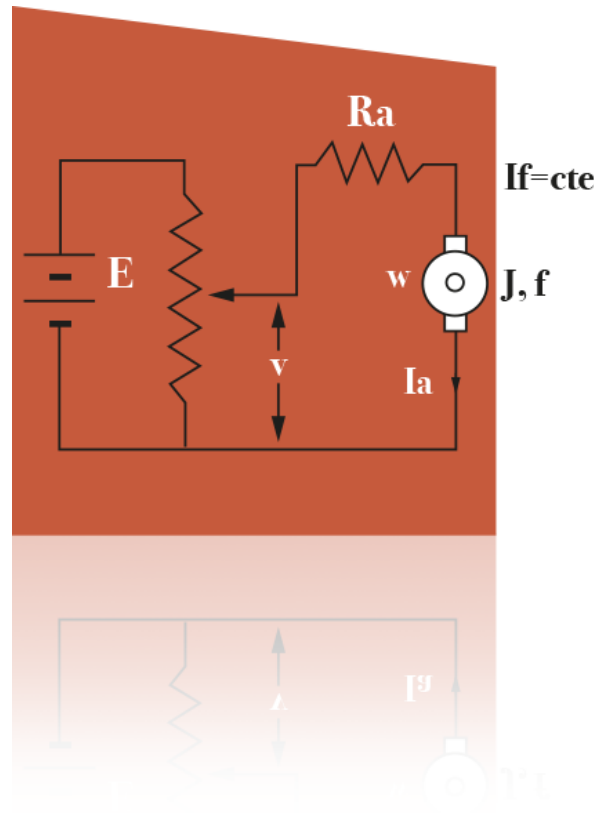


Automática II

Ejercicios Tema 5



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Carlos Torre Ferrero

Elías Revestido Herrero

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 5.1.

Obtener la representación interna del sistema definido por la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 10u(t)$$

Una ecuación de segundo orden = 2 variables de estado:

$$x_1 = y(t); x_2 = y'(t)$$

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 10u(t)$$

$$x_1 = y(t); x_2 = y'(t)$$

Relaciones:

$$x_1' = y'(t) = x_2$$

$$x_2' = y''(t) = 10u(t) - 2x_2 - 5x_1$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5.2.

Obtener las variables de estado empleando el método gráfico (Mason) para el sistema:

$$G(s) = \frac{-5s^2 + 4s - 12}{s^3 + 6s^2 + s + 3}$$

-Dividir entre la máxima potencia de s:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{-5}{s} + \frac{4}{s^2} - \frac{12}{s^3}}{1 + \frac{6}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^3}}$$

Considerando que ha sido obtenida por Mason:

$$G(s) = \frac{\sum T_i \Delta_i}{\Delta}$$

Ti = Trayectos directos Entrada-Salida.

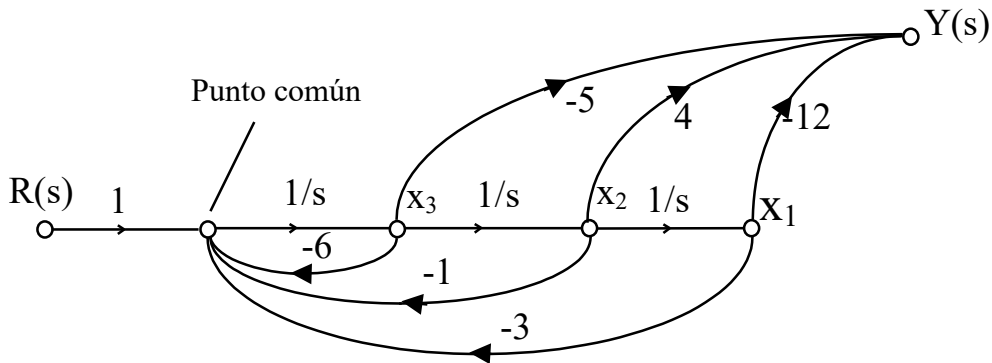
Di = Cofactor (suponer que son 1).

D = Determinante del sistema (considerar solo lazos independientes):

$$\Delta = 1 - \sum l_a + \sum l_b l_c - \sum l_d l_e l_f + \dots$$

El numerador indica los trayectos directos. El denominador bucles.

