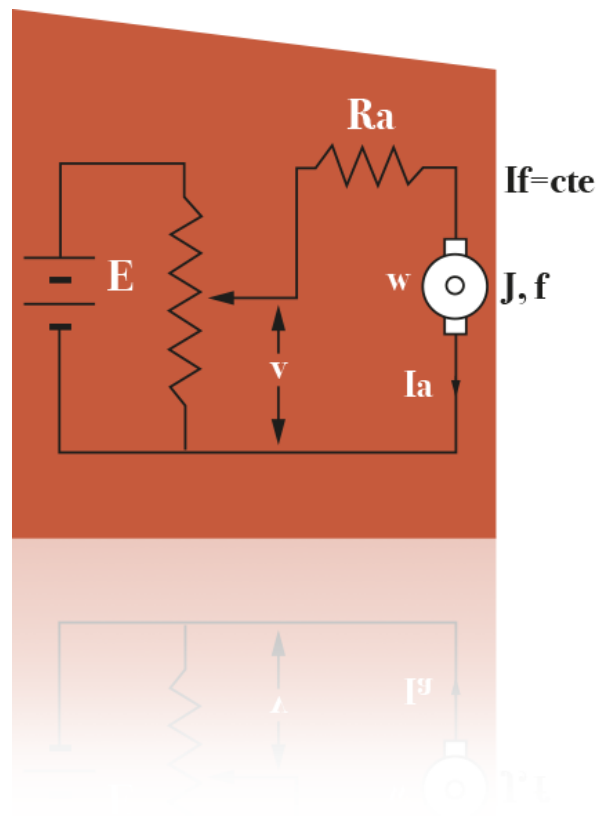


Automática II

Ejercicios Tema 2



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

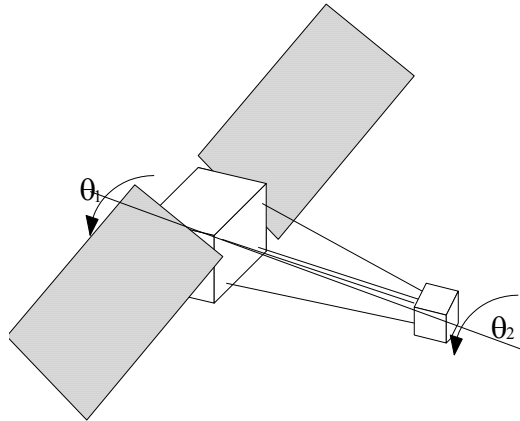
Carlos Torre Ferrero

Elías Revestido Herrero

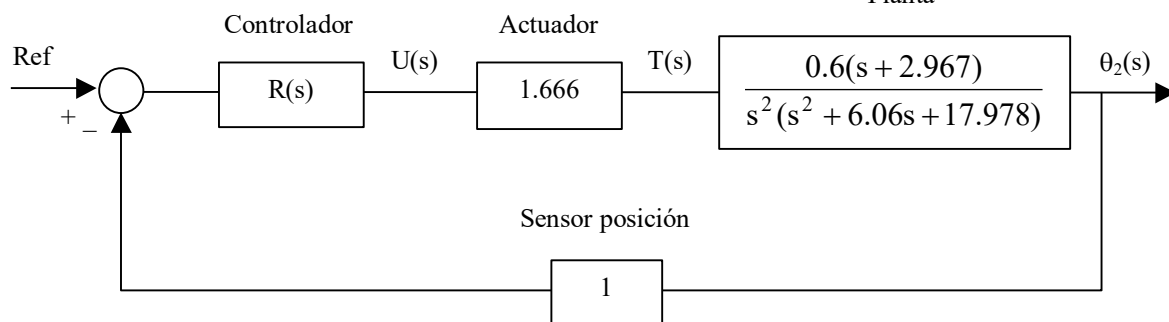
Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 2.1.

La figura muestra, de forma básica, un satélite de reconocimiento astronómico. En ella se puede ver como este satélite está formado por dos bloques (unidos por conexiones no rígidas), siendo el mayor de estos bloques el que contiene el sistema de comunicación, sistema de impulsión y suministradores de alimentación, mientras que el otro bloque solo contiene sensores que deben estar aislados de las vibraciones de primer bloque.



El diagrama de bloques del sistema para controlar la posición θ_2 (ver ref. 9, Ej. 1.11) es:



- Calcular el controlador $R(s)$ de tipo PID para que el sistema en lazo cerrado se comporte como uno de segundo orden con un máximo sobre impulso del 2%, con un tiempo de asentamiento de 4 s. y un error ante entrada aceleración menor de 0.2.
- Diseñar un compensador avance-retardo, por el lugar de las raíces, para que el sistema en lazo cerrado se comporte como uno de segundo orden con un máximo sobreimpulso del 2%, con un tiempo de asentamiento de 4 segundos y un error ante entrada aceleración menor de 0.2.

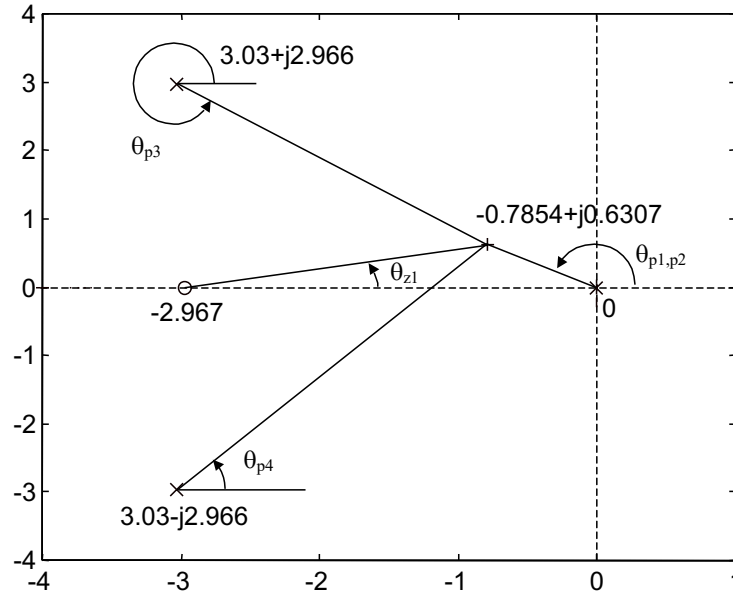
$$M_p = 20\% \quad M_p = e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.02 \quad 1.5506 = \frac{\delta^2}{1-\delta^2} \quad \delta = 0.7797$$

$$t_s = 4\text{seg} \quad t_s = \frac{\pi}{\delta \cdot \omega_n} = 4 \quad \delta \cdot \omega_n = \frac{\pi}{4} = 0.7854 \quad \omega_n = \frac{0.7854}{0.7797} = 1.007\text{rad/s}$$

Luego el punto de trabajo es:

$$p_{1,2} = -\delta \cdot \omega_n \pm j \cdot \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} = -0.7854 \pm 0.6307j$$

Se comprueba en primer lugar si el sistema actual pasa por el punto de trabajo. Para ello se aplica el criterio del argumento a dicho punto:



$$\theta_{p1} = \theta_{p2} = 180 - \arctg \frac{0.6307}{0.7854} = 141.23^\circ$$

$$\theta_{p3} = -\arctg \frac{2.966 - 0.6307}{3.03 - 0.7854} = -46.13^\circ$$

$$\theta_{p4} = \arctg \frac{0.6307 + 2.966}{3.03 - 0.7854} = 58.03^\circ$$

$$\theta_{z1} = \arctg \frac{0.6307}{2.967 - 0.7854} = 16.12^\circ$$

$$\sum \text{Ceros} - \sum \text{Polos} = 180^\circ$$

$$\theta_{z1} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3} + \theta_{p4}) = 180^\circ$$

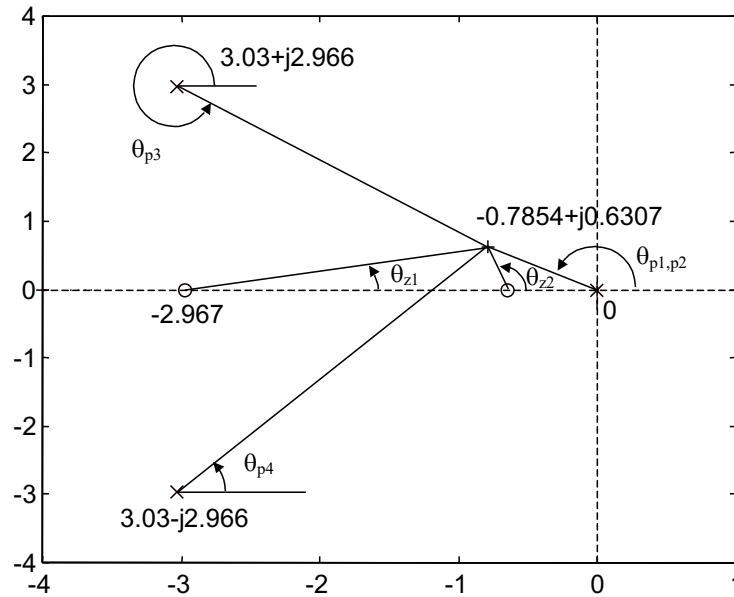
$$16.12^\circ - (2 \cdot 141.23^\circ - 46.13^\circ + 58.03^\circ) = -278.24^\circ = 81.76^\circ$$

No corresponde con 180° luego el punto no pertenece al lugar de las raíces. Los 98.24° que faltan para llegar a los 180° debe proporcionarlos el regulador.

Se introduce un regulador PD para modificar la forma del lugar de las raíces y que así pase por el punto de trabajo deseado aportando los 98.24° que faltan.

$$R_1(s) = k_1(s + a)$$

Aplicando el criterio del argumento:



$$\sum \text{Ceros} - \sum \text{Polos} = 180^\circ$$

$$\theta_{z1} + \theta_{z2} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3} + \theta_{p4}) = 180^\circ$$

$$16.12^\circ + \theta_{z2} - (2 \cdot 141.23^\circ - 46.13^\circ + 58.03^\circ) = 180^\circ$$

$$16.12^\circ + \theta_{z2} - 294.36^\circ = 180^\circ$$

$$\theta_{z2} = 458.24^\circ = 98.24^\circ$$

$$\text{tg}(180^\circ - 98.24^\circ) = \frac{0.6307}{x}$$

$$x = \frac{0.6307}{\text{tg} 81.76^\circ} = 0.091$$

$$a = -(0.7854 - 0.091) = 0.6944$$

Se aplica el criterio del módulo para calcular el valor de la ganancia k:

$$k_1 = \left| \frac{s^2(s^2 + 6.06s + 17.978)}{1.666 \cdot 0.6(s + 2.967)(s + 0.6944)} \right|_{s=-0.7854+j0.6307} = 9.63$$

$$R_1(s) = 9.63(s + 0.6944)$$

Calculando el error del régimen permanente ante entrada aceleración del sistema con el regulador calculado:

$$e_{\text{rpa}} = \frac{1}{K_a}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{1.666 \cdot 0.6(s + 2.967)9.63(s + 0.6944)}{s^2(s^2 + 6.06s + 17.978)} = 1.104$$

$$e_{\text{rpa}} = \frac{1}{1.104} = 0.906$$

El error que presenta el sistema es mayor que las especificaciones pedidas por lo tanto se añade un regulador PI para eliminar dicho error.

$$R_2(s) = k_2 \frac{s + b}{s}$$

La distancia del cero del regulador al eje imaginario debe ser al menos la sexta parte de la distancia al eje imaginario del punto de trabajo:

$$|b| \leq \frac{0.7854}{6}$$

$$|b| \leq 0.13$$

Cuanto más cercanos estén el polo y el cero del regulador menos se deformará el lugar de las raíces. Por tanto, para mayor seguridad colocamos el cero a 0.01 del polo:

$$R_2(s) = k_2 \frac{s + 0.01}{s}$$

La ganancia de este regulador va a ser prácticamente 1:

$$k_2 = \left| \frac{s^2(s^2 + 6.06s + 17.978)s}{1.666 \cdot 0.6(s + 2.967)9.63(s + 0.6944)(s + 0.01)} \right|_{s=-0.7854+j0.6307} = 1.0080$$

Luego el regulador será:

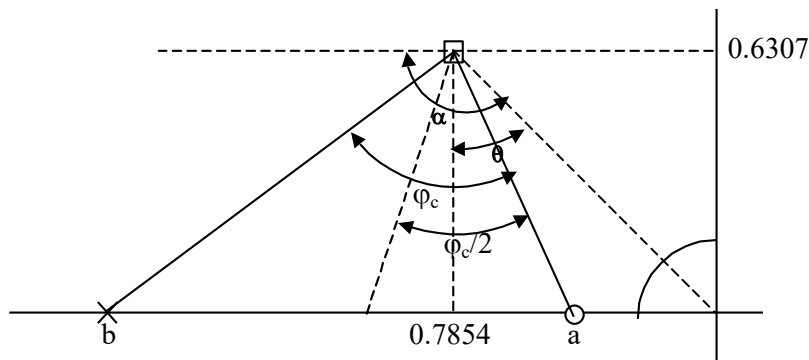
$$R_2(s) = \frac{s + 0.01}{s}$$

Y el regulador PID completo:

$$R(s) = \frac{9.63(s + 0.6944)(s + 0.01)}{s}$$

d) Se diseña en primer lugar la red de avance utilizando el método de la bisectriz.

La red de avance debe aportar los 98.24° .



