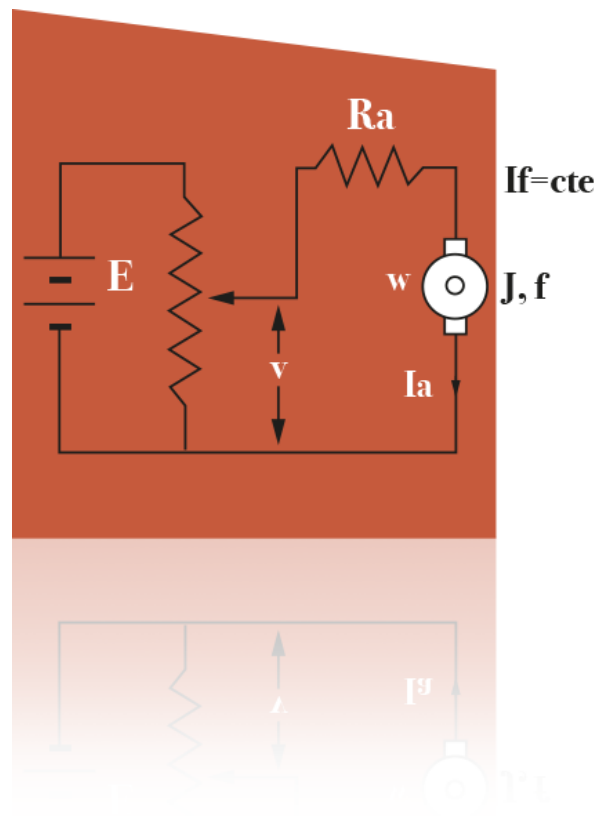


Automática II

Ejercicios Tema 4



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Carlos Torre Ferrero

Elías Revestido Herrero

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 4.1.

Sea el sistema con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{3}{(s+3)^2}$$

Se desea calcular un regulador por medio del método algebraico de asignación de polos para que la función de transferencia de lazo cerrado del sistema tenga sus polos en las posiciones:

$$p_{1,2} = -0.5 \pm j0.5$$

y presente error nulo al escalón unitario.

El modelo de funcionamiento de lazo cerrado será:

$$M(s) = \frac{k}{(s+0.5)^2 + 0.5^2} = \frac{k}{s^2 + s + 0.5}$$

Se ajusta ahora el error de régimen permanente sabiendo que si presenta un error nulo al escalón unitario, y teniendo realimentación unitaria, el valor al que debe estabilizarse la salida debe ser 1.

$$y_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot M(s) \cdot X(s)$$

$$y_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{k}{s^2 + s + 0.5} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{0.5}$$

$$\frac{k}{0.5} = 1 \quad k = 0.5$$

Con lo que el modelo queda:

$$M(s) = \frac{0.5}{s^2 + s + 0.5}$$

Una vez obtenido el modelo se despeja el regulador algebraicamente:

$$F(s) = \frac{0.5 \cdot (s+3)^2}{3(s^2 + s + 0.5) - 0.5}$$

$$F(s) = \frac{1}{6} \frac{(s+3)^2}{s(s+1)}$$

Si se comprueba la función de transferencia obtenida con el regulador:

$$M(s) = \frac{\frac{1}{6} \frac{(s+3)^2}{s(s+1)} \frac{3}{(s+3)^2}}{1 + \frac{1}{6} \frac{(s+3)^2}{s(s+1)} \frac{3}{(s+3)^2}}$$

$$M(s) = \frac{\frac{1}{6} \frac{3}{s(s+1)}}{1 + \frac{1}{6} \frac{3}{s(s+1)}} = \frac{\frac{1}{6} \frac{3}{s(s+1)}}{\frac{6s(s+1) + 3}{6s(s+1)}} = \frac{3}{6s^2 + 6s + 3} = \frac{0.5}{s^2 + s + 0.5}$$

Que es el modelo inicial del que se partía y que cumple tener los polos en $-0.5 \pm j0.5$ y un error nulo al escalón.

EJERCICIO 4.2.

Sea el sistema del ejercicio 4.1 se ha detectado que la función de transferencia de la planta a controlar no era :

$$G(s) = \frac{3}{(s+3)^2}$$

sino:

$$G'(s) = \frac{6}{(s+3)(s+6)}$$

Comprobar el funcionamiento del regulador calculado en el ejercicio 5.1 y calcular un regulador robusto diseñado para soportar esas variaciones sin dejar de cumplir las especificaciones.

Para el ejercicio 4.1 suponiendo ahora que la función de transferencia era incorrecta y que en realidad era:

$$G'(s) = \frac{6}{(s+3)(s+6)}$$

la función de transferencia de lazo cerrado con el regulador calculado ahora será:

$$M'(s) = \frac{F(s)G'(s)}{1 + F(s)G'(s)}$$

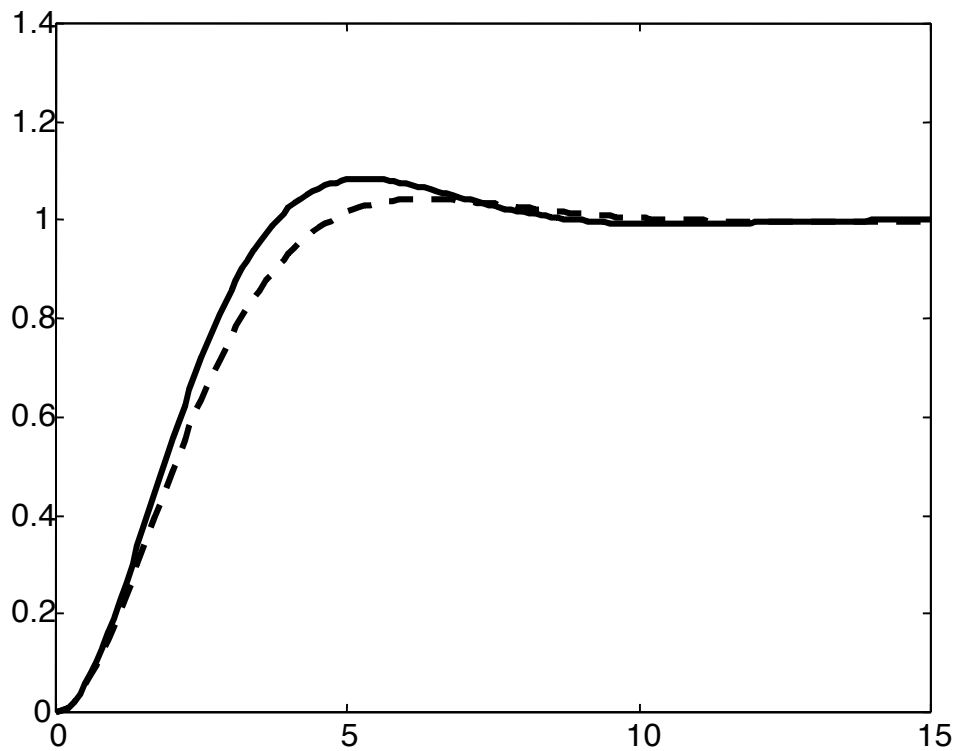
$$M'(s) = \frac{\frac{1}{6} \frac{(s+3)^2}{s(s+1)} \frac{6}{(s+3)(s+6)}}{1 + \frac{1}{6} \frac{(s+3)^2}{s(s+1)} \frac{6}{(s+3)(s+6)}}$$

