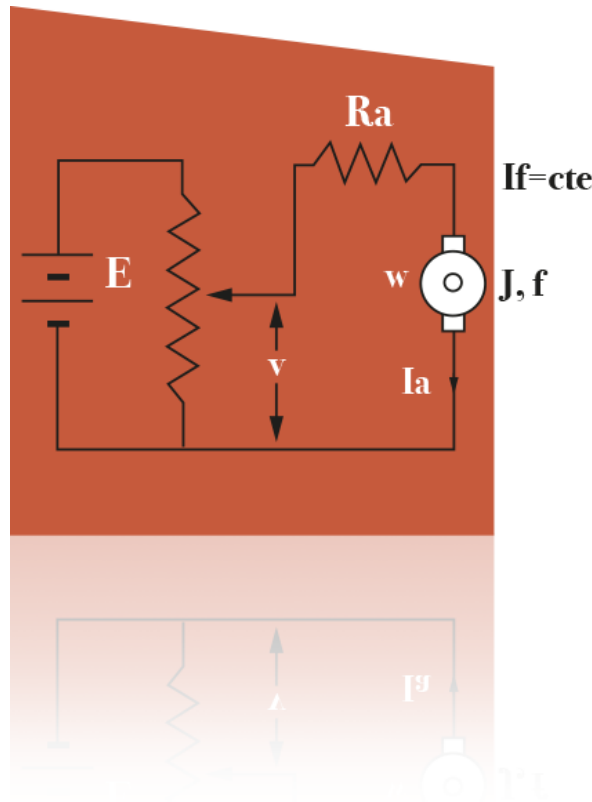


Automática II

5. Introducción a las variables de estado



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Carlos Torre Ferrero

Elías Revestido Herrero

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

5

Introducción a las Variables de Estado

5.1. INTRODUCCIÓN

La teoría clásica de control está enfocada al análisis y diseño de sistemas con poca complejidad. Si se desea hacer el análisis y control de un sistema complejo, que por ejemplo posee varias entradas y salidas, y del que se desea controlar varias variables, la teoría clásica de control se vuelve muy compleja.

Para dichos sistemas existe un enfoque basado en las denominadas variables de estado, que simplifica enormemente el análisis y diseño en sistemas complejos. Con este enfoque, el incrementar el número de variables que maneja el sistema no implica un aumento de la complejidad del análisis.

En este capítulo se pretende hacer una breve introducción al análisis de sistemas mediante variables de estado.

5.2. ESPACIO DE ESTADOS

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables, llamadas variables de estado, tal que con ellas el comportamiento del sistema quede totalmente determinado.

Un sistema descrito por una ecuación diferencial de orden n , puede ser definido por n ecuaciones diferenciales de orden 1 y por n variables de estado.

La representación de un sistema en variables de estado no es única, esta variará según las variables de estado tomadas, pero el número de variables de estado empleadas será siempre el mismo.

El espacio de estados de un sistema es un espacio de tantas dimensiones como variables de estado. El vector de estado será el vector formado por dichas variables de estado.

5.3. FORMA GENERAL DE LAS ECUACIONES DE ESTADO

La representación de un sistema lineal tiempo invariante mediante variables de estado será de la forma:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u + E \cdot w$$

$$y(t) = C \cdot x + D \cdot u$$

donde:

x : vector de estados

$\dot{x}$: vector indicativo de la dinámica del vector de estado.

u : vector de entradas al sistema.

y : vector de salidas del sistema.

w : vector de perturbaciones al sistema.

A, B, C, D, E : matrices y/o vectores.

5.4. OBTENCION DE LAS VARIABLES DE ESTADO POR EL METODO ANALITICO

5.4.1. Entrada no derivada

Dada la ecuación diferencial del sistema se trata de seleccionar las variables de estado a utilizar y buscar las relaciones entre ellas. El orden del sistema dará el número de variables de estado a emplear.