Obtenemos:

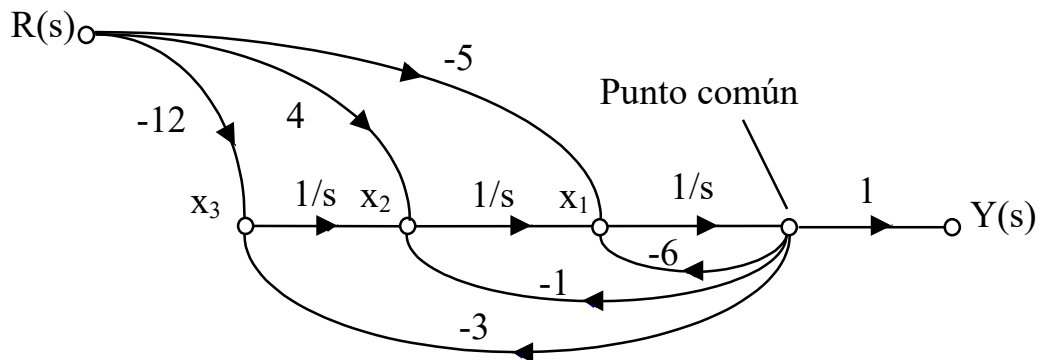


Ecuaciones matriciales:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

$$y = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

También de esta forma:



Ecuaciones matriciales:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} r$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5.3.

Obtener la representación en variables de estado del siguiente sistema:



Ecuación diferencial:

$$F = Mx''$$

Tomando transformadas con CI nulas:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/M}{s^2}$$

Dos variables de estado:

Espacio (x_1).
Velocidad (x_2).

$$x_1 = x; \quad x_2 = x'$$

$$x_1' = x_2 = x'$$

$$x_2' = x''$$

Y como:

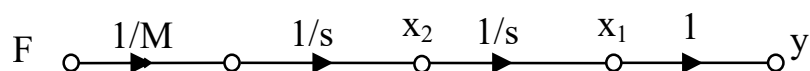
$$x'' = \frac{F}{M}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} F$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

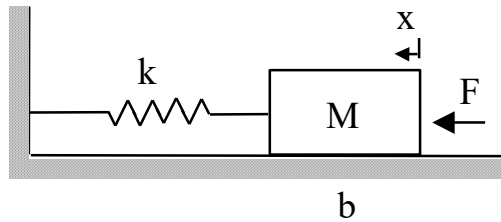
Representación mediante integradores:



Muestra la estructura interna del sistema.

EJERCICIO 5.4.

Obtener la representación en variables de estado del siguiente sistema:



Ecuación diferencial:

$$F = M x'' + b x' + k x$$

Tomando transformadas con CI nulas:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/M}{s^2 + \frac{b}{M}s + \frac{k}{M}}$$

Dos variables de estado:

Espacio (x_1).
Velocidad (x_2).

$$x_1 = x; \quad x_2 = x'$$

$$x_1' = x_2 = x'$$

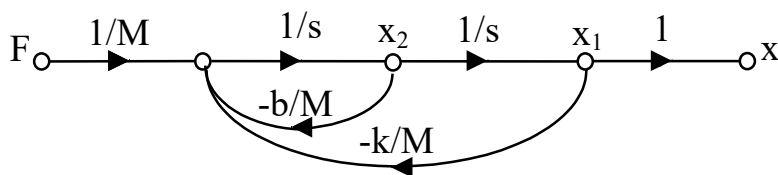
$$x_2' = x'' = \frac{1}{M}(F - b x_2 - k x_1)$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} F$$

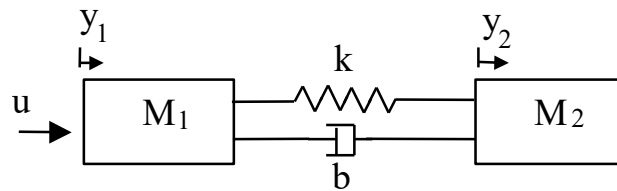
$$y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Representación mediante integradores:



EJERCICIO 5.5.

Obtener la representación en variables de estado del siguiente sistema:



Ecuaciones diferenciales:

$$u = M_1 y_1'' + b(y_1' - y_2') + k(y_1 - y_2)$$

$$b(y_1' - y_2') + k(y_1 - y_2) = M_2 y_2''$$

Tomando transformadas con CI nulas:

$$U(s) = (M_1 s^2 + b s + k)Y_1(s) - (b s + k)Y_2(s)$$

$$(b s + k)Y_1(s) = (M_2 s^2 + b s + k)Y_2(s)$$

Cuatro variables de estado:

- Desplazamiento de M1 (x_1).
- Velocidad de M1 (x_2).
- Desplazamiento de M2 (x_3).
- Velocidad de M2 (x_4).