$$M'(s) = \frac{\frac{s+3}{s(s+1)(s+6)}}{1 + \frac{s+3}{s(s+1)(s+6)}} = \frac{\frac{s+3}{s(s+1)(s+6)}}{\frac{s(s+1)(s+6) + s+3}{s(s+1)(s+6)}} = \frac{s+3}{s^3 + 7s^2 + 6s + 3}$$

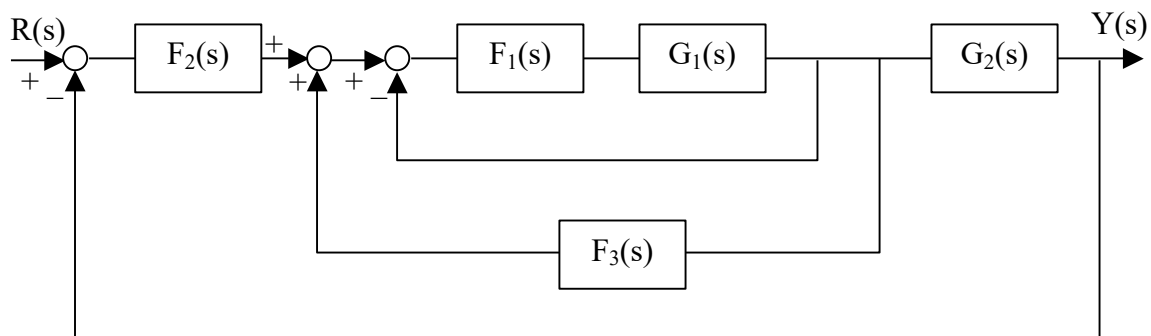
$$M'(s) = \frac{s+3}{(s+6.0966)(s^2 + 0.9034s + 0.4921)}$$

Lo que corresponde con un sistema con tres polos en : -2.5558 y $-0.4721 \pm 0.6034j$, un cero en -3 y error nulo al escalón. Con lo que además de no pasar por el punto exacto deseado de funcionamiento, se han añadido un polo y un cero más de lazo cerrado lo que aún va a modificar más la respuesta del sistema en lazo cerrado.

Gráficamente puede verse en la siguiente figura la representación de la respuesta al escalón deseada (en línea discontinua) y la realmente obtenida (en línea continua).



Se plantea ahora el sistema de control mediante reguladores ajustados por asignación de polos robusto:



Según se ha definido se ha de separar la función de transferencia $G(s)$ en dos funciones conteniendo por separado la parte que puede sufrir variaciones:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+3}$$

Y por otro la que se conoce con seguridad:

$$G_2(s) = \frac{3}{s+3}$$

La función de transferencia de lazo cerrado deseada es:

$$M(s) = \frac{0.5}{s^2 + s + 0.5}$$

Descomponiendo esta función:

$$M_1(s) = 0.5$$

$$M_2(s) = \frac{1}{s^2 + s + 0.5}$$

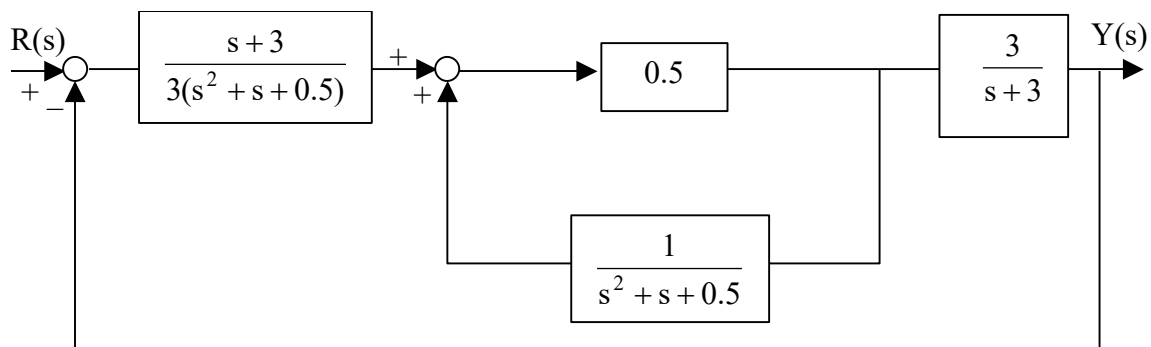
Los controladores a emplear serán:

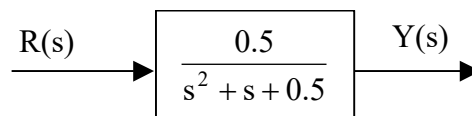
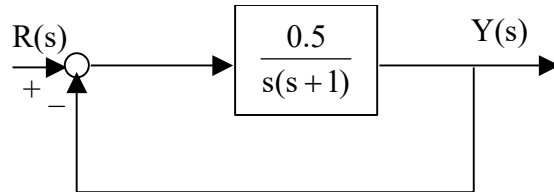
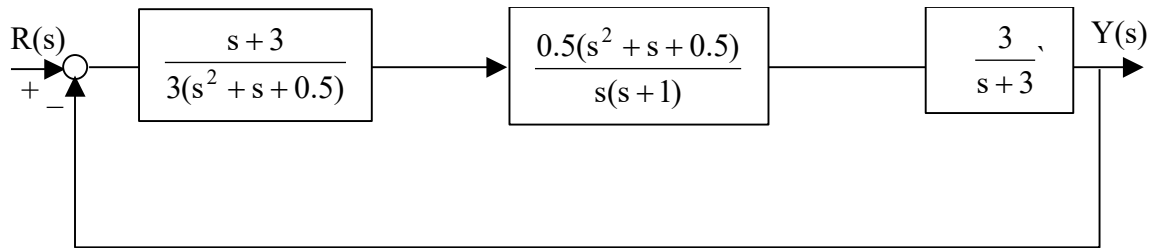
$$F_1(s) = \frac{M_1(s)}{G_1(s)[1 - M_1(s)]} = \frac{0.5}{\frac{1}{s+3}[1 - 0.5]} = s + 3$$

$$F_2(s) = \frac{M_2(s)}{G_2(s)} = \frac{\frac{1}{s^2 + s + 0.5}}{\frac{3}{s+3}} = \frac{s+3}{3(s^2 + s + 0.5)}$$

$$F_3(s) = M_2(s) = \frac{1}{s^2 + s + 0.5}$$

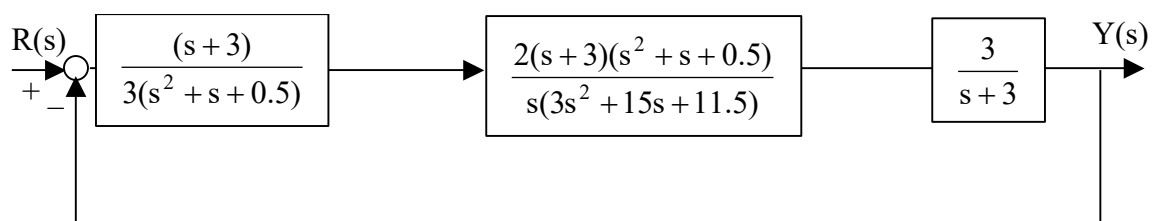
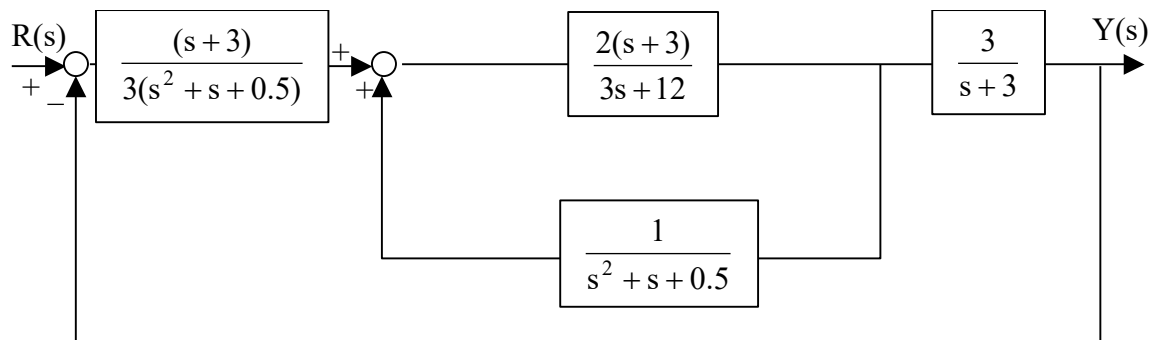
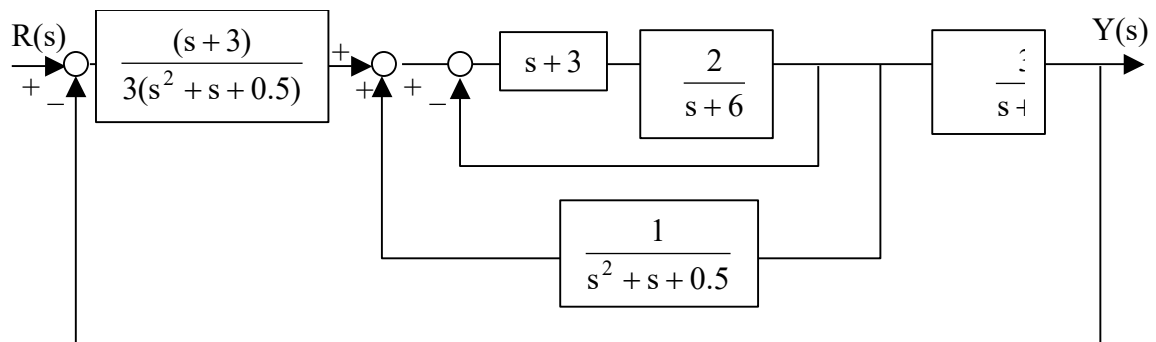
Se comprueba que si no hay variaciones en la planta el lazo cerrado será:

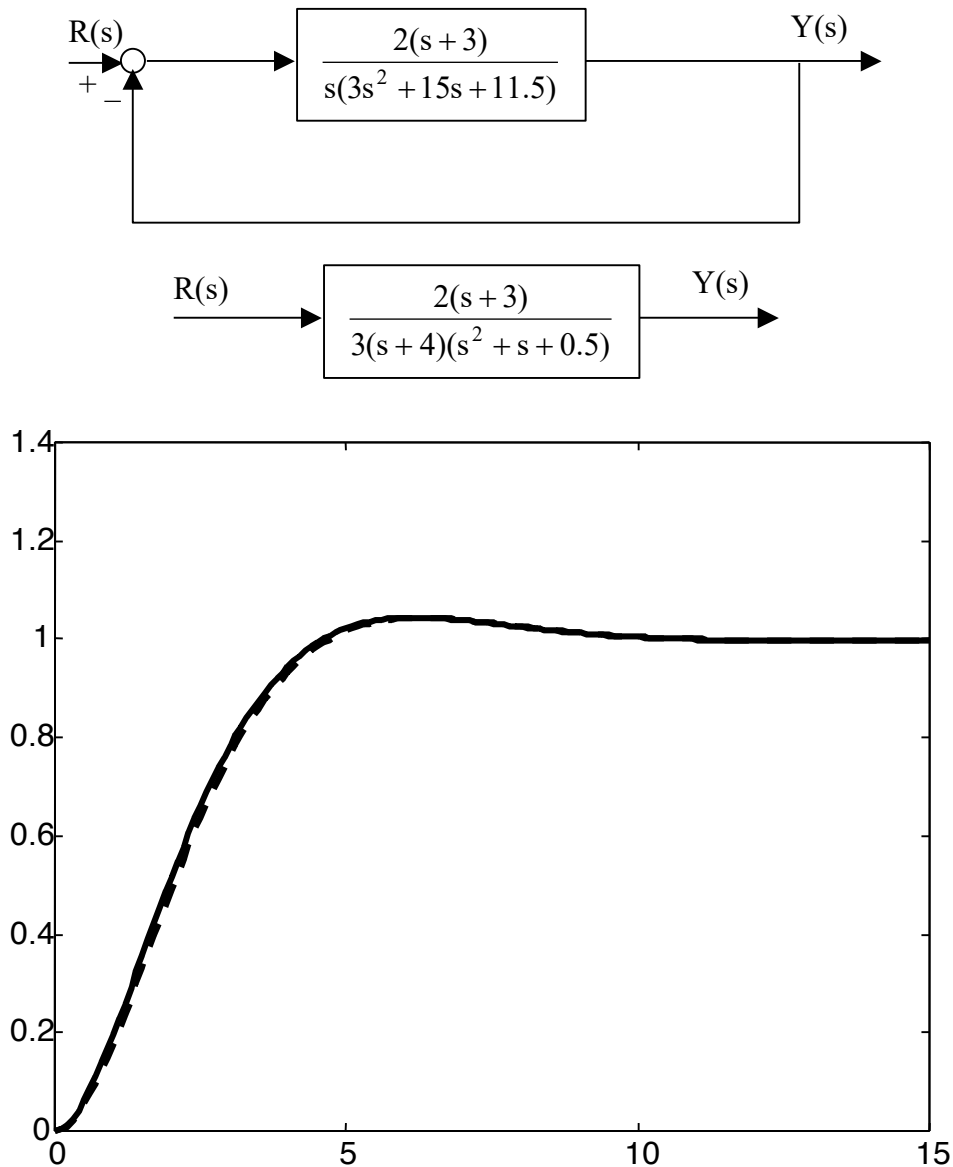




Se comprueba ahora que ocurre con el sistema de lazo cerrado si la función de transferencia de la planta era:

$$G'(s) = \frac{6}{(s+3)(s+6)}$$





EJERCICIO 4.3.

Para el sistema del ejercicio 4.1 con función de transferencia: $G(s) = \frac{3}{(s+3)^2}$

Se desea calcular un regulador $F(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$ por el método de asignación de polos para que el funcionamiento de lazo cerrado del sistema tenga sus polos en $p_{1,2} = -0.5 \pm j0.5$ y presente un error nulo ante una entrada escalón unitario.

Para la planta inicial:

$$N_{G(s)} = 3$$

$$D_{G(s)} = (s+3)^2$$

La estructura del regulador buscado es:

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

$$F(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

Luego:

$$N_{F(s)} = K_d s^2 + K_p s + K_i$$

$$D_{F(s)} = s$$

La ecuación característica del sistema de lazo cerrado con regulador será:

$$P(s) = D_{F(s)} D_{G(s)} + N_{F(s)} N_{G(s)}$$

$$P(s) = s(s+3)^2 + (K_d s^2 + K_p s + K_i)3$$

$$P(s) = s^3 + (6 + 3K_d)s^2 + (9 + 3K_p)s + 3K_i$$

Como el denominador de la planta a controlar es un polinomio de segundo grado y se va a incluir un regulador cuyo denominador es un polinomio de primer grado, la función de transferencia de lazo cerrado resultante tendrá que ser de tercer orden. Esto corresponde a fijar la posición de tres polos. Como el regulador seleccionado tiene tres parámetros ajustables, serán suficientes para fijar las posiciones de los tres polos.

Para cumplir las especificaciones pedidas (ver ejercicio 4.1) se necesita que el lazo cerrado tenga como polos dominantes:

$$p_{1,2} = -0.5 \pm j0.5$$

lo que corresponde al polinomio:

$$P(s) = s^2 + s + 0.5$$

Esto fija dos de los tres polos de lazo cerrado pero aún queda por fijar un tercero. Como se desea que estos polos sean los dominantes, el tercer polo se situará lo suficientemente alejado de ellos para que su influencia sea despreciable. Por ejemplo, en $s=-7$.

La ecuación característica queda entonces:

$$P(s) = (s^2 + s + 0.5)(s + 7)$$

$$P(s) = s^3 + s^2 + 0.5s + 7s^2 + 7s + 7 \cdot 0.5$$

$$P(s) = s^3 + 8s^2 + 7.5s + 3.5$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para la ecuación característica:

$$s^3 + (6 + 3K_d)s^2 + (9 + 3K_p)s + 3K_i = s^3 + 8s^2 + 7.5s + 3.5$$

Igualando los coeficientes de los términos de mismo grado se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$\text{Coeficientes de 3}^{\text{er}} \text{ grado: } 1 = 1$$

$$\text{Coeficientes de 2}^{\text{o}} \text{ grado: } 6 + 3K_d = 8$$

$$\text{Coeficientes de 1}^{\text{er}} \text{ grado: } 9 + 3K_p = 7.5$$

$$\text{Términos independientes: } 3K_i = 3.5$$

Despejando:

$$K_d = \frac{2}{3}$$

$$K_p = \frac{-1.5}{3}$$

$$K_i = \frac{3.5}{3}$$

Luego el regulador será:

$$F(s) = \frac{\frac{2}{3}s^2 - \frac{1.5}{3}s + \frac{3.5}{3}}{s} = \frac{2s^2 - 1.5s + 3.5}{3s}$$