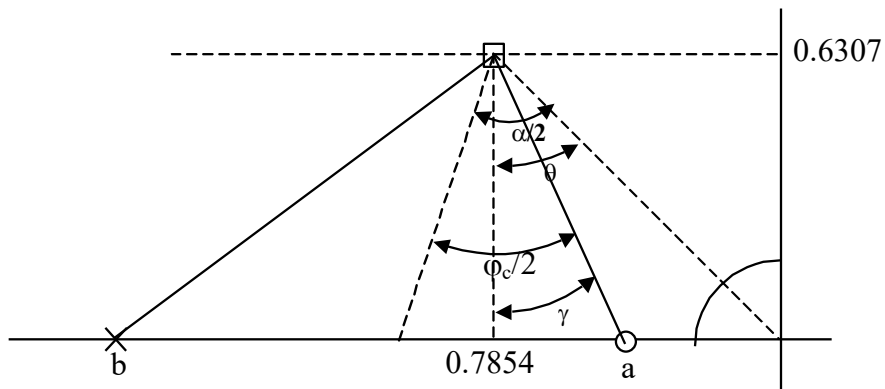
Se calcula en primer lugar el ángulo α , para obtener de ahí el punto central de la red:

$$\theta = \arctg \frac{0.7854}{0.6307} = 51.23^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ + \theta = 90^\circ + 51.23^\circ = 141.23^\circ$$

$$\frac{\alpha}{2} = 70.61^\circ$$

$$\frac{\alpha}{2} - \theta = 70.61^\circ - 51.23^\circ = 19.38^\circ$$



$$\varphi_c = 98.24^\circ$$

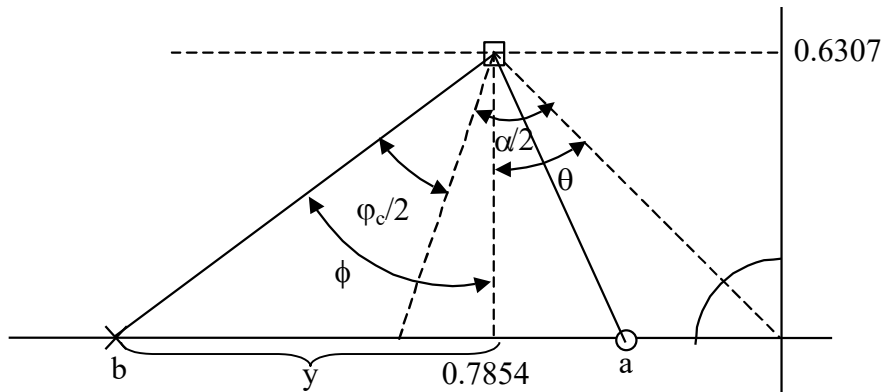
$$\frac{\varphi_c}{2} = 49.12^\circ$$

$$\gamma = \frac{\varphi_c}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right) = 49.12 - 19.38^\circ = 29.74^\circ$$

$$x = 0.6307 \cdot \operatorname{tg} 29.74^\circ = 0.36$$

$$x = 0.6307 \cdot \operatorname{tg} 29.74^\circ = 0.36$$

$$a = 0.7854 - 0.36 = 0.425$$



$$\phi = \frac{\phi_c}{2} + \left(\frac{\alpha}{2} - \theta \right) = 49.12 + 19.38^\circ = 68.5^\circ$$

$$\operatorname{tg} 68.5^\circ = \frac{y}{0.6307}$$

$$y = 0.6307 \operatorname{tg} 68.5^\circ = 1.60$$

$$b = 0.7854 + 1.60 = 2.39$$

Luego la forma del regulador será:

$$R_1(s) = k_1 \frac{s + a}{s + b} = k_1 \frac{s + 0.425}{s + 2.39}$$

Por último se ajusta la ganancia aplicando el criterio del módulo:

$$|k_1| = \left| \frac{s^2(s^2 + 6.06s + 17.978)(s + 2.39)}{1.666 \cdot 0.6(s + 2.967)(s + 0.425)} \right|_{s = -0.7854 + j0.6307} = 14.57$$

Luego el regulador total será:

$$R_1(s) = 14.57 \frac{s + 0.425}{s + 2.39}$$

Se comprueba ahora si el sistema con regulador cumple el error de régimen permanente ante entrada aceleración:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{1.666 \cdot 0.6(s + 2.967)14.57(s + 0.425)}{s^2(s^2 + 6.06s + 17.978)(s + 2.39)} = 0.43$$

$$e_{\text{rpa}} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0.43} = 2.3$$

Es necesario, por tanto, añadir una red de retardo para reducir dicho error a 0.2.

$$\frac{\text{error actual}}{\text{error deseado}} = \beta \quad \frac{2.3}{0.2} = \beta \quad \beta = 11.5$$

El regulador será de la forma:

$$R_2(s) = k_2 \frac{s + c}{s + d}$$

Se sitúa el polo muy cerca del origen: $d=0.01$

$$\beta = \frac{c}{d} \quad c = \beta \cdot d = 11.5 \cdot 0.01 = 0.115$$

Luego el regulador será:

$$R_2(s) = k_2 \frac{s + 0.115}{s + 0.01}$$

Como el polo y el cero están muy próximos la ganancia k_2 será prácticamente 1.

Se calcula su valor aplicando el criterio del módulo:

$$|k_1| = \left| \frac{s^2(s^2 + 6.06s + 17.978)(s + 2.39)(s + 0.01)}{1.666 \cdot 0.6(s + 2.967) \cdot 14.57(s + 0.425)(s + 0.115)} \right|_{s=-0.7854+j0.6307} = 1.086 \approx 1$$

Luego el regulador será:

$$R_2(s) = \frac{s + 0.115}{s + 0.01}$$

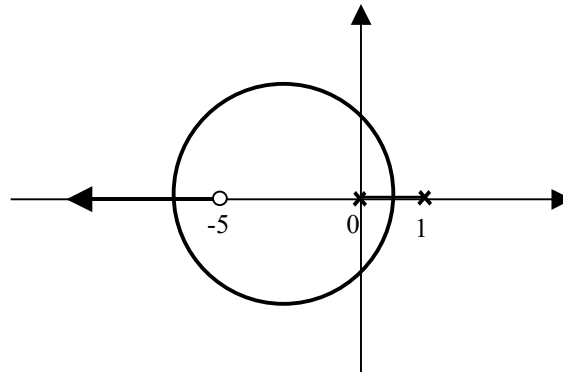
Puede comprobarse cómo el error ante entrada aceleración se ajusta a las especificaciones:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{1.666 \cdot 0.6(s + 2.967)14.57(s + 0.425)(s + 0.115)}{s^2(s^2 + 6.06s + 17.978)(s + 2.39)(s + 0.01)} = 4.92$$

$$e_{\text{ipa}} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{4.92} = 0.2$$

EJERCICIO 2.2.

La figura representa el lugar de las raíces de un sistema de control que tiene realimentación unitaria.



Calcular un compensador de adelanto por medio del lugar de las raíces, para que el sistema tenga un coeficiente de amortiguamiento de 0.55 y una frecuencia natural no amortiguada de 3.6 rad/s.

La forma del regulador es:

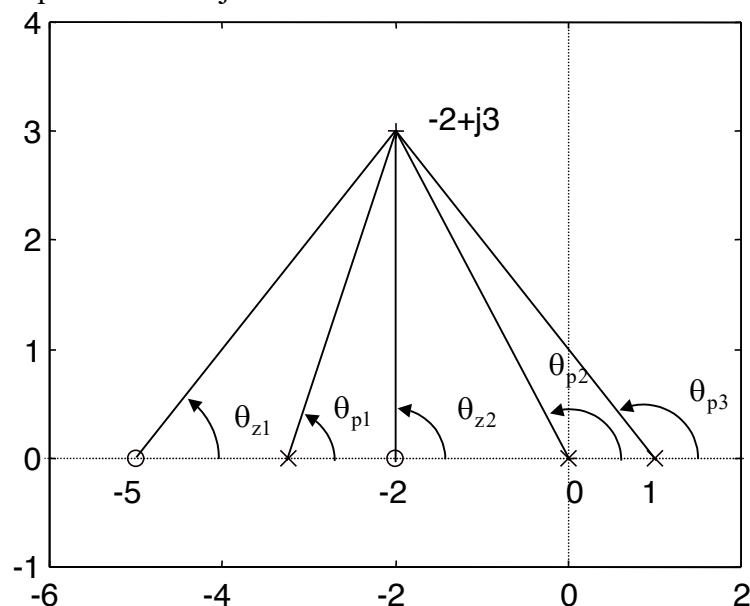
$$F(s) = k \frac{s + c}{s + d}$$

Y las condiciones de funcionamiento:

$$\left. \begin{array}{l} \delta = 0.55 \\ \omega_n = 3.6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega_d = 3.6\sqrt{1 - 0.55^2} = 3 \\ \delta\omega_n = 0.55 \cdot 3.6 = 2 \end{array}$$

Si se sitúa el cero del regulador en la vertical del punto de trabajo se tiene que: $c=2$

Aplicando el criterio del argumento se calcula la posición del polo d para que el lugar de las raíces pase por el punto de trabajo deseado:



$$\theta_{z1} = \arctg \frac{3}{3} = 45^\circ$$

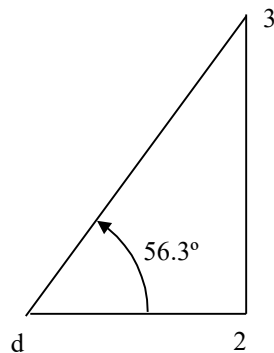
$$\theta_{z2} = 90^\circ$$

$$\theta_{p2} = 180^\circ - \arctg \frac{3}{2} = 123.7^\circ$$

$$\theta_{p3} = 180^\circ - \arctg \frac{3}{3} = 135^\circ$$

$$45^\circ + 90^\circ - (\theta_{p1} + 123.7 + 135) = 180^\circ$$

$$\theta_{p1} = 56.3^\circ$$



$$\operatorname{tg} 56.3^\circ = \frac{3}{d-2}$$

$$d=4$$

Cálculo de la k del regulador:

$$k = \left| \frac{s(s+1)(s+4)}{(s+2)(s+5)} \right|_{s=-2+j3} = 4.3$$

Luego el regulador será:

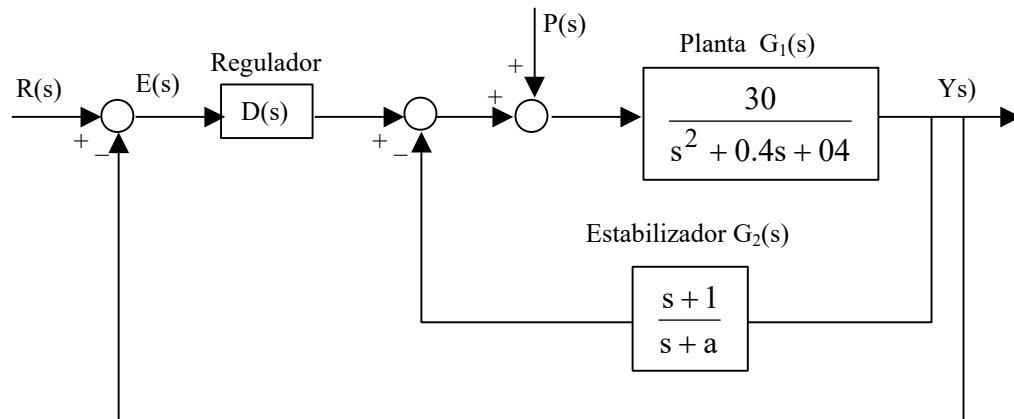
$$F(s) = 4.3 \frac{s+2}{s+4}$$

Diseño de Reguladores por.....	41
el Lugar de las Raíces.....	41
2.1. Introducción	41
2.2. MEDIANTE REGULADOR PD O RED DE ADELANTO DE FASE	42
2.2.1. Pasos de diseño.....	42
2.2.2. Criterios de selección de la posición del par polo-cero en redes de adelanto de fase:	43
2.3. MEDIANTE REGULADOR PI O RED DE retardo DE FASE	44
2.3.1. Pasos de diseño.....	45
2.3.2. Criterio de selección de la posición del par polo-cero en redes de retardo de fase:	45
2.4. CONTROLADORES MAS UTILIZADOS	45

EJERCICIO 2.3.

El sistema mostrado en la figura representa un sistema de control para una planta que viene definida por la función de transferencia $G_1(s)$. Este sistema de control está formado por una realimentación interna donde se incluye un estabilizador $G_2(s)$ y por un regulador $D(s)$ en la cadena directa.

El sistema posee dos entradas: $R(s)$ representa la entrada de referencia del sistema
 $P(s)$ representa la entrada de perturbaciones



Considerando $a = 9$, calcular un regulador de la forma:

$$D(s) = K \frac{s + \alpha}{s + \beta}$$

por medio del lugar de las raíces para que el sistema ante una entrada $r(t)=1$ y en ausencia de perturbaciones responda con un máximo sobreimpulso del 10% y un tiempo de establecimiento de 2 segundos.

$$M_p = 10\% \quad M_p = e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.1 \quad \frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}} = 2.3026$$

$$\delta^2 \pi^2 = 2.3026^2 - 2.3026^2 \delta^2 \quad \delta^2 (\pi^2 + 2.3026^2) = 2.3026^2$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2.3026^2}{\pi^2 + 2.3026^2}} = 0.591$$

$$t_s = 2\text{seg} \quad t_s = \frac{\pi}{\delta \cdot \omega_n} = 2 \quad \delta \cdot \omega_n = \frac{\pi}{2} = 1.571$$

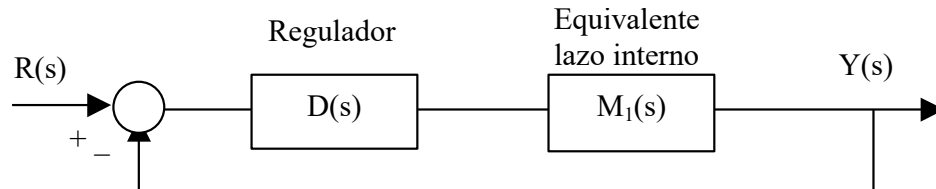
$$\omega_n = \frac{\pi}{2\delta} = \frac{\pi}{2 \cdot 0.591} = 2.658 \text{ rad/s}$$

Luego el punto de funcionamiento es:

$$p_{1,2} = -\delta \cdot \omega_n \pm j \cdot \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} = -1.571 \pm j2.144$$

Posición de los polos y ceros de la función de transferencia de lazo abierto:

Representando el sistema total por:



El lazo interno sería:

$$M_1(s) = \frac{\frac{30}{s^2 + 0.4s + 0.4}}{1 + \frac{30}{s^2 + 0.4s + 0.4} \cdot \frac{(s+1)}{(s+a)}} = \frac{\frac{30}{s^2 + 0.4s + 0.4}}{\frac{(s+a)(s^2 + 0.4s + 0.4) + 30(s+1)}{(s^2 + 0.4s + 0.4)(s+a)}} =$$

$$= \frac{30(s+a)}{s^3 + 0.4s^2 + 0.4s + as^2 + 0.4as + 0.4a + 30s + 30}$$

$$M_1(s) = \frac{30(s+a)}{s^3 + (0.4+a)s^2 + (30.4+0.4a)s + (0.4a+30)}$$

Sustituyendo $a=9$ se tiene:

$$M_1(s) = \frac{30(s+9)}{s^3 + (0.4+9)s^2 + (30.4+0.4 \cdot 9)s + (0.4 \cdot 9 + 30)}$$