Relaciones:

$$x_1 = y_1; \quad x_3 = y_2$$

$$x_1' = x_2 = y_1'; \quad x_3' = x_4 = y_2'$$

$$x_2' = y_1'' = \frac{1}{M_1} [u - b x_2 + b x_4 - k x_1 + k x_3]$$

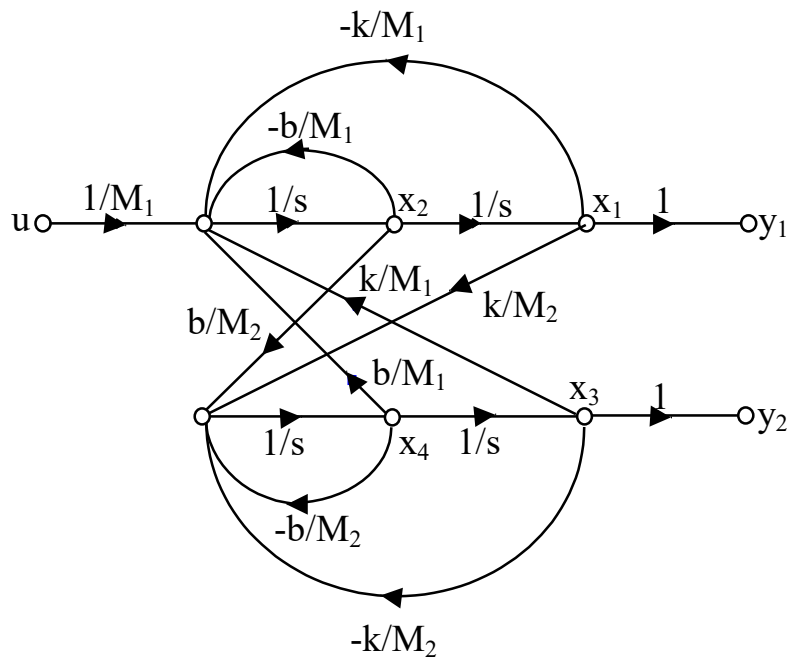
$$x_4' = y_2'' = \frac{1}{M_2} [b x_2 - b x_4 + k x_1 - k x_3]$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M_1} & -\frac{b}{M_1} & \frac{k}{M_1} & \frac{b}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M_2} & \frac{b}{M_2} & -\frac{k}{M_2} & -\frac{b}{M_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

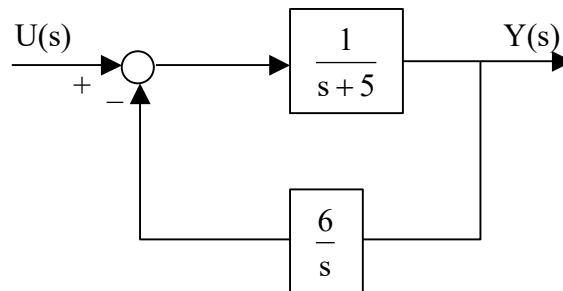
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Representación mediante integradores:



EJERCICIO 5.6.

Obtener la representación en variables de estado para el siguiente sistema:



Seleccionando como primera variable de estado la salida del sistema:

$$Y(s) = X_1(s)$$

luego:

$$y = x_1$$

Y como segunda variable de estado la señal de realimentación:

$$X_2(s) = X_1(s) \frac{6}{s}$$

$$sX_2(s) = 6X_1(s)$$

luego:

$$x_2' = 6x_1$$

Entonces:

$$[U(s) - X_2(s)] \frac{1}{s+5} = X_1(s)$$

$$sX_1(s) + 5X_1(s) = -X_2(s) + U(s)$$

$$x_1' = -5x_1 - x_2 + u$$

Ordenándolo de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 5.7.

Se dispone de una planta cuya función de transferencia es la siguiente:

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Obtener la representación en variables de estado para el siguiente sistema:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)Y(s) = 10U(s)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 6y = 10u$$

Llamando:

$$x_1 = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$x_2 = \frac{dy}{dt}$$

$$x_3 = y$$

$$\dot{x}_1 + 6x_1 + 11x_2 + 6x_3 = 10u$$

$$\dot{x}_1 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 10u$$

Y representándolo de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 5.8.