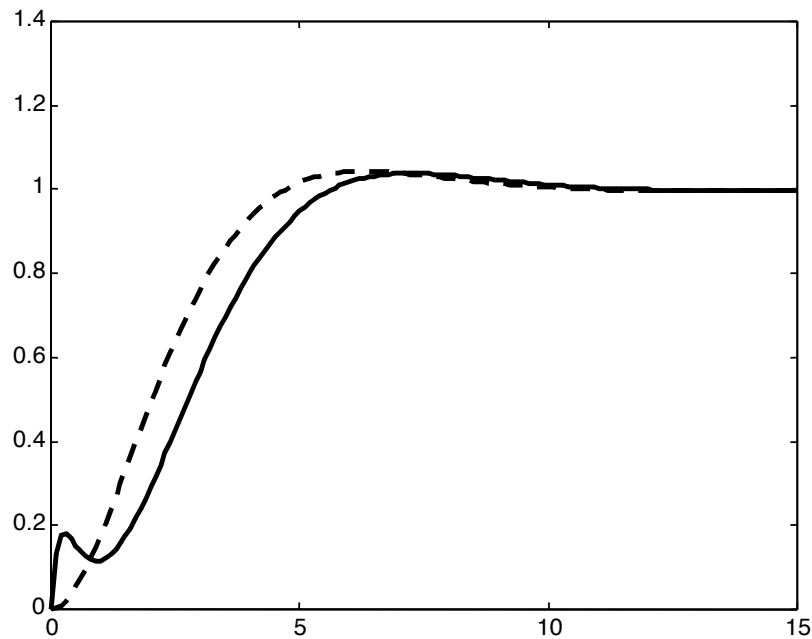
La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$M(s) = \frac{\frac{2s^2 - 1.5s + 3.5}{3s} \cdot \frac{3}{(s+3)^2}}{1 + \frac{2s^2 - 1.5s + 3.5}{3s} \cdot \frac{3}{(s+3)^2}}$$

$$M(s) = \frac{2s^2 - 1.5s + 3.5}{s^3 + 8s^2 + 7.5s + 3.5}$$

La función de transferencia de lazo cerrado puede verse que tiene los polos en los lugares deseados, pero aparecen además dos ceros que modifican la respuesta del sistema, por lo que el funcionamiento del regulador no va a ser exactamente el deseado.

La siguiente figura muestra la respuesta del sistema deseada (en línea discontinua) y la respuesta obtenida con el regulador (en línea continua).



EJERCICIO 4.4.

Para el sistema del ejercicio 4.1 con función de transferencia: $G(s) = \frac{3}{(s+3)^2}$

Se desea calcular un regulador por el método de asignación de polos de la forma:

$$F(s) = K \frac{s+a}{s+b}$$

para que el funcionamiento de lazo cerrado del sistema tenga sus polos en las posiciones:

$$p_{1,2} = -0.5 \pm j0.5$$

y error nulo al escalón unitario.

Para la planta inicial:

$$\begin{aligned} N_{G(s)} &= 3 \\ D_{G(s)} &= (s+3)^2 \end{aligned}$$

La estructura del regulador buscado es:

$$F(s) = K \frac{s+a}{s+b}$$

$$F(s) = \frac{Ks + Ka}{s+b}$$

Luego:

$$N_{F(s)} = Ks + Ka$$

$$D_{F(s)} = s + b$$

La ecuación característica del sistema de lazo cerrado con regulador será:

$$P(s) = D_{F(s)}D_{G(s)} + N_{F(s)}N_{G(s)}$$

$$P(s) = (s + b)(s + 3)^2 + (Ks + Ka)3$$

$$P(s) = (s + b)(s^2 + 6s + 9) + (Ks + Ka)3$$

$$P(s) = s^3 + 6s^2 + 9s + bs^2 + 6bs + 9b + 3Ks + 3Ka$$

$$P(s) = s^3 + (6 + b)s^2 + (9 + 6b + 3K)s + 9b + 3Ka$$

Como el denominador de la planta a controlar es un polinomio de segundo grado y se va a incluir un regulador cuyo denominador es un polinomio de primer grado, la función de transferencia de lazo cerrado resultante tendrá que ser de tercer orden. Esto corresponde a fijar la posición de tres polos. Como el regulador seleccionado tiene tres parámetros ajustables, serán suficientes para fijar las posiciones de los tres polos.

Para cumplir las especificaciones pedidas se necesita que el lazo cerrado tenga como polos dominantes:

$$p_{1,2} = -0.5 \pm j0.5$$

lo que corresponde al polinomio:

$$P(s) = s^2 + s + 0.5$$

Esto fija dos de los tres polos de lazo cerrado pero aún queda por fijar un tercero. Como se desea que estos polos sean los dominantes, el tercer polo se situará lo suficientemente alejado de ellos para que su influencia sea despreciable. Por ejemplo, en $s = -7$.

La ecuación característica queda entonces:

$$P(s) = (s^2 + s + 0.5)(s + 7)$$

$$P(s) = s^3 + s^2 + 0.5s + 7s^2 + 7s + 7 \cdot 0.5$$

$$P(s) = s^3 + 8s^2 + 7.5s + 3.5$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para la ecuación característica:

$$s^3 + (6 + b)s^2 + (9 + 6b + 3K)s + 9b + 3Ka = s^3 + 8s^2 + 7.5s + 3.5$$

Igualando los coeficientes de los términos de mismo grado se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$\text{Coeficientes de 3}^{\text{er}} \text{ grado: } 1 = 1$$

$$\text{Coeficientes de 2}^{\text{o}} \text{ grado: } 6 + b = 8$$

$$\text{Coeficientes de 1}^{\text{er}} \text{ grado: } 9 + 6b + 3K = 7.5$$

$$\text{Términos independientes: } 9b + 3Ka = 3.5$$

Despejando:

$$b = 2$$

$$K = \frac{-13.5}{3}$$

$$a = \frac{14.5}{13.5}$$

Luego:

$$F(s) = \frac{-13.5}{3} \frac{s + \frac{14.5}{13.5}}{s + 2} = -4.5 \frac{s + 1.074}{s + 2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{13.5s + 14.5}{s + 2}$$

La función de transferencia de lazo cerrado es:

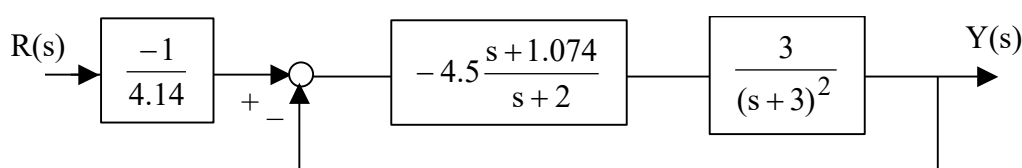
$$M(s) = \frac{-\frac{1}{3} \cdot \frac{13.5s + 14.5}{s + 2} \cdot \frac{3}{(s + 3)^2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{13.5s + 14.5}{s + 2} \cdot \frac{3}{(s + 3)^2}} = \frac{-\frac{13.5s + 14.5}{s + 2} \cdot \frac{1}{(s + 3)^2}}{1 - \frac{13.5s + 14.5}{s + 2} \cdot \frac{1}{(s + 3)^2}}$$

$$M(s) = \frac{-\frac{13.5s + 14.5}{s + 2} \cdot \frac{1}{(s + 3)^2}}{1 - \frac{13.5s + 14.5}{s + 2} \cdot \frac{1}{(s + 3)^2}} = \frac{-13.5s - 14.5}{(s + 2)(s + 3)^2 - (13.5s + 14.5)} = \frac{-13.5(s + 1.074)}{s^3 + 8s^2 + 7.5s + 3.5}$$

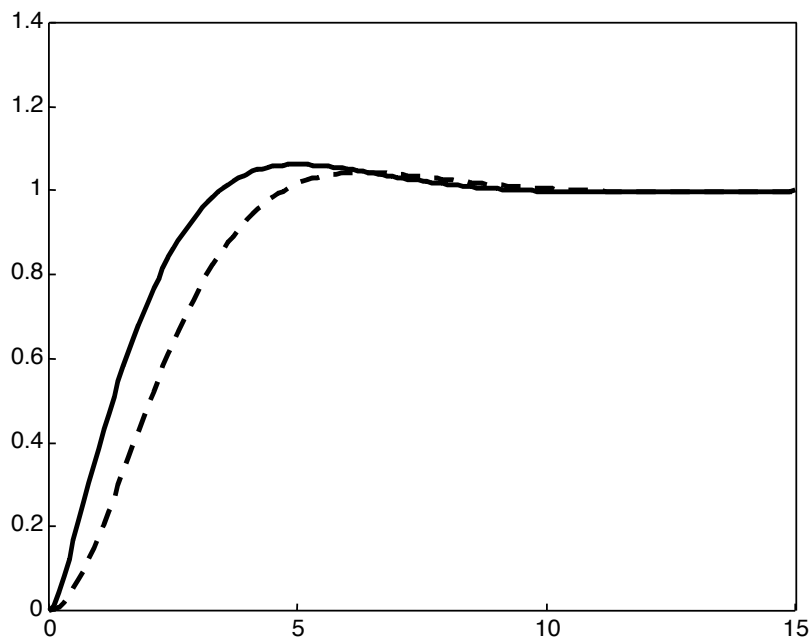
La ganancia de régimen permanente es:

$$M(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-13.5(s + 1.074)}{s^3 + 8s^2 + 7.5s + 3.5} \frac{1}{s} = -\frac{14.5}{3.5} = -4.14$$

Incluyendo un regulador proporcional en serie de valor inverso a la ganancia de régimen permanente se consigue ganancia unitaria para el sistema completo.

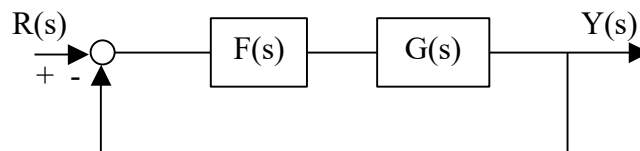


La siguiente figura muestra la respuesta del sistema deseada (en línea discontinua) y la respuesta obtenida con el regulador (en línea continua). Sigue existiendo un cero en la función de transferencia de lazo cerrado que no permite alcanzar totalmente las especificaciones con esta estructura.



EJERCICIO 4.5.

Realizar un regulador robusto $F(s)$ por el método de Asignación de Polos para conseguir que el sistema representado a continuación:



$$G(s) = \frac{9}{s(s+2)(s+10)}$$

presente un máximo sobreimpulso del 15% y un tiempo de establecimiento de 1.57 segundos y mantenga el tipo del sistema original.

Además, se sabe que la posición del polo en el origen de $G_1(s)$ es dudosa. El regulador debe seguir funcionando correctamente en el caso de que este polo no se encuentre exactamente en dicha posición.

Calcular la nueva función de transferencia del sistema de lazo cerrado con el regulador obtenido cuando el polo que se supuso en $s = -2$ se encuentra realmente en $s = -1$.

El modelo de funcionamiento de lazo cerrado se obtiene a partir de las condiciones especificadas:

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.15 \quad -1.897 = -\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}} \quad 0.3646(1-\delta^2) = \delta^2$$

$$\delta = 0.5169$$

$$t_s = \frac{\pi}{\delta \cdot \omega_n} = 1.57 \text{ s} \quad \delta \cdot \omega_n = 2$$

$$\omega_n = 3.87 \text{ rad/s}$$

Por tanto la posición de los polos de lazo cerrado dominantes estarán en:

$$p_{1,2} = -\delta \cdot \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\delta^2} = -2 \pm j3.31$$

Con estas condiciones se puede empezar a construir el modelo del sistema de lazo cerrado que tenga como polos los que cumplen las condiciones anteriores.

$$M(s) = \frac{k}{(s+2)^2 + 3.31^2} = \frac{k}{s^2 + 4s + 15}$$

Ajustando la ganancia para presentar error ante el escalón unitario:

$$M(s) = \frac{15}{s^2 + 4s + 15}$$

Se descompone la función de transferencia de la planta $G(s)$ en dos de tal forma que $G_1(s)$ contenga a la parte de $G(s)$ que puede sufrir variaciones:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$G_2(s) = \frac{9}{s(s+10)}$$

De la misma forma, al diseñar un regulador robusto, la función de transferencia de lazo cerrado se ha de descomponer en dos funciones donde $M_2(s)$ contendrá a los polos dominantes y $M_1(s)$ se crea de forma que contenga términos poco influyentes en la respuesta del sistema. Se añaden las ganancias necesarias para mantener el error nulo al escalón.