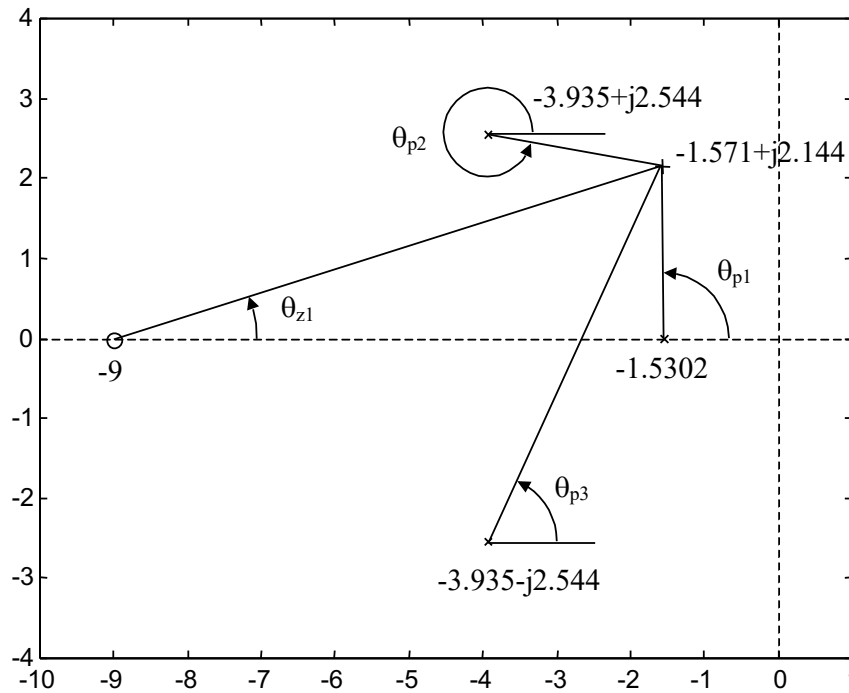
$$M_1(s) = \frac{30(s+9)}{s^3 + 9.4s^2 + 34s + 33.6}$$

Se factoriza la función de transferencia $M_1(s)$ para ver la situación de los polos y ceros:

$$M_1(s) = \frac{30(s+9)}{(s+1.5302)((s+3.935)^2 + 2.544^2)}$$

Se aplica en primer lugar el criterio del argumento para comprobar si el sistema sin regulador pasa por el punto de funcionamiento

Para ello se calculan los ángulos que forman cada uno de los polos y ceros respecto al punto de trabajo.



$$\theta_{p1} = 180 - \arctg \frac{2.144}{1.571 - 1.53} = 91.096^\circ$$

$$\theta_{p2} = -\arctg \frac{2.544 - 2.144}{3.935 - 1.571} = -9.604^\circ$$

$$\theta_{p3} = \arctg \frac{2.144 + 2.544}{3.935 - 1.571} = 63.240^\circ$$

$$\theta_{z1} = \arctg \frac{2.144}{39 - 1.571} = 16.098^\circ$$

Se comprueba si inicialmente el punto de trabajo pasa por el lugar de las raíces:

$$\sum \theta \text{ ceros} - \sum \theta \text{ polos} = 180^\circ$$

$$\theta_{z1} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3}) = 180^\circ$$

$$16.098^\circ - (91.096^\circ - 9.604^\circ + 63.240^\circ) = -128^\circ$$

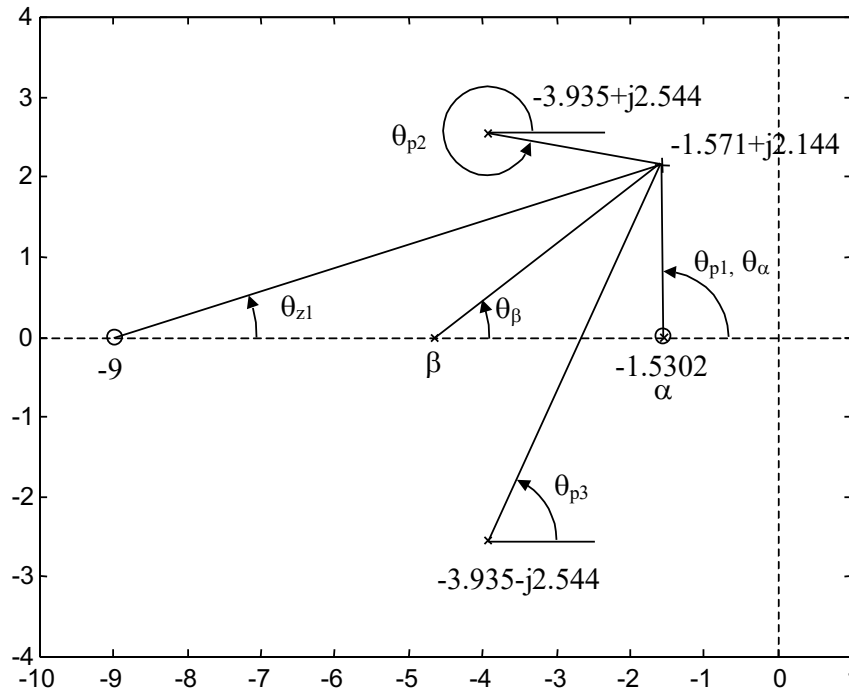
No se cumple el criterio del argumento y por tanto el punto no pertenece al lugar de las raíces.

Se añade un regulador de la forma:

$$D(s) = K \frac{s + \alpha}{s + \beta}$$

En este caso, según uno de los criterios de diseño de reguladores por el lugar de las raíces, el cero del regulador se sitúa sobre el polo real del sistema más próximo al origen.

Una vez fijada la posición del cero del regulador, se aplica ahora el criterio del argumento para situar el polo.



$$(\theta_{z1} + \theta_{\alpha}) - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3} + \theta_{\beta}) = 180^{\circ}$$

$$(16.098^{\circ} + 91.096^{\circ}) - (91.096^{\circ} - 9.604^{\circ} + 63.240^{\circ} + \theta_{\beta}) = 180^{\circ}$$

$$16.098^{\circ} + 9.604^{\circ} - 63.240^{\circ} - \theta_{\beta} = 180^{\circ}$$

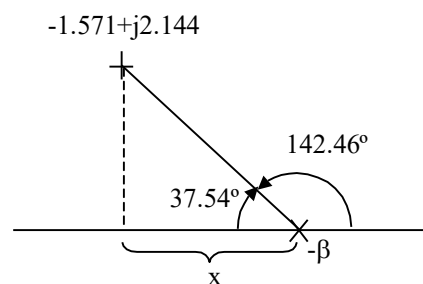
$$\theta_{\beta} = 16.098^{\circ} + 9.604^{\circ} - 63.240^{\circ} - 180$$

$$\theta_{\beta} = -217.538^{\circ} = 142.46^{\circ}$$

$$\operatorname{tg} 37.54^{\circ} = \frac{2.144}{x}$$

$$x = \frac{2.144}{\operatorname{tg} 37.54^{\circ}} = 2.79$$

$$|\beta| = -1.571 + 2.79 = 1.219$$



Por tanto el regulador será de la forma:

$$D(s) = K \frac{s + 1.53}{s - 1.219}$$

Ahora queda por ajustar el valor de la ganancia K utilizando el criterio del módulo.

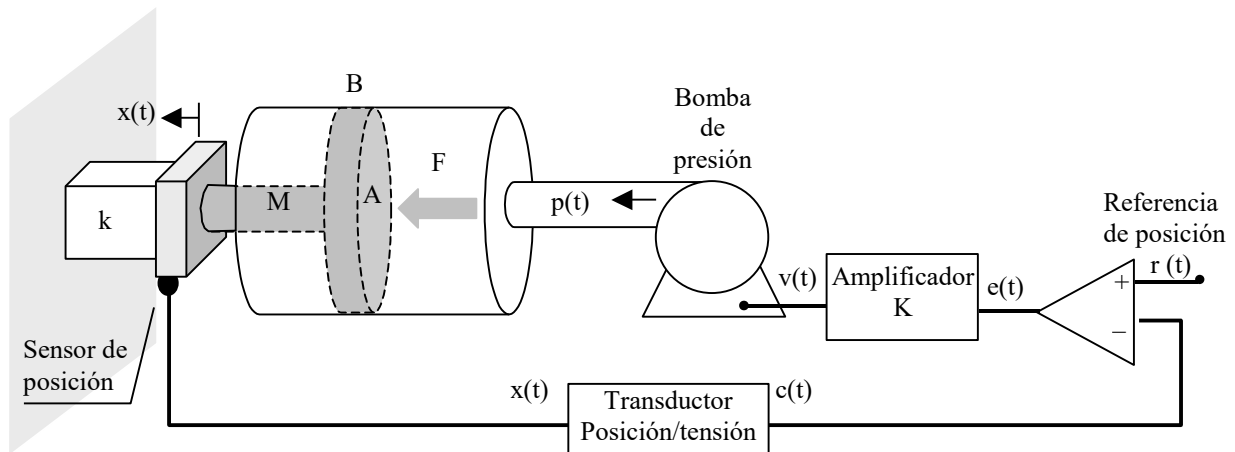
$$K = \left| \frac{s^3 + 9.4s^2 + 34s + 33.6}{30(s + 9)} \cdot \frac{s - 1.219}{s + 1.53} \right|_{s=-1.571+j2.144} = 0.191$$

Con lo que el regulador final es:

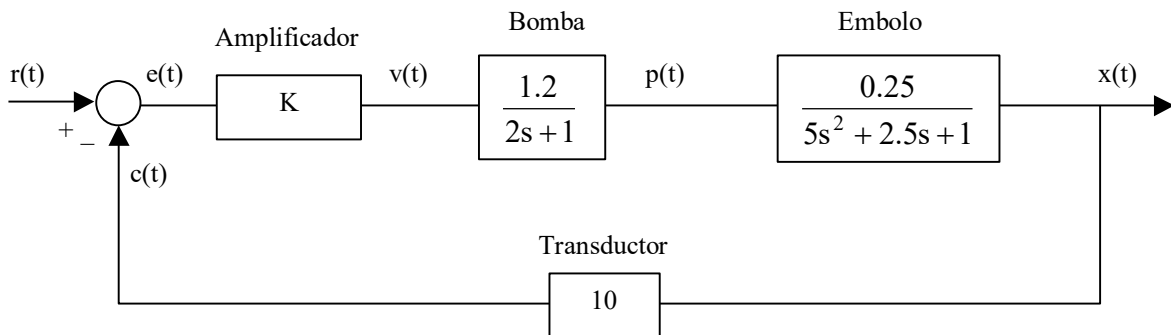
$$D(s) = 0.191 \frac{s + 1.53}{s - 1.219}$$

EJERCICIO 2.4.

El sistema de la figura representa el sistema de control de posición de un émbolo.



Cuyo diagrama de bloques es(ver ref. 9, ej.1.12):



Para este sistema suponiendo que el amplificador K toma el valor 0.6, calcular un regulador tal que el sobreimpulso de la respuesta ante entrada escalón se reduzca a la mitad manteniendo la misma frecuencia natural del sistema.

Para este sistema:

$$G(s) = \frac{1.2}{2s+1} \cdot \frac{0.25}{5s^2+2.5s+1} = \frac{0.3}{10s^3+10s^2+4.5s+1}$$

$$M(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)} = \frac{0.6 \frac{0.3}{10s^3+10s^2+4.5s+1}}{1 + 0.6 \frac{0.3}{10s^3+10s^2+4.5s+1}} = \frac{0.18}{10s^3+10s^2+4.5s+2.8}$$

Los polos de la función de transferencia de lazo cerrado se encuentran en:

$$p_{1,2} = -0.0718 \pm j0.567$$

$$p_3 = -0.856$$

El efecto del polo p_3 es despreciable frente a p_1 y p_2 . Luego para los polos dominantes p_1 y p_2 se calcula la frecuencia natural y el máximo sobreimpulso.

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = -0.0718 \pm j0.567$$

luego:

$$\delta\omega_n = 0.0718$$

$$\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = 0.567$$

despejando:

$$\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} = 0.1266 \quad \delta = 0.1256$$

$$\omega_n = \frac{0.0718}{0.1256} = 0.5717 \text{ rad / s}$$

$$M_p = e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = e^{\frac{-0.1256\pi}{\sqrt{1-0.1256^2}}} = 0.6718 = 67.18\%$$

El sobreimpulso debe reducirse a la mitad: $M_p = \frac{0.6718}{2} = 0.3359$

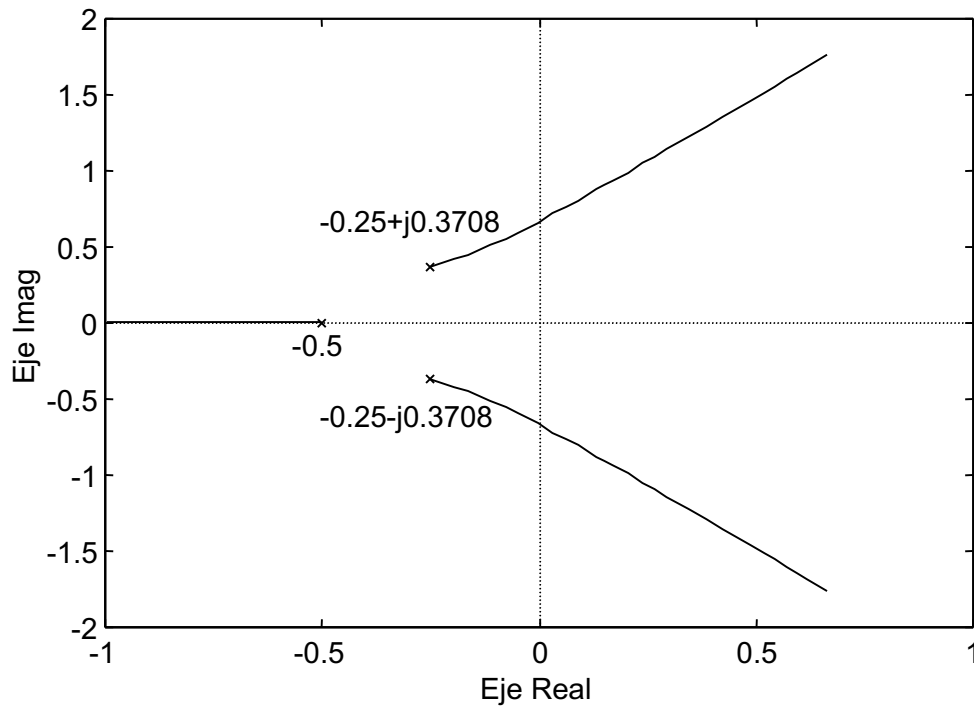
Y la frecuencia natural del sistema debe ser: $\omega_n = 0.5717 \text{ rad/s}$

$$M_p = e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.3359 \quad \delta = 0.328$$