Encontrar la función de transferencia del sistema definido por las ecuaciones de estado:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Aplicando:

$$M(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Donde:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)^{Ta}}{|sI - A|} = \frac{\begin{pmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{pmatrix}}{s^2 + 3s + 2}$$

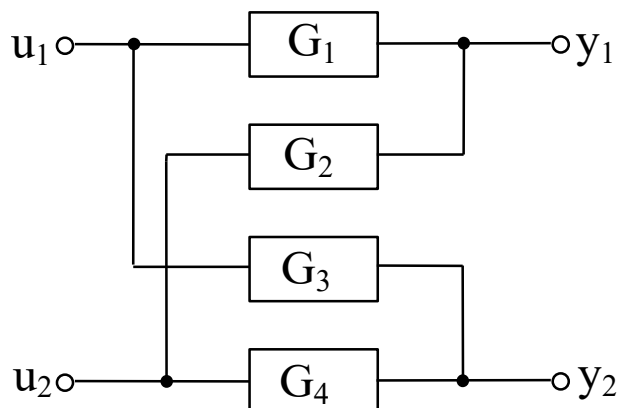
Queda:

$$M(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}}{s^2 + 3s + 2} = \begin{pmatrix} \frac{9s+18}{s^2+3s+2} & \frac{6s+12}{s^2+3s+2} \\ \frac{27s-63}{s^2+3s+2} & \frac{48s-12}{s^2+3s+2} \end{pmatrix}$$

De forma más clara:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9s+18}{s^2+3s+2} & \frac{6s+12}{s^2+3s+2} \\ \frac{27s-63}{s^2+3s+2} & \frac{48s-12}{s^2+3s+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Diagrama de bloques:



EJERCICIO 5.9.

Encontrar la función de transferencia del sistema definido por las ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} B$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+6 & 11 & 6 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = (s+6)s^2 + 6 + 11s = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$(sI - A)^\alpha = \begin{bmatrix} s^2 & s & 1 \\ -11s - 6 & s(s+6) & s+6 \\ -6s & -6 & s(s+6) + 11 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)^{T\alpha}}{|sI - A|} = \frac{\begin{bmatrix} s^2 & -11s - 6 & -6s \\ s & s(s+6) & -6 \\ 1 & s+6 & s(s+6) + 11 \end{bmatrix}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & -11s - 6 & -6s \\ s & s(s+6) & -6 \\ 1 & s+6 & s(s+6) + 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & s+6 & s(s+6) + 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & s+6 & s(s+6)+11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

EJERCICIO 5.10.

Para el sistema del ejercicio 5.4 considerando $M=0.5$ kg, $K=2$ N/m y $b=1$ N/m/s.

- Calcular el cambio de variable para la variable correspondiente a la posición aparezca en cm y la velocidad en km/h.
 - Calcular el cambio de variable y la nueva representación del sistema tomando como variables de estado la posición y aceleración.
-

Para representar las variables de estado en cm y km/h respectivamente:

$$1\text{m} = 10\text{cm}$$

$$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1\text{km}}{1000\text{m}} \cdot \frac{3600\text{s}}{1\text{h}} = 3.6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Luego el cambio será:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 3.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Para el caso de emplear como variables de estado la posición y aceleración el cambio será:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial era:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} F$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} F$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$v' = \tilde{A} v + \tilde{B} u$$

$$y = \tilde{C} v$$

$$P = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & s^2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s^2 \\ -\frac{4}{s^2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = PB = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = CP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el sistema queda como:

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s^2 \\ -\frac{4}{s^2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} F$$

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5.11.

Hallar la matriz de transición de estados y la respuesta temporal de las variables de estado y salida del sistema ante una entrada escalón unitario:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = e^{At}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = (s+5)s + 6 = s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3)$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+2)(s+3)} & \frac{-1}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\} = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3} & \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+3} \\ \frac{6}{s+2} - \frac{6}{s+3} & \frac{-3}{s+2} - \frac{2}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{-3t} & -e^{-2t} + e^{-3t} \\ 6e^{-2t} - 6e^{-3t} & -3e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{-3t} & -e^{-2t} + e^{-3t} \\ 6e^{-2t} - 6e^{-3t} & -3e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \\ &+ \int_0^t \begin{bmatrix} -2e^{-2(t-\tau)} + 3e^{-3(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)} \\ 6e^{-2(t-\tau)} - 6e^{-3(t-\tau)} & -3e^{-2(t-\tau)} - 2e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot d\tau \end{aligned}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{-3t} & -e^{-2t} + e^{-3t} \\ 6e^{-2t} - 6e^{-3t} & -3e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -2e^{-2(t-\tau)} + 3e^{-3(t-\tau)} \\ 6e^{-2(t-\tau)} - 6e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot d\tau$$

Suponiendo condiciones iniciales nulas:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t [-2e^{-2(t-\tau)} + 3e^{-3(t-\tau)}] \cdot d\tau \\ \int_0^t [6e^{-2(t-\tau)} - 6e^{-3(t-\tau)}] \cdot d\tau \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} - e^{-3t} \\ 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

$$x_2(t) = 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

$$y(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

EJERCICIO 5.12.