$$M_1(s) = \frac{20}{s+20}$$

$$M_2(s) = \frac{15}{s^2 + 4s + 15}$$

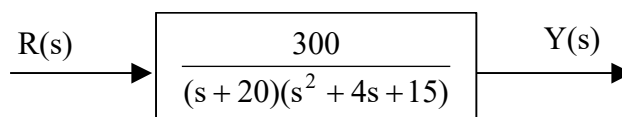
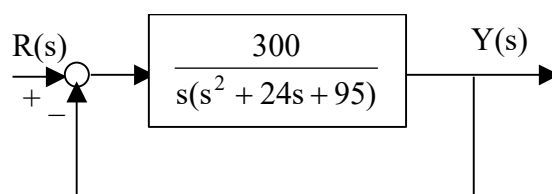
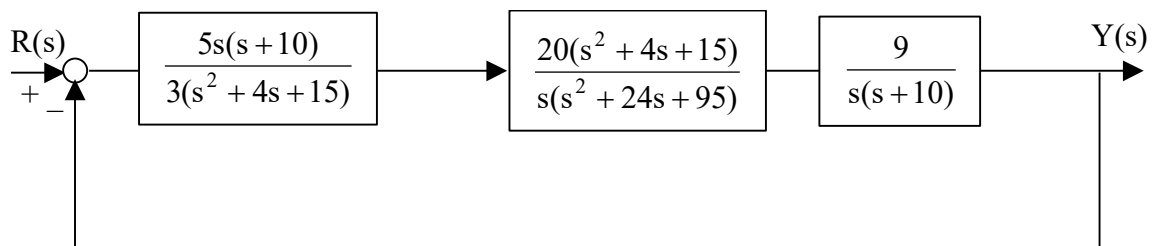
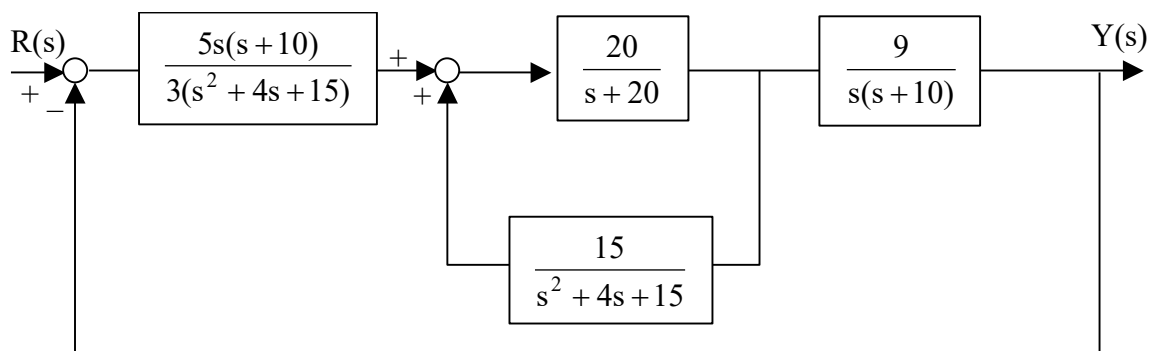
Los controladores a emplear serán:

$$F_1(s) = \frac{M_1(s)}{G_1(s)[1 - M_1(s)]} = \frac{\frac{20}{s+20}}{\frac{1}{s+2} \left[1 - \frac{20}{s+20} \right]} = \frac{20(s+2)}{s}$$

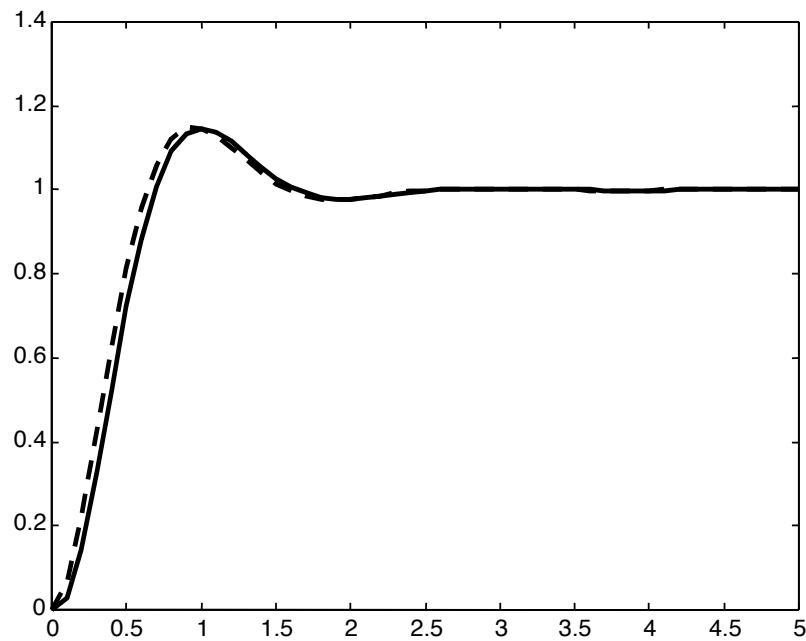
$$F_2(s) = \frac{M_2(s)}{G_2(s)} = \frac{\frac{15}{s^2 + 4s + 15}}{\frac{9}{s(s+10)}} = \frac{5s(s+10)}{3(s^2 + 4s + 15)}$$

$$F_3(s) = M_2(s) = \frac{15}{s^2 + 4s + 15}$$

Si no hay variaciones en la planta se comprueba la función de transferencia del lazo cerrado:



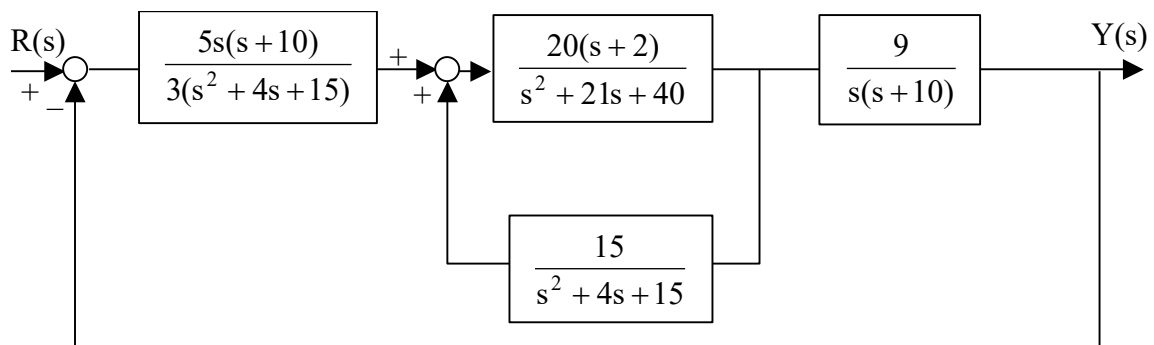
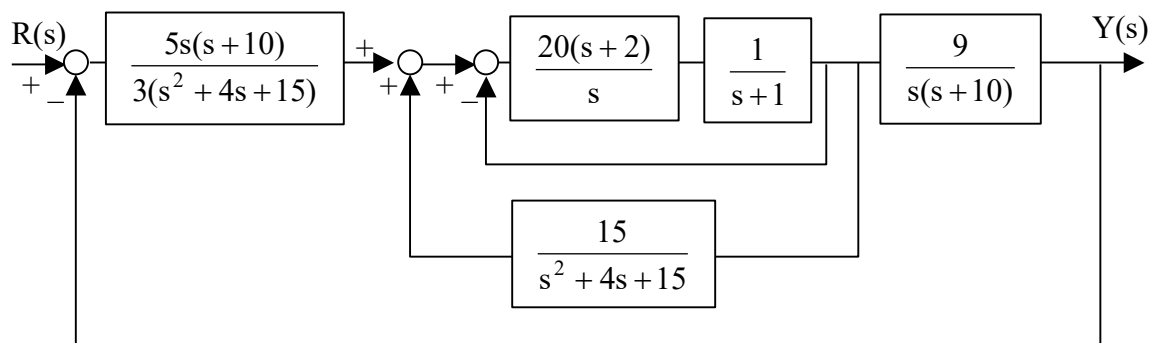
La respuesta del sistema ante un escalón unitario con el regulador calculado (en línea discontinua la respuesta ideal buscada).

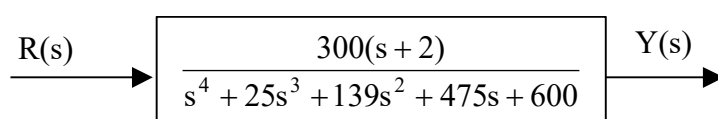
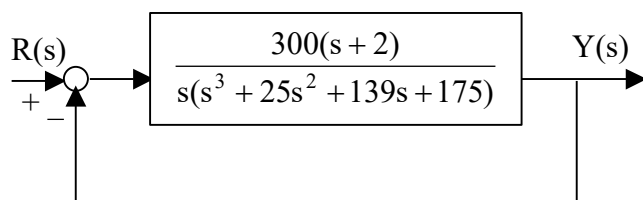
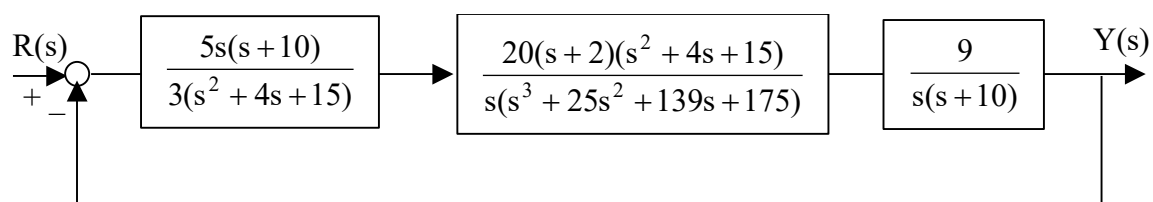


Considerando ahora que el polo de la planta que se supuso en $s = -2$ se encuentra realmente en $s = -1$ se tiene:

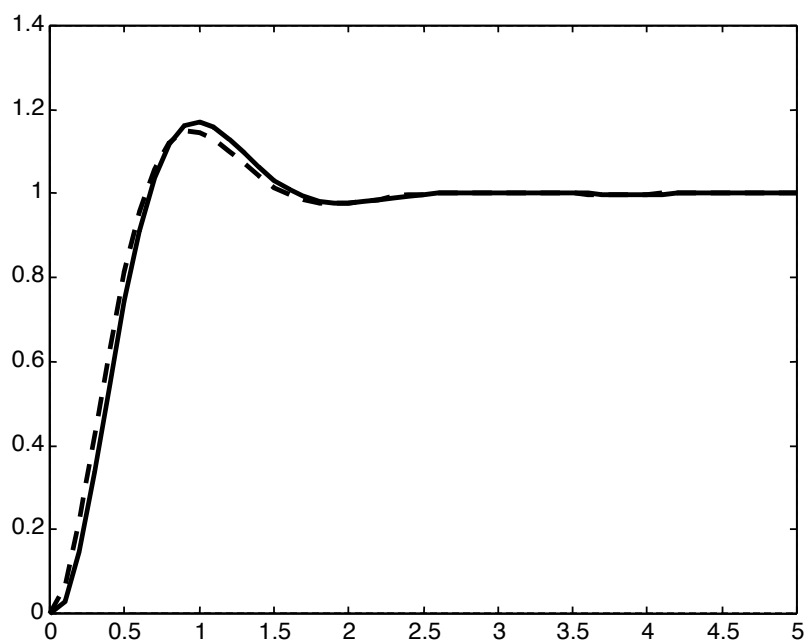
$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_2(s) = \frac{9}{s(s+10)}$$





En la figura se muestra la respuesta del sistema modificado con el controlador robusto (en línea continua) y la respuesta ideal (en línea discontinua).



Diseño de Reguladores por.....	203
Asignación de Polos	203
4.1. Introducción.....	203
4.2. COMPENSACIÓN Algebraica	204
4.3. COMPENSACIÓN Algebraica robusta	205
4.4. COMPENSACIÓN de estructura fija.....	209