Luego el nuevo punto de funcionamiento será:

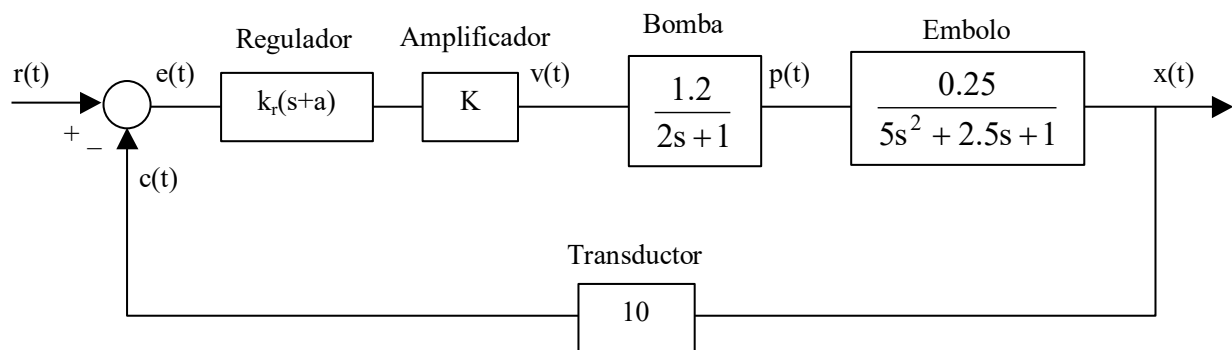
$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = -0.188 \pm j0.540$$

El lugar de las raíces del sistema inicial sin regulador (ver ref. 9, ej. 6.8) tiene la siguiente forma:

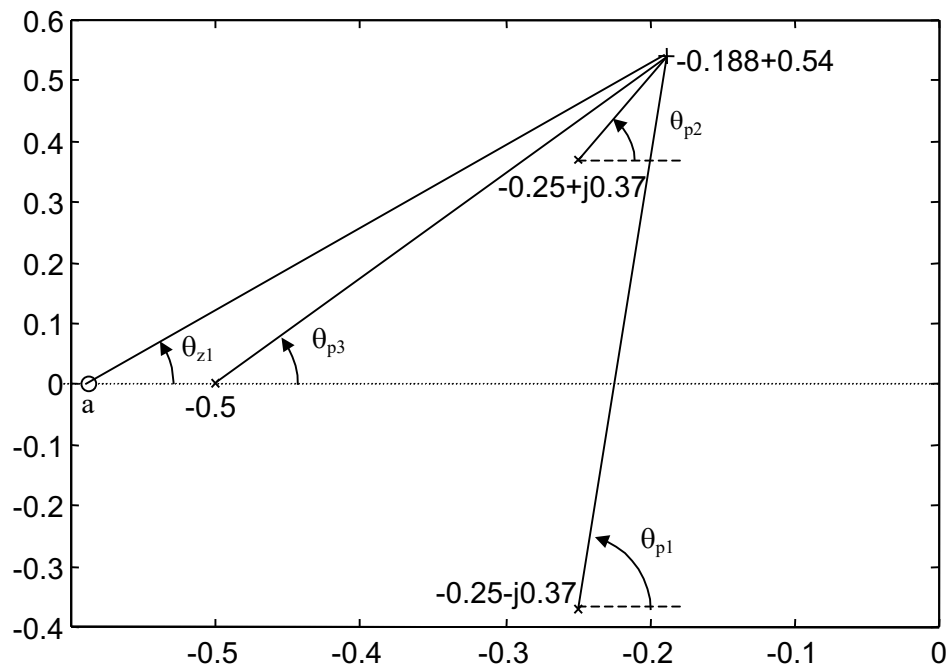


Como puede comprobarse, el lugar de las raíces no pasa por el punto de funcionamiento deseado. Para cumplir las especificaciones deseadas se va a incluir un regulador PD de la forma:

$$R(s) = k_r(s + a)$$



Se aplica ahora el criterio del argumento para ajustar la posición del cero del regulador de forma que el lugar de las raíces total pase por el punto de funcionamiento definido.



$$\theta_{p1} = \arctg \frac{0.54 + 0.37}{0.25 - 0.188} = 86.10^\circ$$

$$\theta_{p2} = \arctg \frac{0.54 - 0.37}{0.25 - 0.188} = 69.96^\circ$$

$$\theta_{p3} = \arctg \frac{0.54}{0.5 - 0.188} = 59.98^\circ$$

$$\sum \theta_{\text{Ceros}} - \sum \theta_{\text{Polos}} = 180^\circ$$

$$\theta_{z1} - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3}) = 180^\circ$$

$$\theta_{z1} - (86.10^\circ + 69.96^\circ + 59.98^\circ) = 180^\circ$$

$$\theta_{z1} = 396.04^\circ = 36.04^\circ$$

$$\tg 36.04^\circ = \frac{0.54}{x}$$

$$x = \frac{0.54}{\tg 36.04^\circ} = 0.742$$

$$a = 0.188 + 0.742 = 0.93$$

Luego el regulador será:

$$R(s) = k_r(s + 0.93)$$

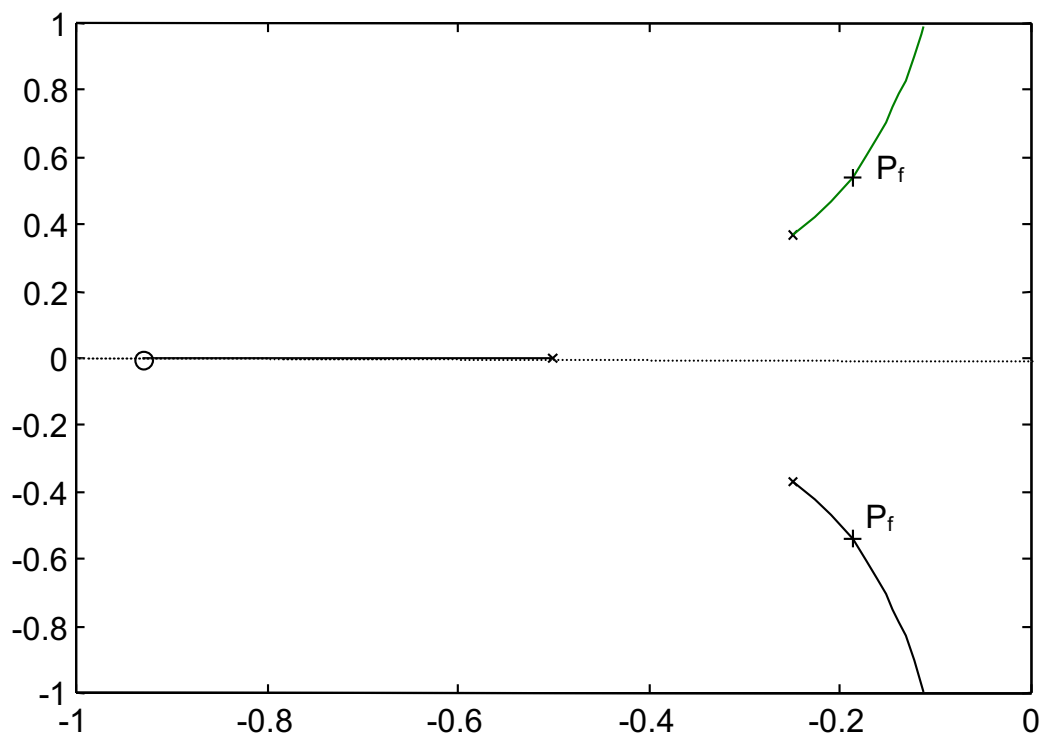
Se ajusta ahora el valor de la ganancia k mediante el criterio del módulo:

$$|k_r| = \left| \frac{10s^3 + 10s^2 + 4.5s + 1}{3 \cdot 0.6 \cdot (s + 0.93)} \right|_{s=-0.188+j0.54} = 0.62$$

Luego el regulador final será:

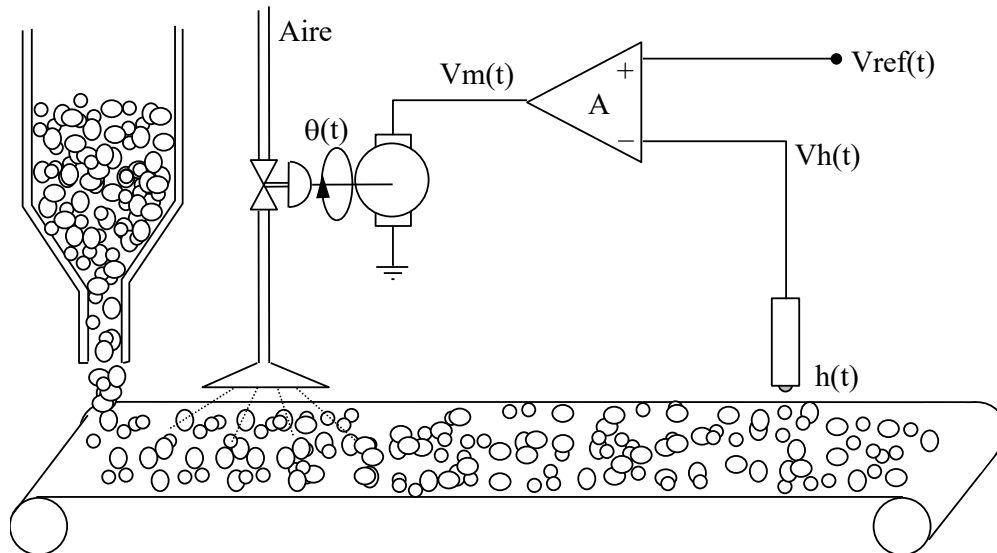
$$R(s) = 0.62(s + 0.93)$$

Si se observa la respuesta del sistema con regulador puede verse cómo pasa por el punto de funcionamiento deseado:



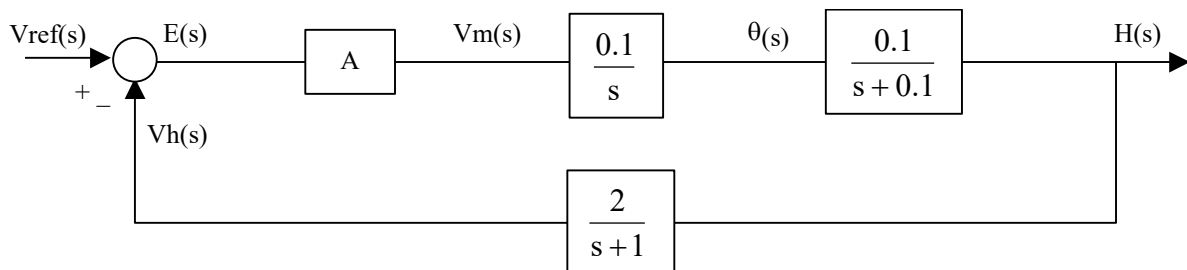
EJERCICIO 2.5.

El siguiente sistema se utiliza para eliminar durante su transporte parte de la humedad de una sustancia que se almacena en un silo:



La señal de error $e(t)$ compara la referencia de humedad $V_{ref}(t)$ con la obtenida del sensor $V_h(t)$, se amplifica por un valor A , y se utiliza $V_m(t)$ como entrada a un motor de CC que actúa sobre una válvula que gobierna el paso de una corriente de aire caliente. La ganancia del amplificador es de A Voltios/Voltio.

El diagrama de bloques que representa el sistema (ver ref. 9, ej. 4.12) es:



Utilizando una ganancia del amplificador A de 50V/V:

Diseñar un regulador tal que el sistema tenga un máximo sobreimpulso del 25% y un tiempo de establecimiento de 10 segundos sin error al escalón. Comentar el éxito de las especificaciones.

En primer lugar se calcula el punto de funcionamiento del sistema para cumplir las condiciones de régimen transitorio pedidas.

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.25 \quad 1.9218(1-\delta^2) = \delta^2\pi^2$$

$$\delta = 0.404$$

$$t_s = \frac{\pi}{\sigma} = 10 \text{ s} \quad \sigma = \frac{\pi}{10}$$

$$\sigma = 0.314$$

$$\sigma = \delta \cdot \omega_n \quad \omega_n = \frac{\sigma}{\delta} = \frac{\pi}{10 \cdot 0.404} = 0.778 \text{ rad/s}$$

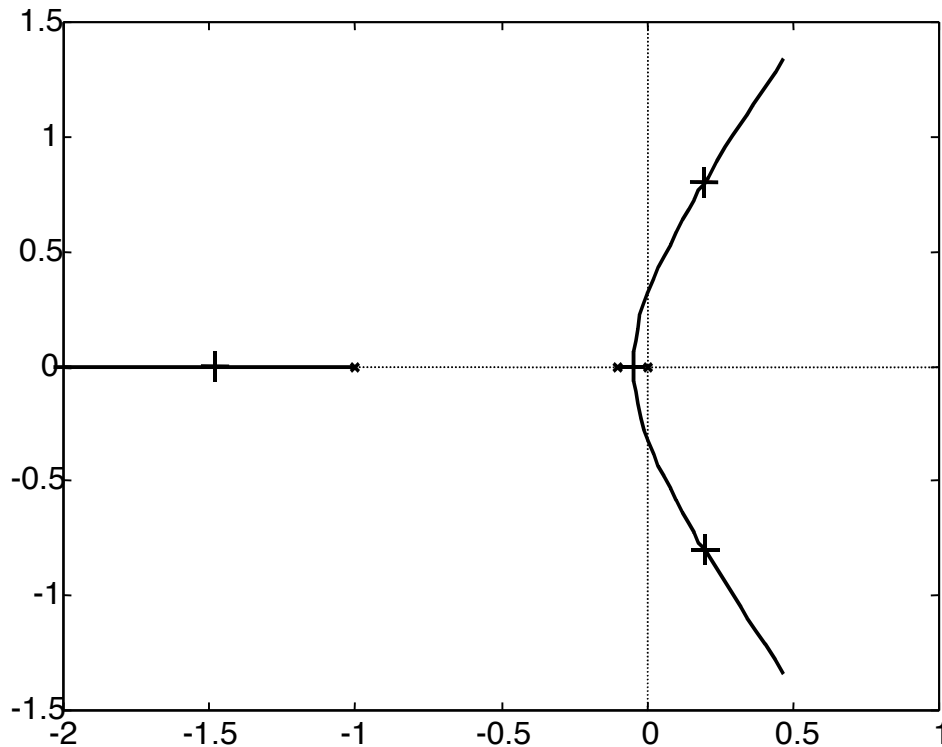
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} = 0.778 \sqrt{1 - 0.404^2}$$

$$\omega_d = 0.7117 \text{ rad/s}$$

El punto de funcionamiento será:

$$p_{1,2} = -0.314 \pm j0.712$$

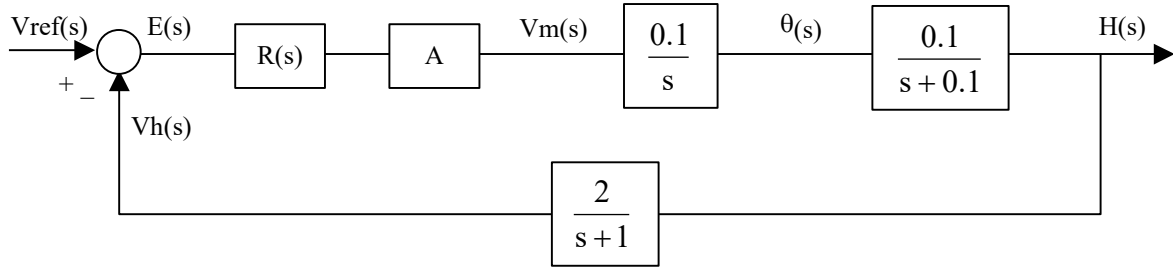
En la siguiente figura se ha representado el lugar de las raíces de este sistema inicial (ver ref. 9, ej. 6.9). En dicho diagrama puede comprobarse que para $A=50$ el sistema presenta un comportamiento inestable.