Dada la ecuación diferencial del sistema:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = u$$

Si se toman como variables de estado la salida y sus derivadas:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = y'$$

$$x_n = y^{(n-1)}$$

La ecuación diferencial puede escribirse como:

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = x_3$$

...

$$x_{n-1}' = x_n$$

$$x_n' = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u$$

Que representado matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad x' = A \cdot x + B \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad y = C \cdot x$$

5.4.2. Entrada derivada

Sea la ecuación diferencial del sistema:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} u' + b_n u$$

-Buscar la función de transferencia.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

-Multiplicar y dividir por una variable (x):

$$U(s) = a(s) \xi$$

$$Y(s) = b(s) \xi$$

-Tomar las variables de estado en cada una de las ecuaciones.

Por ejemplo para un sistema de tercer orden dado por la ecuación diferencia:

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = b_3 u + b_2 u' + b_1 u''$$

Función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Multiplicando y dividiendo por la variable (x):

$$U(s) = a(s) \xi = (s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3) \xi$$

$$Y(s) = b(s) \xi = (b_1 s^2 + b_2 s + b_3) \xi$$

En el tiempo:

$$u(t) = \xi''' + a_1 \xi'' + a_2 \xi' + a_3 \xi$$

$$y(t) = b_1 \xi'' + b_2 \xi' + b_3 \xi$$

Tomando las variables de estado:

$$x_1 = \xi; \quad x_2 = \xi'; \quad x_3 = \xi'';$$

$$x_3' = \xi''' = u - a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1$$

$$y(t) = b_1 x_3 + b_2 x_2 + b_3 x_1$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} b_3 & b_2 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

5.5. OBTENCIÓN DE LAS VARIABLES DE ESTADO POR EL MÉTODO GRÁFICO (MASON)

Utiliza la representación gráfica del sistema obtenida por aplicación de Mason. Los sistemas dinámicos deben incorporar elementos de memoria, y estos elementos pueden ser integradores. Por tanto las salidas de los integradores funcionarán como variables de estado. El número de variables de estado coincidirá con el número de integradores.

Para su obtención se divide el numerador y el denominador de la función de transferencia por la máxima potencia de s y se analiza empleando la fórmula de Mason:

$$G(s) = \frac{\sum T_i \Delta_i}{\Delta}$$

donde:

T_i = Trayectos directos Entrada-Salida.

Δ_i = Cofactor (suponer que son 1).

Δ = Determinante del sistema (considerar solo lazos independientes):

$$\Delta = 1 - \sum l_a + \sum l_b l_c - \sum l_d l_e l_f + \dots$$

El numerador indica los trayectos directos y el denominador los bucles.

5.6. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

La forma general de las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \end{aligned}$$

Tomando transformadas:

$$s \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

Sustituyendo:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(s) + \mathbf{D} \mathbf{U}(s)$$

$$Y(s) = (C \cdot (sI - A)^{-1} B + D) \cdot U(s)$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D}$$

5.7. CAMBIO DE VARIABLES DE ESTADO

Representación interna es la siguiente ($D=0$):

$$\dot{x} = A x + B u$$

$$y = C x$$

Cambio de variable: $v = P x \quad x = P^{-1} v$

Introduciendo el cambio:

$$P^{-1} \dot{v} = A P^{-1} v + B u$$

$$y = C P^{-1} v$$

Lo que es lo mismo:

$$\dot{v} = P A P^{-1} v + P B u$$

$$y = C P^{-1} v$$

Llamando:

$$\tilde{A} = P A P^{-1}; \tilde{B} = P B; \tilde{C} = C P^{-1};$$

Queda con la forma normal:

$$\dot{v} = \tilde{A} v + \tilde{B} u$$

$$y = \tilde{C} v$$

Puede comprobarse que no se ha modificado la representación externa.
Aplicando:

$$M(s) = \tilde{C} (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}$$

Tenemos:

$$M(s) = C P^{-1} (sI - P A P^{-1})^{-1} P B = C P^{-1} (s P P^{-1} - P A P^{-1})^{-1} P B$$

$$M(s) = C P^{-1} (P (sI - A) P^{-1})^{-1} P B = C P^{-1} P (sI - A)^{-1} P^{-1} P B$$

$$M(s) = C (sI - A)^{-1} B$$

Se ha utilizado la relación matricial:

$$(XYZ)^{-1} = Z^{-1} Y^{-1} X^{-1}$$

Es posible realizar cualquier cambio de variable sin modificar la representación externa.