Calcular el valor de régimen permanente cuando la entrada es un escalón unitario.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x_{\text{est}} = -A^{-1}Bu = -\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$x_{\text{est}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{1 \text{ est}} \\ y_{2 \text{ est}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y_{1 \text{ est}} = -5$$

$$y_{2 \text{ est}} = 2$$

EJERCICIO 5.13.

Obtener el valor de régimen permanente ante una entrada escalón unitario para el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ -266 & -148 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x_{\text{est}} = -A^{-1}Bu = - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ -266 & -148 & -6 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$\begin{bmatrix} x_{1 \text{ est}} \\ x_{2 \text{ est}} \\ x_{3 \text{ est}} \end{bmatrix} = \frac{1}{260} \begin{bmatrix} 74 & 12 & 1 \\ -130 & 0 & 0 \\ -74 & -532 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{260} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{260} \\ 0 \\ -\frac{1}{260} \end{bmatrix}$$

$$y_{\text{est}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{260} \\ 0 \\ -\frac{1}{260} \end{bmatrix} = \frac{1}{130}$$

EJERCICIO 5.14.

Comprobar que los autovalores del sistema en variables de estado coinciden con los polos de la función de transferencia.

$$y'' + 5y' + 6y = u$$

Función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

Descripción interna:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores:

$$\begin{vmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{vmatrix} = s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3)$$

EJERCICIO 5.15.

Diagonalizar mediante los autovalores el sistema dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Autovalores:

$$\begin{aligned} |sI - A| &= 0 \\ \begin{vmatrix} s+1 & 2 & 0 \\ -1 & s-2 & 0 \\ 2 & 1 & s+3 \end{vmatrix} &= s(s^2 + 2s - 3) = 0 \end{aligned}$$

queda: $s_1 = 0$; $s_2 = 1$; $s_3 = -3$;

- Autovectores:

a) Para $s_1 = 0$; (Resolviendo por ecuaciones o por Cramer):

$$\begin{pmatrix} 0+1 & 2 & 0 \\ -1 & 0-2 & 0 \\ 2 & 1 & 0+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \rightarrow \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Para $s_2 = 1$;

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 2 & 0 \\ -1 & 1-2 & 0 \\ 2 & 1 & 1+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \rightarrow \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Para $s_3 = -3$:

$$\begin{pmatrix} -3+1 & 2 & 0 \\ -1 & -3-2 & 0 \\ 2 & 1 & -3+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \rightarrow \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Formar P^{-1} :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -0.25 & -0.5 & 0 \\ 1.25 & -1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos como queda el sistema al haber introducido el cambio de variable:

$$A' = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B' = PB = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.24 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

$$C' = CP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Es importante el resaltar que las variables de estado del sistema han sido cambiadas, es decir, que ya no son las mismas que las dadas en el enunciado.

EJERCICIO 5.16.

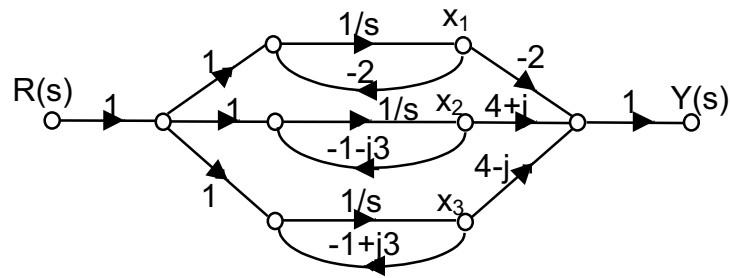
Para el sistema diagonalizar la matriz de estados mediante el método de fracciones simples.

$$T(s) = \frac{6s^2 + 26s + 8}{(s+2)(s^2 + 2s + 10)}$$

Expandiendo en fracciones simples la función de transferencia se obtiene:

$$T(s) = \frac{-2}{(s+2)} + \frac{4+j}{s+1+j3} + \frac{4-j}{s+1-j3}$$

Y la representación gráfica de esto es:



La expresión en variables de estado de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1-j3 & 0 \\ 0 & 0 & -1+j3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