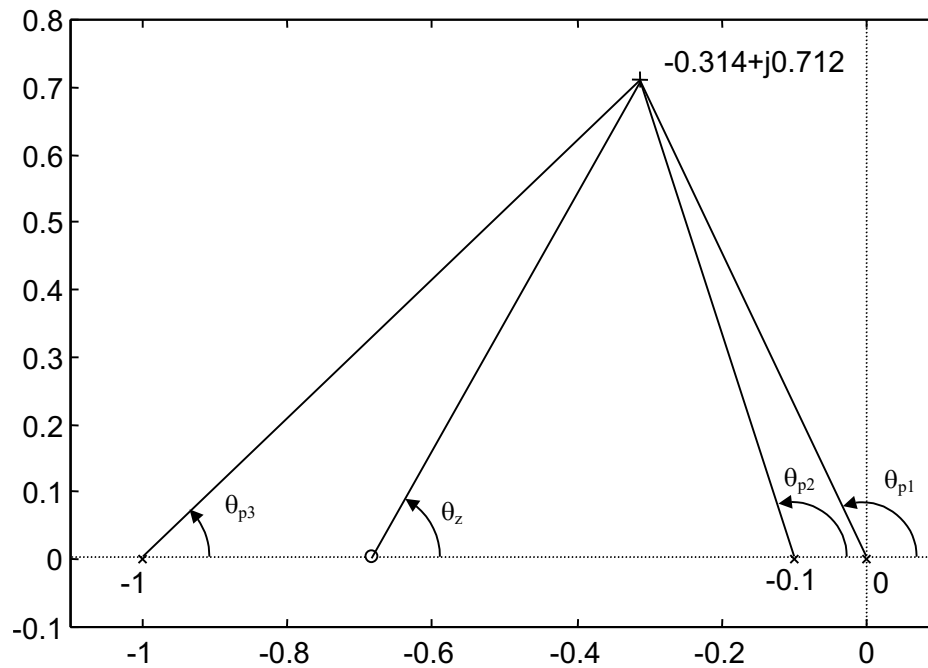
El sistema es de tipo 1 por tanto presenta error cero al escalón. Con un regulador tipo PD se pueden alcanzar las especificaciones:

$$R(s) = K_r(s + b)$$

Incluyendo el regulador en el diagrama de bloques del sistema inicial, el sistema quedará como se muestra en la siguiente figura:



Se aplican ahora los criterios definidos para el cálculo de reguladores por medio del lugar de las raíces para diseñar el regulador $R(s)$.



$$\theta_{p1} = 180^\circ - \arctg \frac{0.712}{0.314} = 113.8^\circ$$

$$\theta_{p2} = 180^\circ - \arctg \frac{0.712}{0.314 - 0.1} = 106.729^\circ$$

$$\theta_{p2} = \arctg \frac{0.712}{1 - 0.314} = 46.065^\circ$$

Se comprueba que el punto de funcionamiento no pertenece al lugar de las raíces inicial:

$$\theta = -113.8^\circ - 106.729^\circ - 46.065^\circ = -266.6^\circ \neq 180^\circ$$

Se introduce el cero del regulador y se aplica el criterio del argumento para calcular su posición.

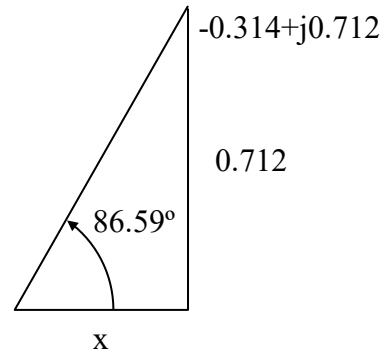
$$\theta_z - (113.8^\circ + 106.729^\circ + 46.065^\circ) = 180^\circ$$

$$\theta_z = 446.59^\circ = 86.59^\circ$$

$$\operatorname{tg} 86.59^\circ = \frac{0.712}{x}$$

$$x = 0.0424$$

$$b = 0.314 + 0.0424 = 0.3564$$



$$R(s) = K_r(s + 0.3564)$$

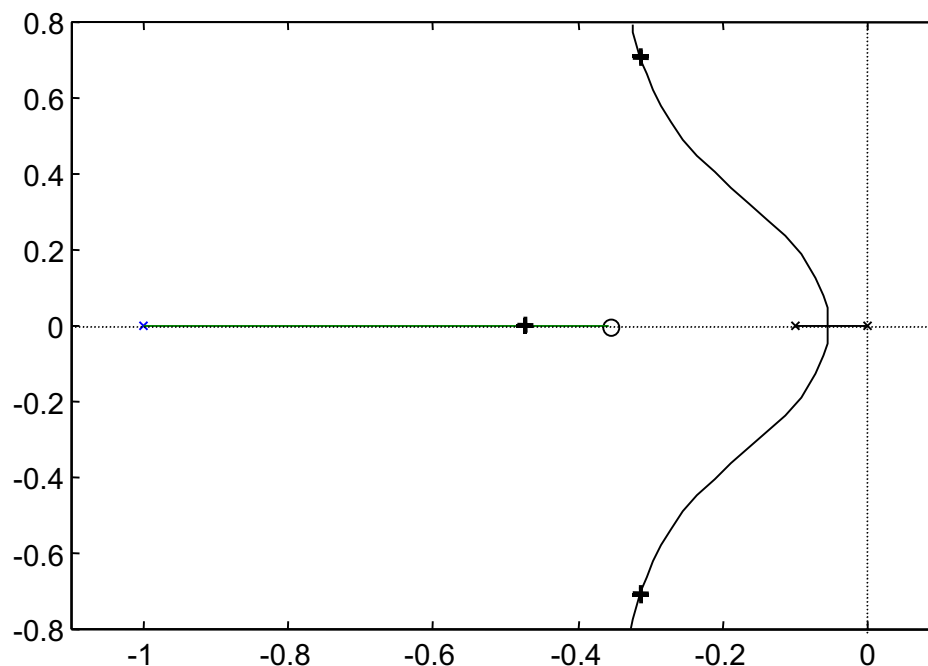
Aplicando el criterio del módulo se ajusta el valor de la ganancia:

$$|K_r| = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \left| \frac{s(s+0.1)(s+1)}{0.02 \cdot 50 \cdot (s+0.3564)} \right|_{s=-0.314+j0.712} = 0.80$$

Luego el regulador será:

$$R(s) = 0.8(s + 0.3564)$$

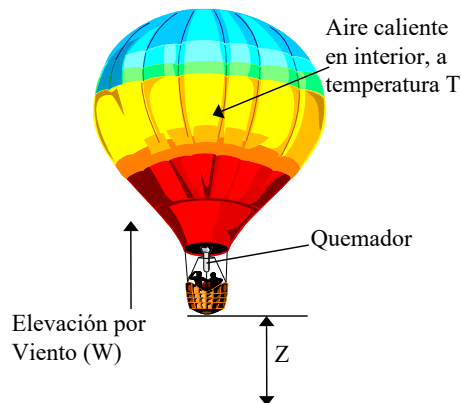
La siguiente figura muestra la forma del lugar de las raíces con el regulador:



En esta figura puede verse cómo el lugar de las raíces sí que pasa por el punto de funcionamiento deseado, pero ahora la influencia del polo contenido en la rama existente entre -0.3564 y -1 ya no es despreciable frente a los polos complejos conjugados dada su proximidad. Por tanto las especificaciones no se cumplirán totalmente debido a la influencia de este tercer polo.

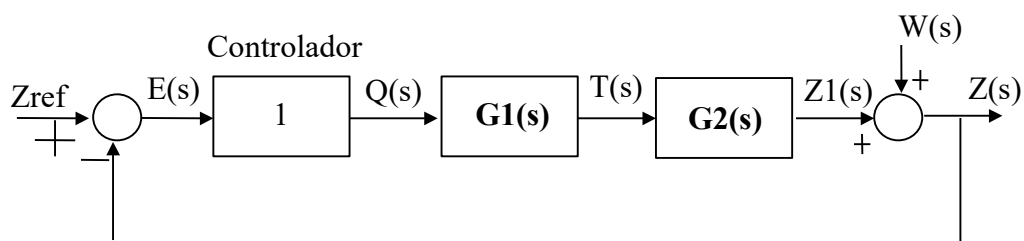
EJERCICIO 2.6.

Se desea diseñar un controlador de altura para un globo aerostático.



Para ello se dispone de un altímetro, cuya función de transferencia es la unidad, y de la dinámica del sistema que, debido a la dificultad de encontrar las ecuaciones con precisión, se ha obtenido en base a varios experimentos.

El diagrama de bloques del sistema es (ver ref. 9, ej. 4.14):



$$G_1(s) = \frac{T(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s+5} \quad G_2(s) = \frac{Z_1(s)}{T(s)} = \frac{0.3}{s(s+50)}$$

Considerando nula la Perturbación.

- Si se requiere que el sistema funcione como uno de 2º orden con los polos en $-30 \pm 30j$, ¿Que características transitorias se están exigiendo?
- Diseñar, por el lugar de las raíces, un controlador PID que permita que el funcionamiento citado en el punto anterior, así como un error de velocidad menor de 10.

Si se requiere que el sistema funcione como uno de 2º orden con los polos en el punto $-30 \pm 30j$, las especificaciones transitorias serán:

$$\theta = 45^\circ (0.785\text{rad}); \quad \delta = \cos(45^\circ) = 0.707$$

$$\omega_n = \sqrt{30^2 + 30^2} = 42.43\text{rad/s}; \quad \omega_d = 30\text{rad/s}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = e^{-\frac{\pi \cdot 0.707}{\sqrt{1-0.707^2}}} = 4.32\%$$

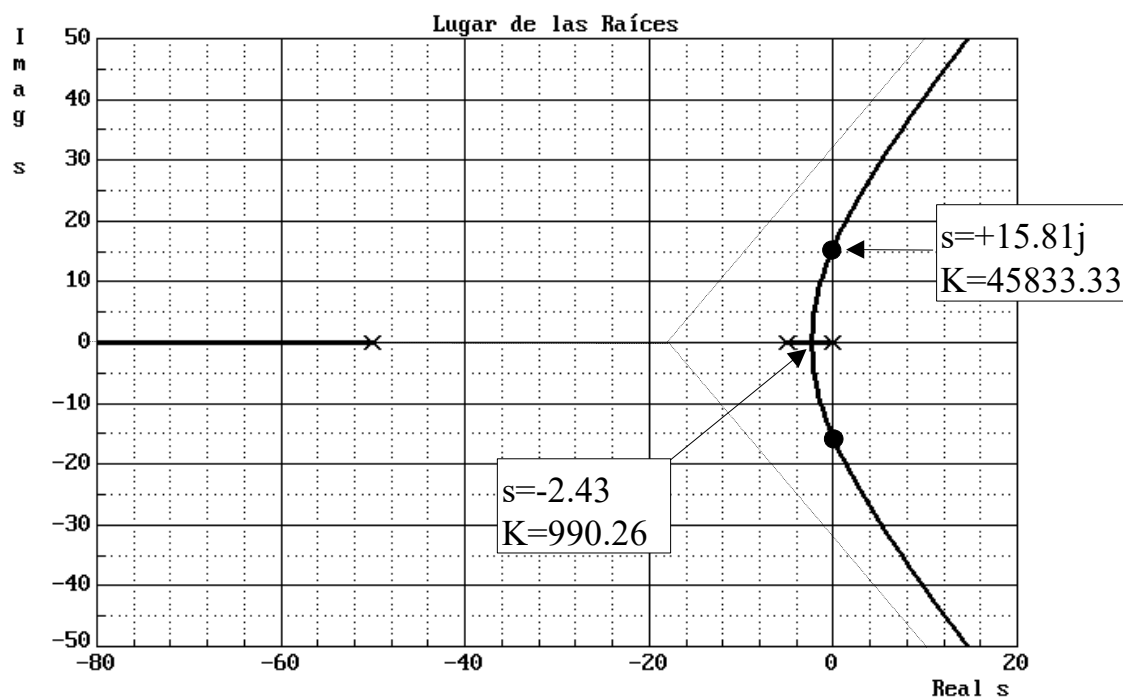
$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - 0.785}{30} = 0.078s$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0.104s$$

$$t_s = \frac{\pi}{\delta \cdot \omega_n} = \frac{\pi}{0.707 \cdot 30} = 0.104s$$

Se va a diseñar ahora un controlador PID que permita cumplir las condiciones de funcionamiento indicadas, así como presentar un error de velocidad menor de 10.

