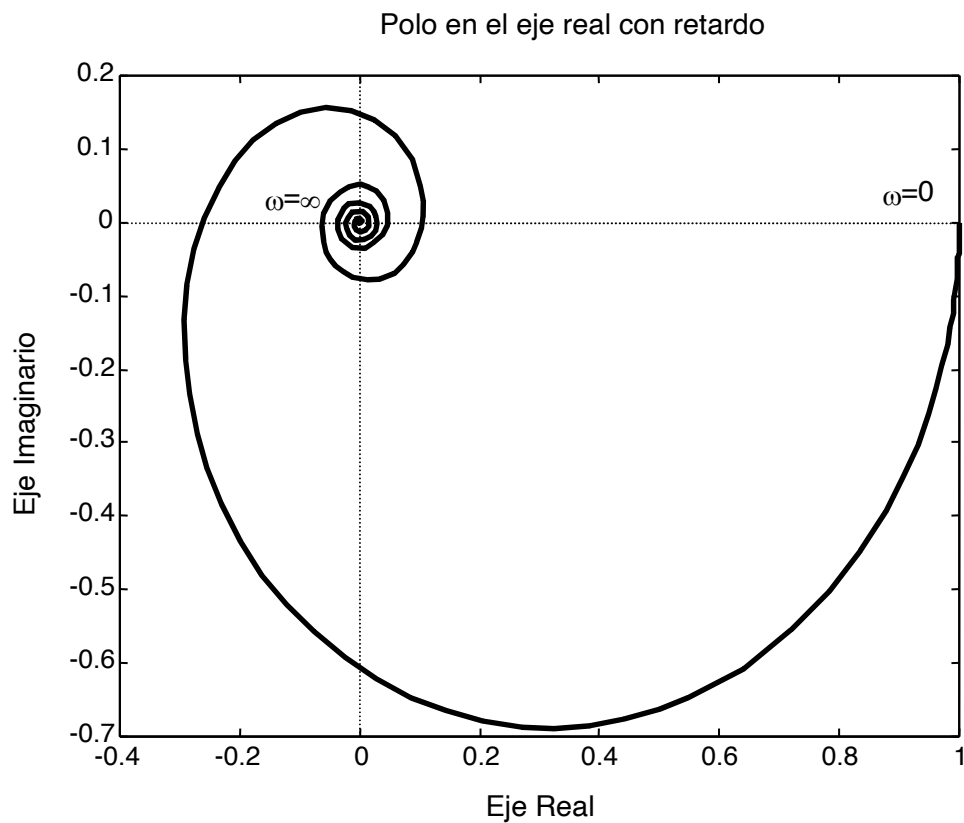
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\omega\tau - \arctg(\omega T)$$

La siguiente figura muestra el diagrama polar de un sistema de primer orden sin retardo.

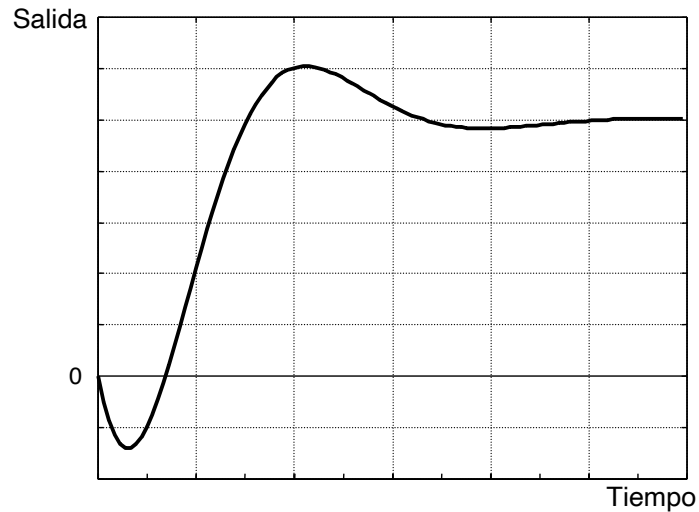


Y la siguiente figura el mismo sistema al que se le ha añadido un retardo de un segundo.



6.8. RESPUESTA INVERSA

Ante una entrada formada por un escalón de valores positivos algunos sistemas presentan una respuesta tal que la salida en el momento de aplicación de la entrada disminuye del valor inicial durante un tiempo y luego vuelve a incrementarse hasta alcanzar su valor final. La siguiente figura muestra un ejemplo de este tipo de respuesta.



La función de transferencia de un sistema de este tipo corresponde con un sistema que presenta ceros en el semiplano derecho, es decir, corresponde con sistemas de fase no mínima.

Las aproximaciones de retardos mediante las aproximaciones de Pade pueden generar sistemas que presentan este tipo de respuesta.

Análisis de Sistemas No Lineales.....	263
6.1. Introducción	263
6.2. Función descriptiva.....	264
6.3. Análisis de la estabilidad de sistemas no lineales mediante la Función descriptiva.	265
6.4. Plano de fase.....	266
6.5. Métodos de construcción de trayectorias en el Plano de fase.....	268
6.6. Análisis de los sistemas no lineales mediante El Plano de Fase.	269
6.7. Tratamiento de Los retardos de transporte en los sistemas	270
6.8. Respuesta inversa	280