5.8. RELACIÓN POLOS-AUTOVALORES

Los autovalores de una matriz A son las raíces de la ecuación característica:

$$|sI - A| = 0$$

Los autovalores de la matriz de respuesta no forzada (A), coinciden con los polos del sistema.

La señal de salida es una combinación lineal de las respuestas en el tiempo de los estados internos del sistema, esto indica que la respuesta debe tener las mismas raíces características que las variables de estado.

5.9. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO

5.9.1. Ecuaciones homogéneas

$$\dot{x} = A x; \quad x(0) = x_0$$

Suponiendo que la solución es de la forma:

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots$$

$x(t)$ es un vector de dimensión n .

Sustituyendo:

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + k b_k t^{k-1} + \dots = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots)$$

Identificando coeficientes:

$$b_1 = A b_0$$

$$b_2 = \frac{1}{2} A b_1 = \frac{1}{2} A^2 b_0$$

$$b_3 = \frac{1}{2} A b_2 = \frac{1}{3 \cdot 2} A^3 b_0$$

.....

$$b_k = \frac{1}{2} A b_{k-1} = \frac{1}{k!} A^k b_0$$

Entonces la solución:

$$x(t) = \left(I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots \right) x(0)$$

$$\boxed{x(t) = e^{At} x(0)}$$

5.9.2. Ecuaciones no homogéneas

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}' - \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{u}$$

Multiplicando por $e^{-\mathbf{A}t}$:

$$e^{-\mathbf{A}t}(\mathbf{x}' - \mathbf{A} \mathbf{x}(t)) = \frac{d}{dt} \left(e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) \right) = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$$

Integrando entre 0 y t:

$$e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Lo que es igual:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Que se puede escribir así también:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Siendo: $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$.

5.9.3. Método de Laplace. Ecuaciones homogéneas

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Tomando transformadas:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0); \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0)$$

Teniendo en cuenta la relación:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \dots$$

Y tomando transformada inversa:

$$x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0) = L^{-1}\left[\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots\right]x(0)$$

Obtenemos:

$$x(t) = \left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \dots\right)x(0)$$

$$\boxed{x(t) = e^{At}x(0)}$$

"Matriz de transición de estados":

$$\Phi(t) = e^{At}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

5.9.4. Método de Laplace. Ecuaciones no homogéneas

$$x' = Ax + Bu; \quad x(0) = x_0$$

Tomando transformadas:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Teniendo en cuenta la relación:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots$$

$$(sI - A)^{-1} = \left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \dots\right) = e^{At}$$

Se obtiene:

$$X(s) = L(e^{At})x(0) + L(e^{At})BU(s)$$

La transformada inversa del segundo término, por la convolución de dos señales e^{-At} y $u(t)$:

$$\boxed{x(t) = e^{-At}x(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

5.10. REGIMEN PERMANENTE

El régimen permanente se alcanza cuando el estado no varía:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$0 = Ax_{\text{est}} + Bu$$

$$Ax_{\text{est}} = -Bu$$

$$A^{-1}Ax_{\text{est}} = -A^{-1}Bu$$

$$x_{\text{est}} = -A^{-1}Bu$$

5.11. DESACOPLO DE LAS ECUACIONES DE ESTADO

En este apartado se busca la diagonalización de la matriz de transición de estados, para que cada siguiente estado aparezca como dependiente de un solo estado actual.

5.11.1. Mediante autovalores

El álgebra de matrices indica que para una matriz cuadrada A , sin autovalores repetidos, se puede encontrar una matriz P tal que $A' = PAP^{-1}$ es diagonal, y con la propiedad de que los autovalores de A son los elementos de la diagonal principal de A' .