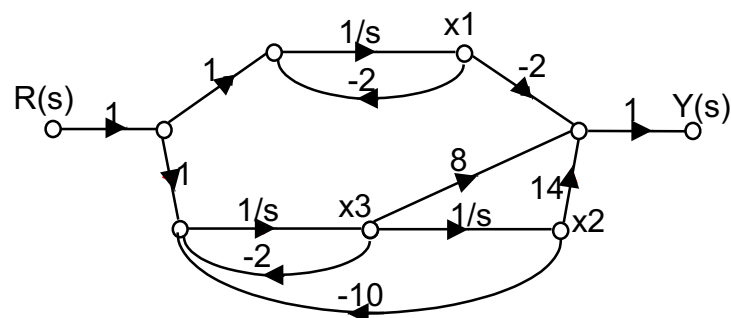
$$y = \begin{pmatrix} -2 & 4+j & 4-j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Como se ve es una representación diagonalizada pero que contiene números complejos.

Para eliminar los números complejos tenemos que agrupar los dos términos complejos de la expansión en fracciones de la función de transferencia. Se puede ver que al realizar esto se pierde la diagonalización.

$$T(s) = \frac{-2}{(s+2)} + \frac{8s+14}{s^2+2s+10} = \frac{-2}{2} \frac{1}{1+\frac{s}{2}} + \frac{\frac{8}{s} + \frac{14}{s^2}}{1+\frac{s}{2} + \frac{10}{s^2}}$$

La representación gráfica es la siguiente:



Y la representación interna al agrupar los término complejos es:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

$$y = \begin{pmatrix} -2 & 14 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5.17.

Comprobar, para el siguiente sistema, si es Completamente Controlable y/o Completamente Observable.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} r$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Como el sistema esta diagonalizado la comprobación es inmediata:

Puede verse que no es Completamente Controlable ya que la variable de estado x_1 no es afectada por la entrada.

Puede verse que no es Completamente Observable porque la salida no es afectada por todas las variables de estado.

EJERCICIO 5.18.

Comprobar si el siguiente sistema es controlable:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$M_c = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 0 & 16 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 20 & 40 \\ -5 & -20 \\ -5 & -24 \end{bmatrix}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 & -8 & 20 & 40 \\ -5 & 0 & 0 & 16 & -5 & -20 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -5 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 100 \neq 0$$

Rango máximo: Completamente Controlable

EJERCICIO 5.19.

Comprobar si el siguiente sistema es observable:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|M_o| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

Rango total: Completamente Observable.

EJERCICIO 5.20.

Comprobar si el siguiente sistema es controlable y observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 60 & 36 \\ -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 25 & 60 & 36 \\ -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ -60 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 10 & -60 & 250 \\ 0 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$|M_c| = \begin{vmatrix} 10 & -60 & 250 \\ 0 & 10 & -60 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 100 \neq 0 \text{ Rango total} \rightarrow \text{Controlable}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$CA = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$CA^2 = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 25 & 60 & 36 \\ -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$M_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|M_o| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{Rango total} \rightarrow \text{Observable}$$

Introducción a las.....	227
Variables de Estado	227
5.1. Introducción	227
5.2. ESPACIO de ESTADOS	228
5.3. FORMA GENERAL DE LAS ECUACIONES DE ESTADO.....	228
5.4. OBTENCION DE LAS VARIABLES DE ESTADO Por el METODO	
ANALITICO	228
5.4.1. Entrada no derivada	228
5.4.2. Entrada derivada	229
5.5. OBTENCIÓN DE LAS VARIABLES DE ESTADO Por el Método gráfico	
(mason).....	231
5.6. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	231
5.7. CAMBIO DE VARIABLES DE ESTADO	232
5.8. RELACIÓN POLOS-AUTOVALORES	233
5.9. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO	233
5.9.1. Ecuaciones homogéneas.....	233
5.9.2. Ecuaciones no homogéneas.....	234
5.9.3. Método de Laplace. Ecuaciones homogéneas.....	234
5.9.4. Método de Laplace. Ecuaciones no homogéneas.....	235
5.10. regimen permanente	236
5.11. DESACOPLO DE LAS ECUACIONES DE ESTADO	236
5.11.1. Mediante autovalores	236
5.11.2. Mediante expansión en fracciones simples.	236
5.11.3. Caso de tener autovalores complejos conjugados	238
5.12. CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD.....	238
5.12.1. Comprobación de controlabilidad y observabilidad.....	238