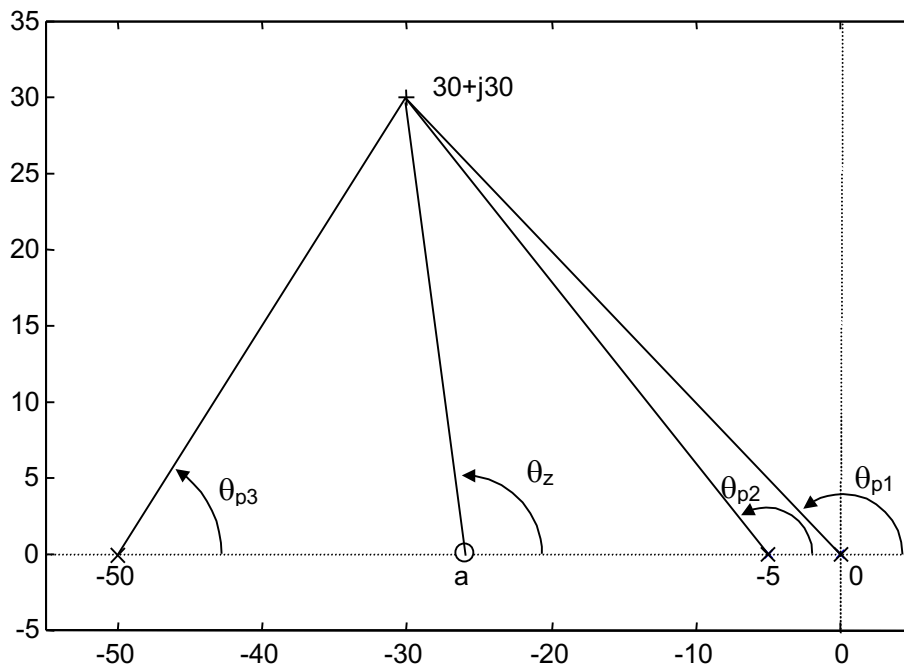
El lugar de las raíces del sistema inicial es (ver ref. 9, ej. 6.11):



El punto de funcionamiento es el $-30 \pm 30j$.

Se añade en primer lugar un regulador PD de la forma: $G_c(s) = K(s + a)$

Aplicando el criterio del argumento se obtiene la posición de a:



$$\theta_{p1} = 180^\circ - \arctg \frac{30}{30} = 135^\circ$$

$$\theta_{p2} = 180^\circ - \arctg \frac{30}{30 - 5} = 129.8^\circ$$

$$\theta_{p3} = \arctg \frac{30}{50 - 30} = 56.3^\circ$$

$$\sum \text{Ceros} - \sum \text{Polos} = 180^\circ$$

$$\theta_z - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3}) = 180^\circ$$

$$\theta_z - (135^\circ + 129.8^\circ + 56.3^\circ) = 180^\circ$$

$$\theta_z = 501.1^\circ = 141.1^\circ$$

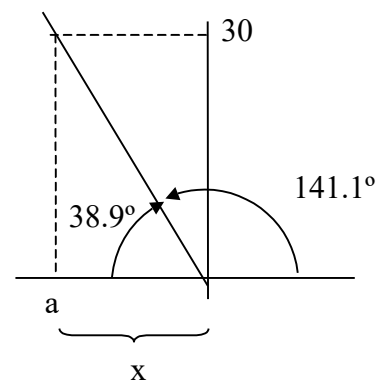
$$\tg 38.9^\circ = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30}{\tg 38.9^\circ} = 37.2$$

$$a = -30 + 37.2 = 7.2$$

Luego el regulador será de la forma:

$$G_c(s) = K(s - 7.2)$$

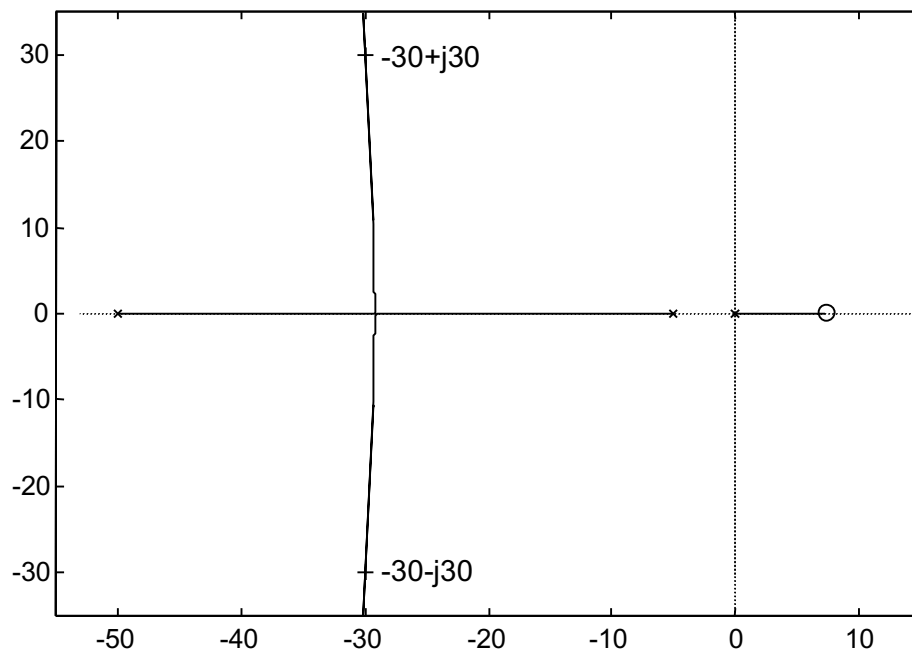


Ajustamos la ganancia por el criterio del módulo:

$$K = \left| \frac{1}{G(s) \cdot R(s)} \right|_{s=-30+j30} = \left| \frac{s(s+5)(s+50)}{0.3(s-7.2)} \right|_{s=-30+j30} = 4166.7$$

Luego el regulador total será: $G_c(s) = 4166.7(s - 7.2)$

Al tener este regulador un cero inestable, se comprueba la forma del lugar de las raíces con el regulador para ver cómo afecta esa rama que termina en el cero inestable. Dibujando el lugar del sistema compensado se tiene:



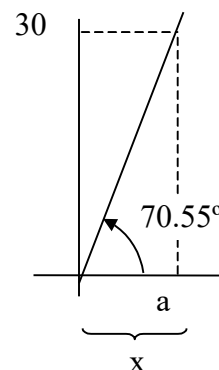
Puede verse que el lugar pasa por el punto de funcionamiento, pero la inserción del regulador ha modificado la forma original del lugar de las raíces de tal modo que aparece una rama cuyo polo correspondiente es inestable para cualquier valor de K . Por tanto, este regulador no es válido.

Una posible forma de resolverlo es añadiendo dos PDs idénticos en lugar de uno. De este ángulo que debe proporcionar cada uno de los reguladores corresponde con la mitad del calculado anteriormente. Cada uno de los PDs aportará:

$$\theta_{z1} = \theta_{z2} = \frac{141.1^\circ}{2} = 70.55^\circ$$

$$\tan 70.55^\circ = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30}{\tan 70.55^\circ} = 10.59$$



$$a = -30 - 10.59 = -40.59$$

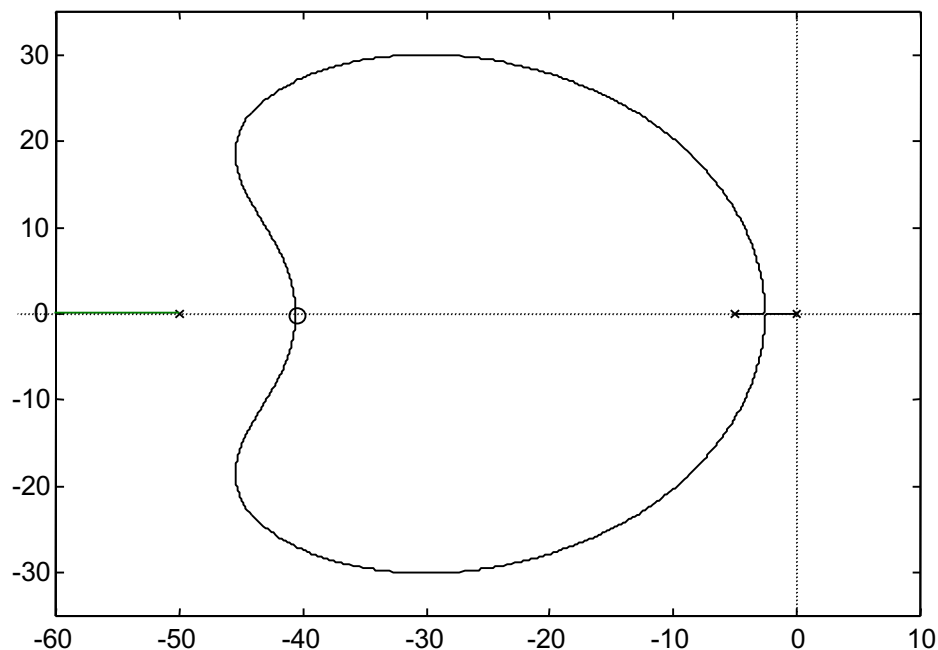
Ajustamos de nuevo la K:

$$K = \left| \frac{1}{G(s) \cdot R(s)} \right|_{s=-30+j30} = \left| \frac{s(s+5)(s+50)}{0.3(s+40.59)^2} \right|_{s=-30+j30} = 196.73$$

Luego finalmente el regulador será:

$$G_c(s) = 196.73(s + 40.59)^2$$

Comprobando ahora la forma que presenta el lugar de las raíces se puede observar que el regulador no añade ningún polo dominante ni inestable al sistema a parte de los de las especificaciones:



Se comprueban ahora las condiciones de error de velocidad:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot G_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{0.3}{s(s+5)(s+50)} \cdot 196.73(s+40.59)^2 = \frac{0.3 \cdot 196.73 \cdot 40.59}{5 \cdot 50} = 9.58$$

$$e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{9.58} = 0.10$$

Luego cumple la condición de error solicitada. En el caso de que no se cumpliera, sería necesario incluir un regulador PI para eliminar el error.

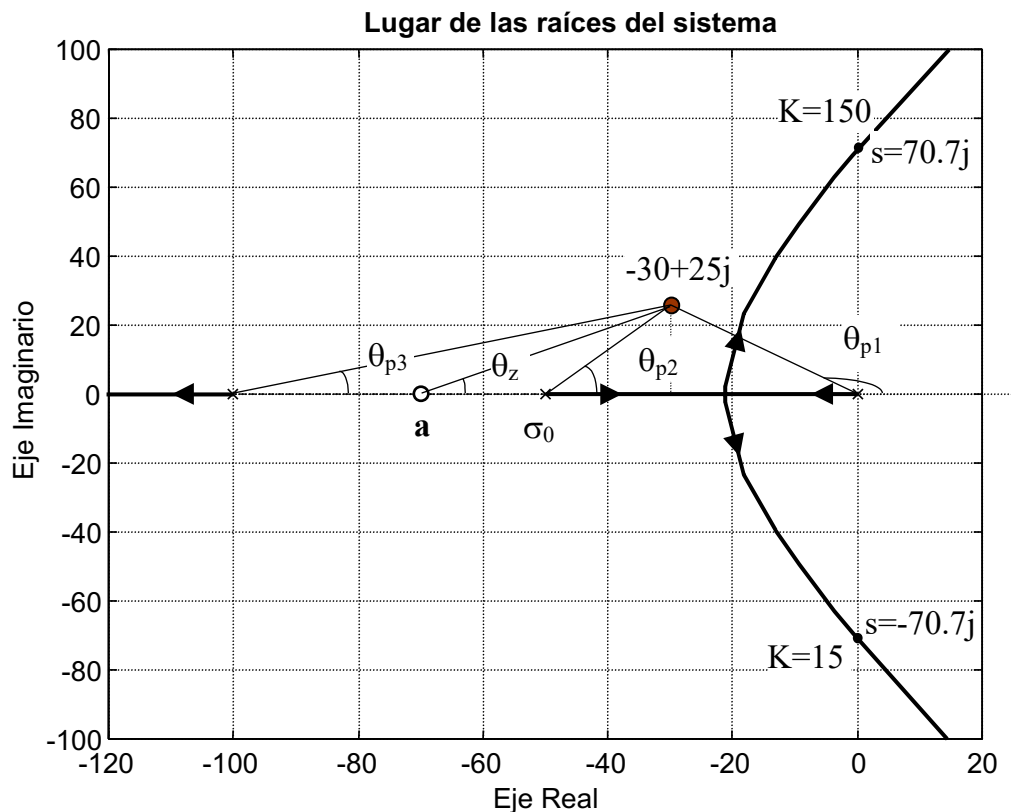
EJERCICIO 2.7.

Un sencillo sistema de control está formado por un sensor de función de transferencia unidad, un controlador proporcional de ganancia ajustable K y una planta cuya función de transferencia es la siguiente:

$$G(s) = \frac{1}{s(1 + 0.02s)(1 + 0.01s)}$$

Se dispone de un único controlador PID, por el que se desea sustituir K , y se quiere que el funcionamiento en lazo cerrado sea el equivalente a un sistema de segundo orden con los polos en $-30 \pm 25j$ y error en régimen permanente igual a cero. Calcular dicho controlador.

Si se dibuja el lugar de las raíces del sistema (ver ref. 9, ej. 6.14) y se sitúa el punto de funcionamiento deseado puede observarse que no pasa por el lugar de las raíces, por lo que con un simple regulador proporcional no sirve.