Procedimiento:

- Encontrar los autovalores de A :

$$|sI - A| = 0.$$

- Encontrar un autovector para cada autovalor:

$$(s_i I - A)x_i = 0.$$

- P^{-1} será la matriz formada por los autovectores.

$$P^{-1} = (x_1 : x_2 : \dots : x_n)$$

5.11.2. Mediante expansión en fracciones simples.

Descomponiendo la función de transferencia en fracciones simples:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}$$

La forma diagonal será:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 \cdot u$$

Esta forma se denomina canónica diagonal.

En caso de existir polos múltiples esta forma se modifica a la denominada canónica de Jordan:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s + p_1)^m} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -p_1 \end{bmatrix}}^{\text{matriz (m x m) para } p_1} & \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{\text{matriz de ceros}} \\ \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{\text{matriz de ceros}} & \overbrace{\begin{bmatrix} -p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -p_n \end{bmatrix}}^{\text{matriz de ceros}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

5.11.3. Caso de tener autovalores complejos conjugados

Se va a ver como en el caso de que el sistema tenga polos (autovalores) complejos conjugados no se va a poder diagonalizar. Únicamente se podrá eliminar los términos con parte imaginaria mediante la agrupación de los conjugados.

Es decir, cuando el sistema tiene raíces complejas conjugadas, es posible diagonalizarlo pero con números complejos en la diagonal principal (los polos o autovalores). También es posible el eliminar los complejos, mediante la unión de los conjugados entre sí, pero al realizar esto se pierde la diagonalización.

5.12. CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

Un sistema es COMPLETAMENTE CONTROLABLE (CC) cuando el estado del mismo, en el instante t_f , puede ser forzado a cualquier valor mediante la aplicación de una señal de entrada apropiada durante el intervalo que va desde el instante inicial a t_f .

Un sistema es COMPLETAMENTE OBSERVABLE (CO) si se puede obtener el vector de estado inicial (x_0) mediante el conocimiento del vector de estado en el instante final y de la historia de la señal de salida desde el instante inicial al final.

5.12.1. Comprobación de controlabilidad y observabilidad.

a) Para sistemas diagonalizados

Cuando un sistema está en forma diagonal, sus ecuaciones de estado están desacopladas, es decir, cada variable de estado sólo depende de sí misma y/o de la entrada.

- Cuando un sistema está diagonalizado y alguna de las variables de estado no se vea afectada por la señal de entrada (o señales de entrada), el sistema no será completamente controlable. Esto es debido a que la variable de estado que no este afectada por la señal de entrada (solo estará afectada por si misma) no podrá ser modificada exteriormente.
- Cuando un sistema está diagonalizado y la salida no depende de todas las variables de estado, entonces el sistema no será completamente observable. Esto es así porque si la salida no se ve afectada por una variable de estado, tampoco podremos conocer la evolución de la variable a partir de la salida.

b) Para sistemas no diagonalizados

Cuando los sistemas no están diagonalizados, o cuando un sistema es no diagonalizable, la observación de controlabilidad y observabilidad no es inmediata. En este caso es necesario acudir al cálculo de las matrices de controlabilidad y observabilidad. Únicamente se indicará el método de cálculo y no el porqué de su funcionamiento.

MATRIZ DE CONTROLABILIDAD

Este método es útil para cualquier sistema, incluso con raíces múltiples.

El sistema definido por la ecuación de estado $x' = A x + B u$ será controlable si, y solo si, la matriz de controlabilidad M_c es de rango total.

$$M_c = (B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B)$$

donde n es el número de variables de estado.

MATRIZ DE OBSERVABILIDAD

Este método es útil para cualquier sistema, incluso con raíces múltiples.

El sistema definido por la ecuación de estado $x' = A x + B u$ será observable si, y solo si, la matriz de observabilidad M_o es de rango total.

$$M_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

donde n es número de variables de estado

El rango de una matriz indica el número de partes de información, linealmente independientes entre sí, que se encuentran en dicha matriz. El rango máximo de una matriz cuadrada ($n \times n$) es n y el de una rectangular ($n \times m$) es el menor de m y n . El rango es el tamaño máximo de submatrices cuadradas que tienen determinante no nulo.