Se incluye en primer lugar un regulador PD para cumplir las especificaciones de régimen transitorio pedidas:

$$C_1(s) = K(s + a)$$

Aplicando el criterio del argumento para que el punto de funcionamiento pertenezca al nuevo lugar de las raíces:

$$\theta_{p1} = 180^\circ - \arctg \frac{25}{30} = 180^\circ - 39.81^\circ = 140.19^\circ$$

$$\theta_{p2} = \arctg \frac{25}{20} = 51.34^\circ$$

$$\theta_{p3} = \arctg \frac{25}{70} = 19.65^\circ$$

$$\theta_z - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = 180^\circ$$

$$\theta_z = 180^\circ + 140.19^\circ + 51.34^\circ + 19.65^\circ = 391.18^\circ = 31.18^\circ$$

luego:

$$\operatorname{tg} 31.18^\circ = \frac{25}{a-30} \Rightarrow a-30 = \frac{25}{\operatorname{tg} 31.18^\circ} \Rightarrow a = 41.31 + 30 = 71.31$$

Se tiene:

$$C_1(s) = K(s + 71.31)$$

Para calcular K aplicamos el criterio del módulo en el punto de funcionamiento:

$$K = \left| \frac{s(s+50)(s+100)}{5000(s+71.31)} \right|_{s=-30+25j} = \frac{|-30+25j| |-30+25j+50| |-30+25j+100|}{5000 |-30+25j+71.31|}$$

$$K = \frac{38.82 \cdot 32.02 \cdot 74.33}{5000 \cdot 48.29} = 0.383$$

$$C_1(s) = 0.383 (s + 71.31)$$

Es necesario incluir un regulador PI, ya que se requiere que el error en régimen permanente sea nulo:

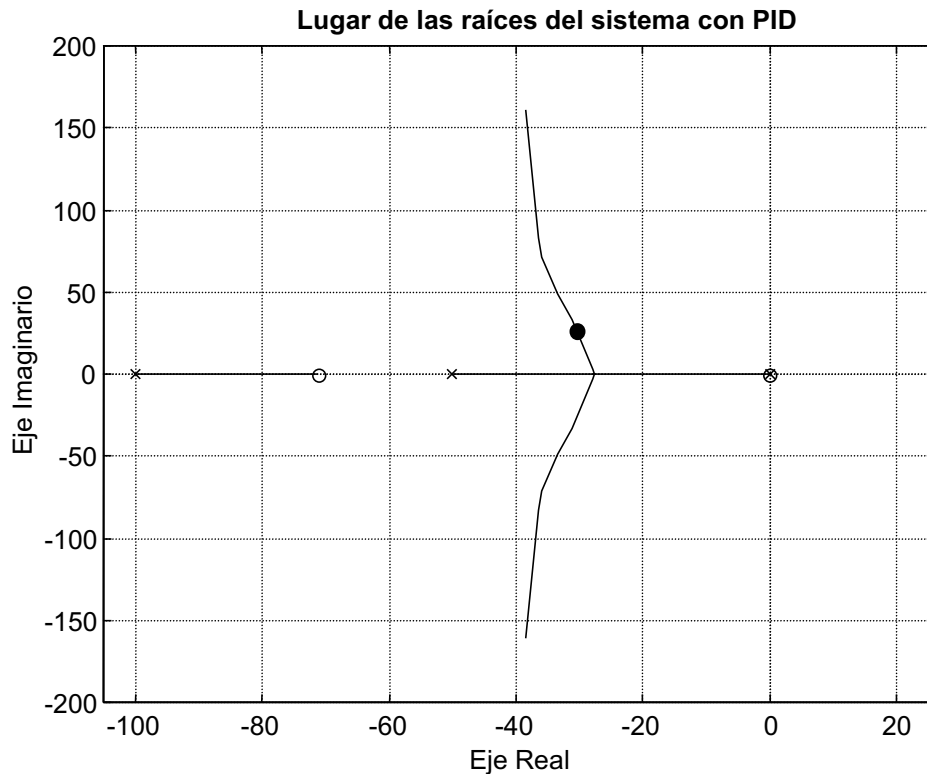
$$C_2(s) = \frac{(0.1+s)}{s}$$

Se sitúa el polo y el cero del regulador PI suficientemente próximos para que no modifique la forma del lugar de las raíces obtenido con el regulador PD.

El regulador PID será la unión de los dos reguladores PD y PI calculados:

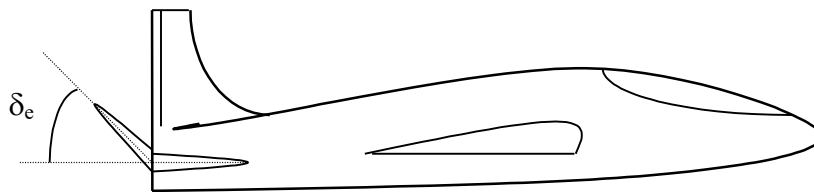
$$C(s) = 0.383 \frac{(s+71.31)(0.1+s)}{s}$$

El lugar de las raíces del sistema con regulador se muestra en la figura, donde puede comprobarse que el lugar de las raíces pasa por el punto de funcionamiento deseado.



EJERCICIO 2.8.

La función de transferencia que liga la posición del alerón trasero del aeroplano de la figura con el ángulo de inclinación (pitch) del aparato es la que se muestra a continuación:

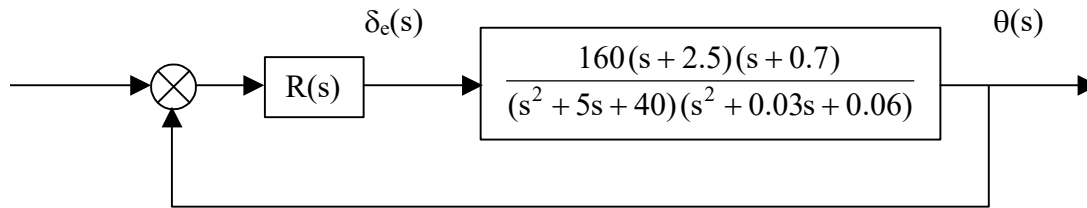


$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{160(s + 2.5)(s + 0.7)}{(s^2 + 5s + 40)(s^2 + 0.03s + 0.06)}$$

Se desea realizar un piloto automático para controlar la inclinación del avión $\theta(s)$. Para ello se decide utilizar un sistema de control de lazo cerrado, usando como medida de la inclinación del aparato la señal aportada por un giróscopo que actuará como un sensor de función de transferencia unidad, y un controlador de configuración serie.

Calcular una red compensadora que permita al sistema funcionar como si fuese de segundo orden con un sobreimpulso del 10% y un tiempo de subida de 1 segundo, indicando qué tipo de controlador se ha seleccionado y por qué. Dibujar el diagrama de bloques del sistema.

El lazo de control es de la forma:



Con los datos dados sobre la forma de la respuesta del sistema se busca el punto de funcionamiento:

$$M_p = e^{-\frac{\pi \cdot \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 10\% = 0.1 \Rightarrow \ln 0.1 = -2.3026 = -\frac{\pi \cdot \delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \Rightarrow \delta = 0.5912$$

por lo que: $\cos \theta = \delta = 0.5912 \Rightarrow \theta = 53.761^\circ$

y el tiempo de subida:

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = 1 \text{ seg} = \frac{2.2033}{\omega_d} \Rightarrow \omega_d = 2.2033 \text{ rad/seg}$$

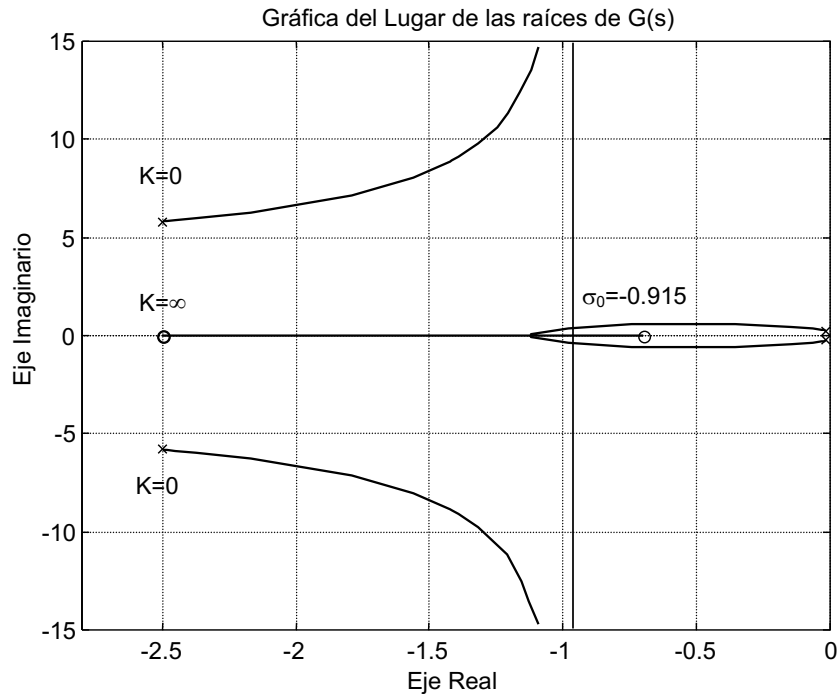
Luego el punto de funcionamiento: $P_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_d$, será:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\delta^2} \Rightarrow \omega_n = 2.7318 \text{ rad/seg}$$

luego:

$$P_{1,2} = -1.615 \pm 2.2033j$$

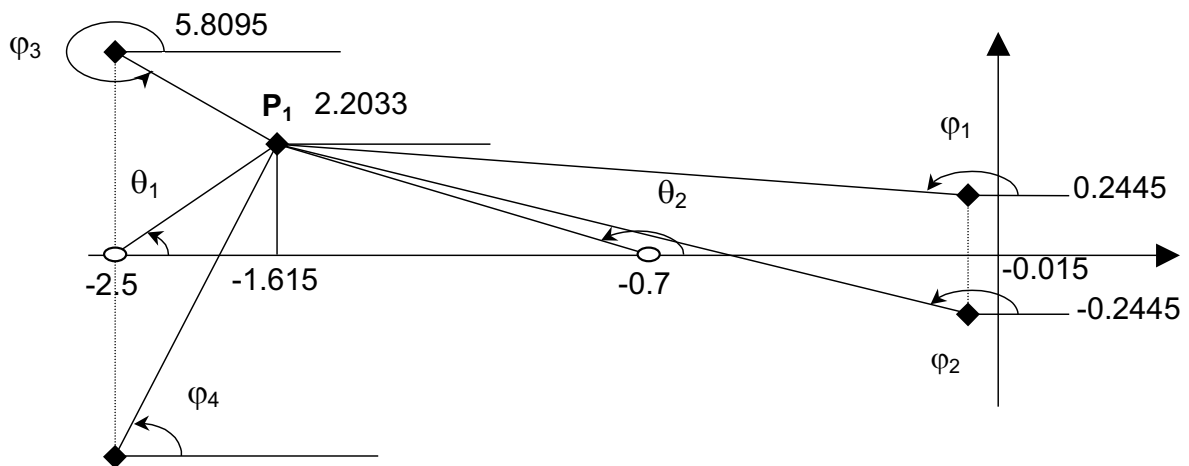
Situando este punto sobre el diagrama del lugar de las raíces puede verse que el lugar no pasa por dicho punto de funcionamiento, luego no servirá un compensador proporcional. Se halla entonces el ángulo que debe proporcionar el compensador:



Como no se pide ninguna especificación de errores, se comienza probando con una red de avance de fase.

$$\angle G_c(s) + \theta_1 + \theta_2 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = 180^\circ$$

Sustituyendo el valor de los ángulos de acuerdo con la figura siguiente:



$$\theta_1 = \arctan \frac{2.2033}{2.5 - 1.615} = 68.1161^\circ$$

$$\theta_2 = 180^\circ - \arctan \frac{2.2033}{1.615 - 0.7} = 112.5524^\circ$$

$$\varphi_1 = 180^\circ - \arctan \frac{2.2033 - 0.2445}{1.615 - 0.015} = 129.2429^\circ$$

$$\varphi_2 = 180^\circ - \arctan \frac{2.2033 + 0.2445}{1.615 - 0.015} = 123.1706^\circ$$

$$\varphi_3 = 360^\circ - \arctan \frac{5.8095 - 2.2033}{2.5 - 1.615} = 283.7885^\circ$$

$$\varphi_4 = \arctan \frac{5.8095 + 2.2033}{2.5 - 1.615} = 83.6973^\circ$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

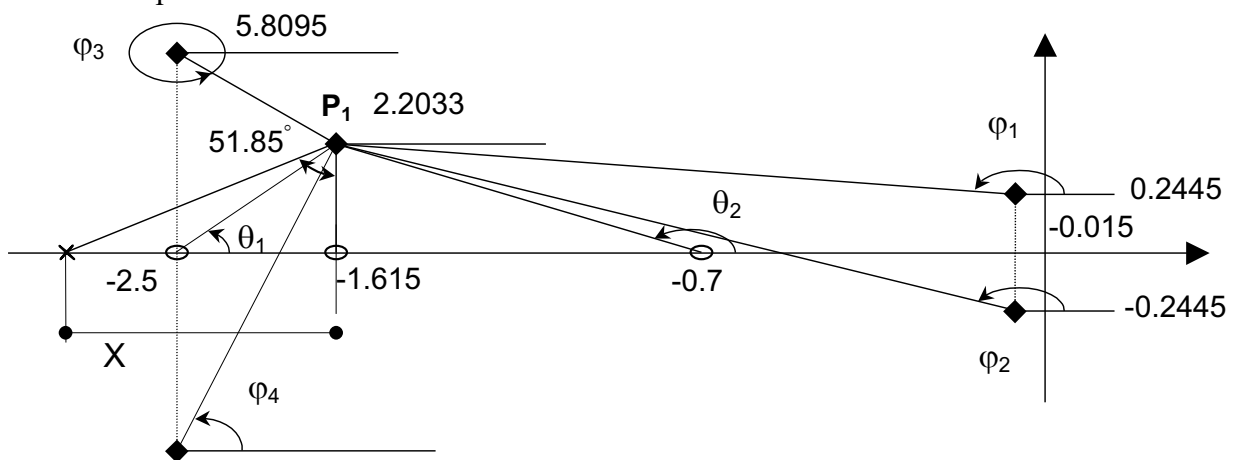
$$\angle G_c(s) + 68.1161 + 112.5524 - 129.2429 - 123.1706 - 283.7885 - 83.6973 = 180$$

$$\angle G_c(s) = 619.23^\circ = 259.23^\circ$$

Este ángulo es demasiado elevado para poder proporcionarlo una sola red de avance. Una posible solución puede ser utilizar 5 redes idénticas, de tal forma que cada elemento aporte 51.85° .

$$\frac{259.23^\circ}{5} = 51.85^\circ$$

Se utiliza el criterio de situar el cero del regulador en la intersección con el eje real de la vertical del punto P_1 .



$$\tan 51.85^\circ = \frac{x}{2.2033} \Rightarrow x = 2.8049 \quad \text{luego:} \quad \begin{array}{l} \text{cero: } -1.615 \\ \text{polo: } -4.42 \end{array}$$

Se calcula ahora la K_r del compensador. Aplicando el criterio del módulo al punto P_1 , en el sistema compensado:

$$\text{La nueva ecuación característica es: } 1 + G_c(s) \cdot G(s) = 0$$

sustituyendo se tendrá:

$$1 + K_r \left(\frac{s + 1.615}{s + 4.42} \right)^5 \frac{160(s + 2.5)(s + 0.7)}{(s^2 + 5s + 40)(s^2 + 0.03s + 0.06)} = 0$$

Criterio del módulo en P_1 :

$$1 = K_r \frac{|-1.615 + 2.2033j + 1.615|^5}{|-1.615 + 2.2033j + 4.42|^5} \cdot \frac{160|-1.615 + 2.2033j + 2.5||-1.615 + 2.2033j + 0.7|}{|(-1.615 + 2.2033j)^2 + 5(-1.615 + 2.2033j) + 40| \cdot |(-1.615 + 2.2033j)^2 + 0.03(-1.615 + 2.2033j) + 0.06|}$$

$$1 = K_r \frac{51.924}{577.3457} \cdot \frac{160 \cdot 2.3744 \cdot 2.3857}{|7.4628 - 8.075 + 11.0165j + 40| |7.4628 - 0.0485 + 0.0661j + 0.06|}$$

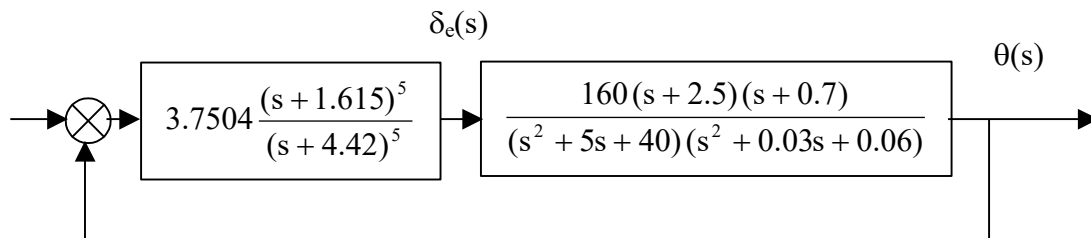
$$1 = K_r \frac{51.924}{577.3457} \cdot \frac{906.337}{40.8994 \cdot 7.4746} = K_r \frac{47060.6424}{176498.4228} = K_r \cdot 0.2666$$

$$K_r = 3.7504$$

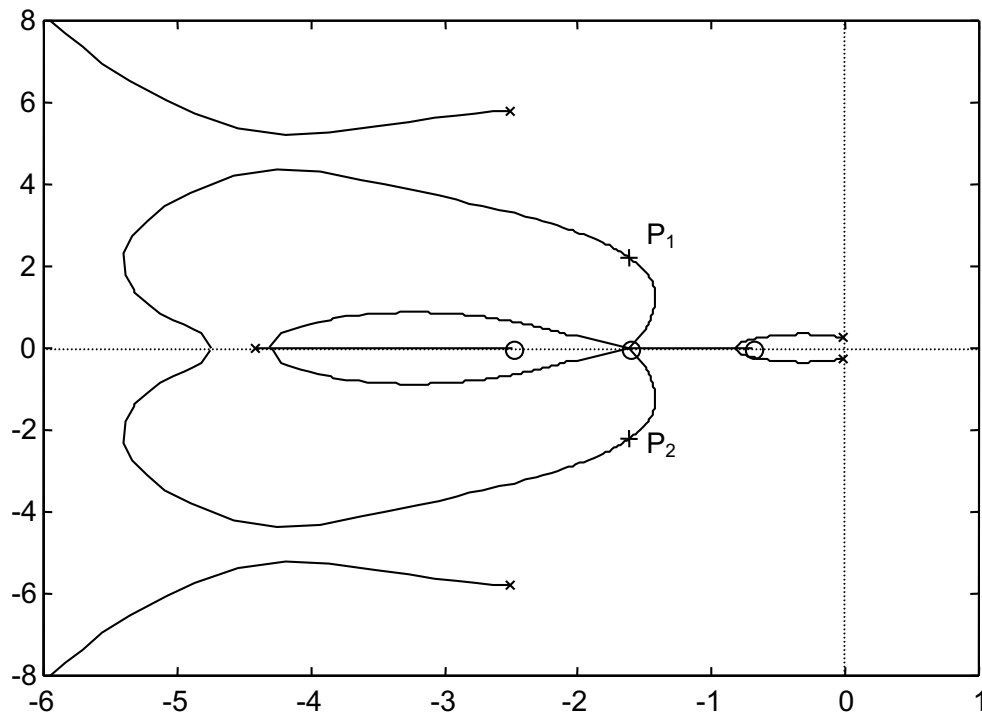
Luego el regulador quedará:

$$G_c(s) = 3.7504 \left(\frac{s + 1.615}{s + 4.42} \right)^5$$

y el diagrama de bloques del sistema compensado:



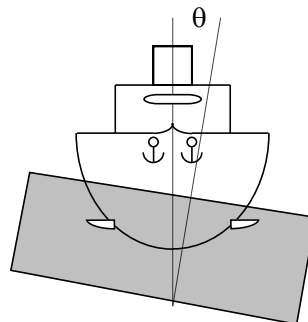
El lugar de las raíces del sistema compensado se representa a continuación.



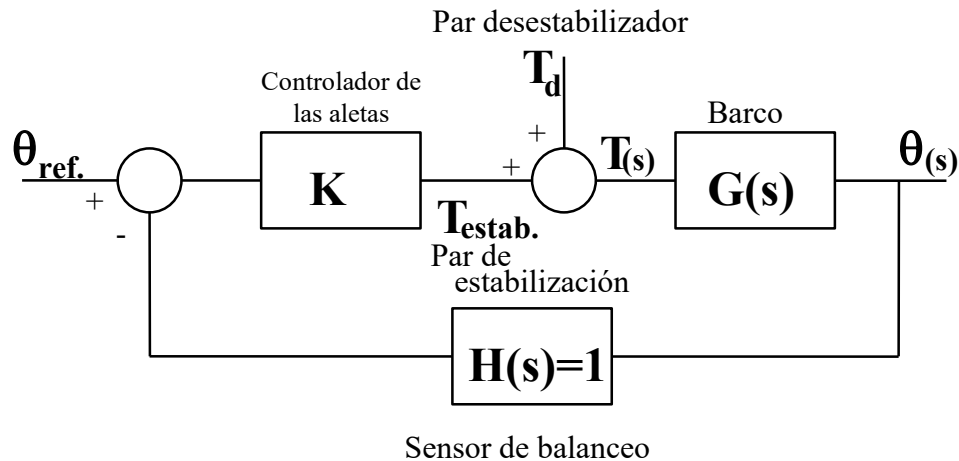
Como puede verse en la figura, el lugar de las raíces del sistema compensado pasa por el punto de funcionamiento deseado, pero la respuesta del sistema no va a cumplir exactamente las especificaciones debido a la existencia de un par de polos conjugados más próximos al origen.

EJERCICIO 2.9.

Para garantizar la comodidad de los pasajeros en los barcos, estabilizando las oscilaciones producidas por las olas, se suelen disponer unas aletas móviles que permiten generar un momento de torsión de estabilización (mayor o menor en función de la superficie horizontal que presenten estas aletas).



Para conseguir reducir el balanceo a unos límites aceptables se introduce el sistema de control que muestra la figura.



Por otro lado, el movimiento de balanceo del barco puede considerarse como un péndulo oscilante con una desviación de θ grados en torno a la vertical, de forma que la función de transferencia de la dinámica del barco es de la forma siguiente:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{4}{s^2 + 0.4s + 4}$$

Siendo:

$\theta(s)$: el ángulo de giro del barco respecto a la vertical
 $T(s)$: el par aplicado al barco.

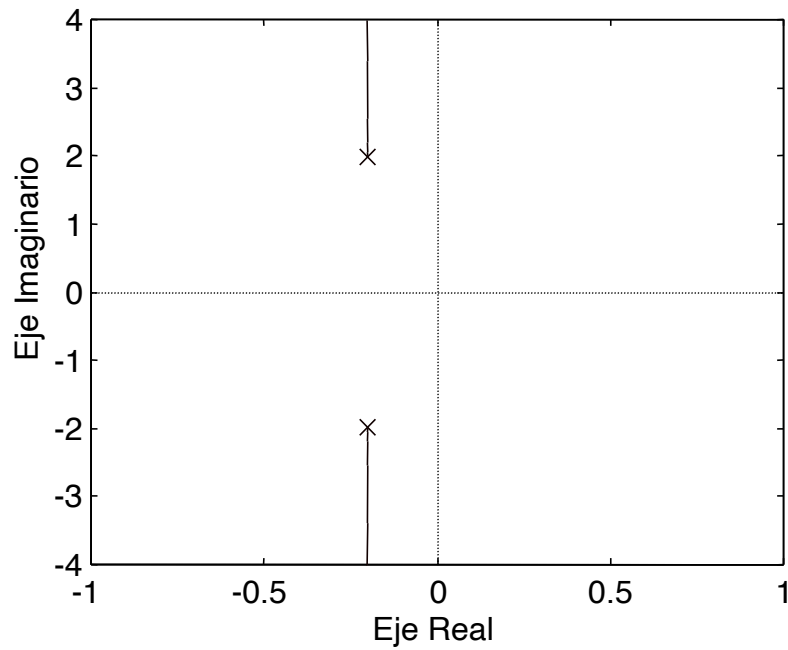
Diseñar un regulador mediante el lugar de las raíces que proporcione una respuesta ante un escalón unidad, del par desestabilizador, similar a la de un sistema de segundo orden con un sobreimpulso de 4.3% y un tiempo de establecimiento de 3 segundos. Comprobar si el sistema resultante es estable. Calcular el error en estado estacionario del sistema ante una entrada unidad de la señal de posición de referencia.

Nota: La señal de referencia de posición del barco coincide con los ceros grados.

La función de transferencia del sistema respecto a la entrada de perturbación es:

$$M_2(s) = \frac{\theta(s)}{T_d(s)} = \frac{G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{\frac{4}{s^2 + 0.4s + 4}}{1 + K \frac{4}{s^2 + 0.4s + 4}} = \frac{4}{s^2 + 0.4s + 4 + 4K}$$

Y su lugar de las raíces se representa en la siguiente figura (ver ref. 9, ej. 6.16):



$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.043$$

$$\ln 0.043 = -\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}} \quad 9.9(1-\delta^2) = \pi^2\delta^2$$

$$9.9 - 9.9\delta^2 = \pi^2\delta^2 \quad (9.9 + \pi^2)\delta^2 = 9.9$$

$$\delta = 0.707$$

$$\theta = \arccos(0.707) = 45^\circ$$

$$t_s = \frac{\pi}{\delta\omega_n} = 3\text{seg}$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{3\delta} = 1.48\text{rad/seg}$$

$$\delta\omega_n = \frac{\pi}{3} = 1.047$$

$$p_{1,2} = -1.047 \pm j1.047$$

Puede comprobarse que el lugar de las raíces del sistema no pasa por el punto de funcionamiento. Por lo tanto, el regulador que se necesita no puede ser únicamente una ganancia.

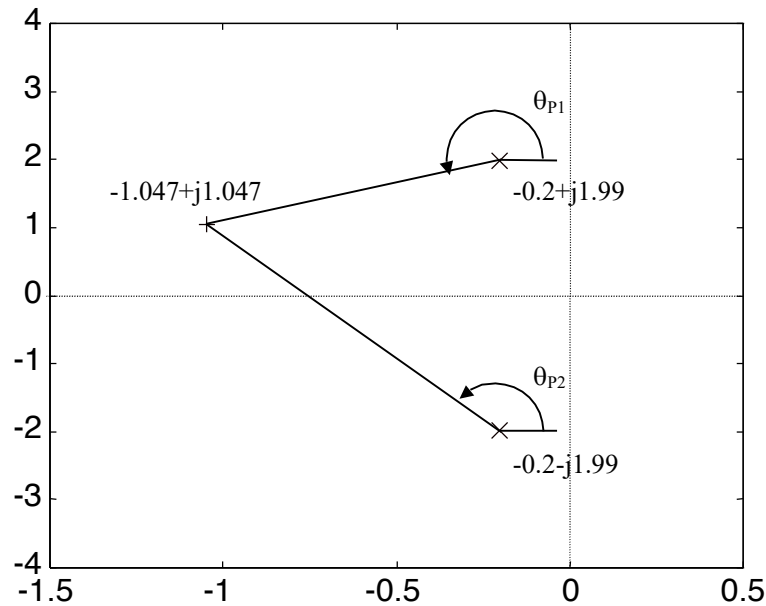
El siguiente regulador más sencillo que puede resolver el problema será un regulador PD:

$$PD(s) = K_p (1 + T_d s) = K_p T_d \left(s + \frac{1}{T_d} \right)$$

Luego el regulador se puede ver como:

$$PD(s) = K(s + a)$$

Aplicando el criterio del argumento se fuerza con la posición del cero a que el lugar de las raíces pase por el punto deseado.



$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = 180^\circ$$

$$\theta_{p1} = 180^\circ + \arctg \frac{1.99 - 1.047}{1.047 - 0.2} = 228.07^\circ$$

$$\theta_{p2} = 180^\circ - \arctg \frac{1.047 + 1.99}{1.047 - 0.2} = 105.58^\circ$$

$$\theta_z - (\theta_{p1} + \theta_{p2}) = 180^\circ$$

$$\theta_z - (228.07^\circ + 105.58^\circ) = 180^\circ$$

$$\theta_z = 180^\circ + 333.65^\circ = 513.65^\circ = 153.65^\circ$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - 153.65^\circ) = \frac{1.047}{x}$$

$$x = 2.11$$

$$a = 2.11 - 1.047 = 1.063$$

$$PD(s) = K(s - 1.063)$$

Cálculo de la ganancia:

$$K = \left| \frac{s^2 + 0.4s + 4}{4(s - 1.063)} \right|_{s=-1.047+j1.047} = 0.42$$

Luego el regulador queda:

$$PD(s) = 0.42(s - 1.063)$$

Con respecto a la entrada de referencia la función de transferencia de lazo cerrado será:

$$M_1(s) = \frac{G'(s)}{1 + G'(s)} = \frac{\frac{0.42(s - 1.063)4}{s^2 + 0.4s + 4}}{1 + \frac{0.42(s - 1.063)4}{s^2 + 0.4s + 4}} = \frac{1.68(s - 1.063)}{s^2 + 0.4s + 4 + 1.68s - 1.78} = \frac{1.68(s - 1.063)}{s^2 + 2.08s + 2.22}$$

Cuyos polos son: $p_{1,2} = -1.04 \pm j1.07$. Luego el sistema es estable.

Con respecto a la entrada del par desestabilizador la función de transferencia de lazo cerrado será:

$$M_2(s) = \frac{G(s)}{1 + G'(s)} = \frac{\frac{4}{s^2 + 0.4s + 4}}{1 + \frac{0.42(s - 1.063)4}{s^2 + 0.4s + 4}} = \frac{4}{s^2 + 0.4s + 4 + 1.68s - 1.78} = \frac{4}{s^2 + 2.08s + 2.22}$$

Cuyos polos son: $p_{1,2} = -1.04 \pm j1.07$. Luego el sistema es estable.

Y el error ante escalón.

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4 \cdot 0.42 \cdot (s - 1.063)}{s^2 + 0.4s + 4} = -0.446$$

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 - 0.446} = 1.8$$