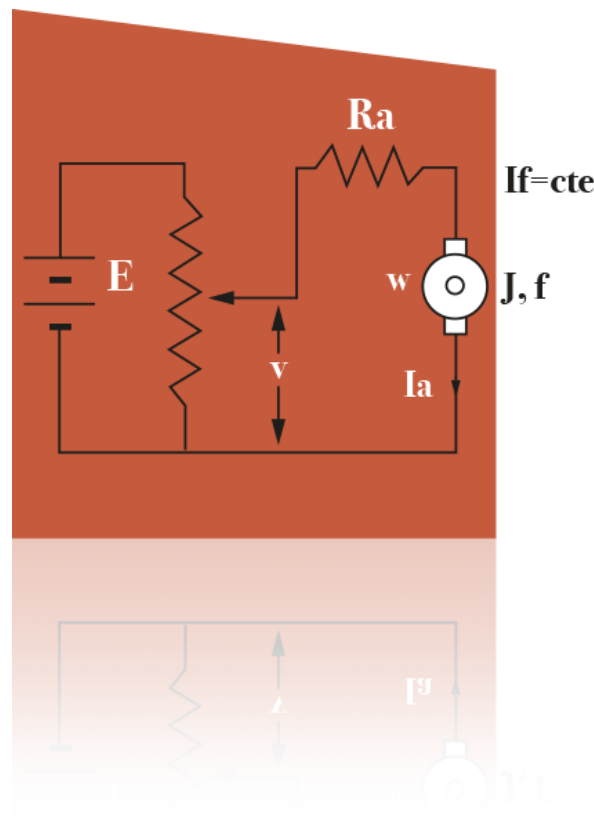


Automática II

Ejercicios Tema 6



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

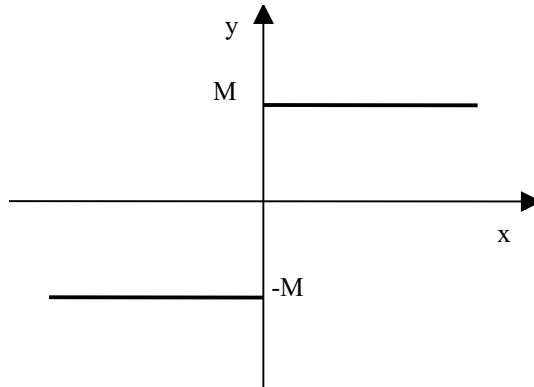
Carlos Torre Ferrero

Elías Revestido Herrero

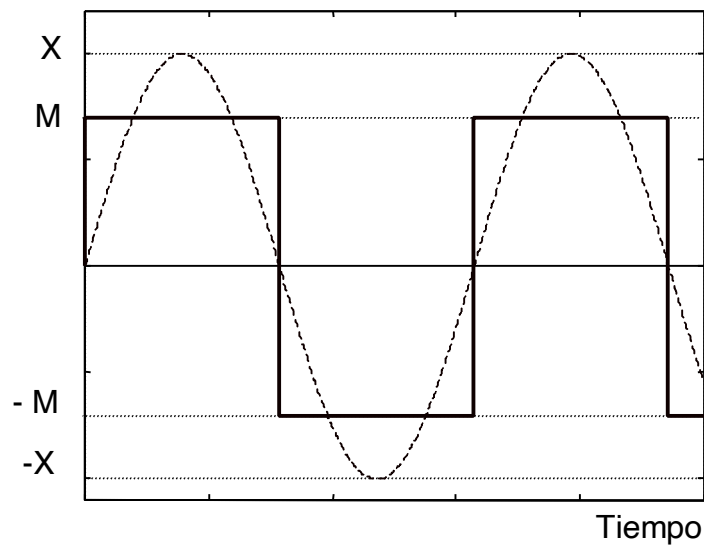
Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 6.1.

Calcular la función descriptiva de un elemento no lineal de dos posiciones como el que se muestra en la figura:



En la figura se representa la entrada senoidal $x(t)=X\text{sen}(\omega t)$ y la salida del elemento no lineal.



La componente fundamental de la salida desarrollando en serie de Fourier será de la forma:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(n\omega t)$$

ya que al ser la función impar los términos A_n son cero.

La componente fundamental de la salida será:

$$y_1(t) = B_1 \text{sen}(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \text{sen}(\omega t) d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \text{sen}(\omega t) d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} M \text{sen}(\omega t) d(\omega t) = \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}(\omega t) d(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{4M}{\pi}$$

$$y_1(t) = \frac{4M}{\pi} \sin(\omega t) \quad Y_1 = \frac{4M}{\pi}$$

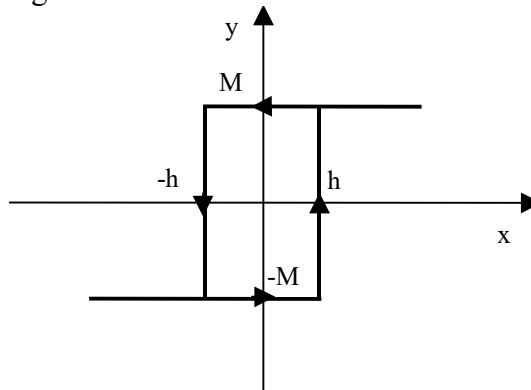
Luego la función descriptiva viene dada por:

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1 = \frac{4M}{\pi X}$$

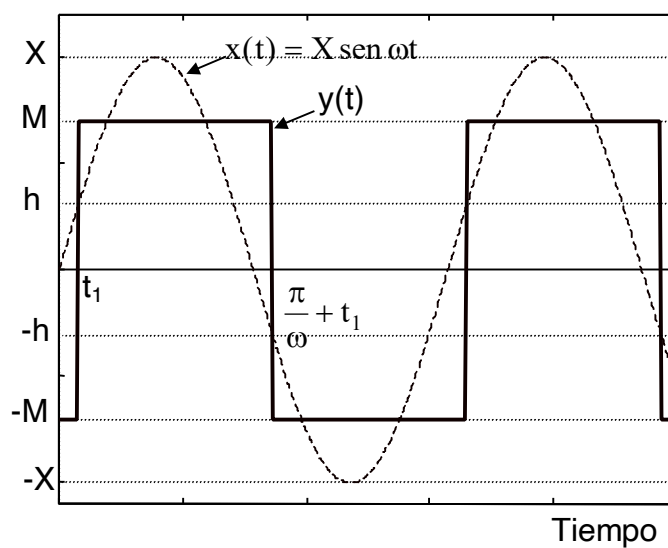
Puede observarse que la función descriptiva sólo depende del valor de la amplitud de la señal de entrada.

EJERCICIO 6.2.

Calcular la función descriptiva de un elemento no lineal de dos posiciones con histéresis como el que se muestra en la figura:



En la figura se representa la entrada senoidal $x(t) = X \sin(\omega t)$ y la salida del elemento no lineal.



En este caso la salida no es impar y por lo tanto habrá que calcular para la componente fundamental tanto el término A_1 como el B_1 .

$$y_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos(\omega t) d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi + \omega t_1} M \cos(\omega t) d(\omega t) =$$

$$= \frac{2M}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi + \omega t_1} \cos(\omega t) d(\omega t) = \frac{2M}{\pi} (-2 \sin(\omega t_1))$$

$$A_1 = -\frac{4M}{\pi} \sin(\omega t_1)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi + \omega t_1} M \sin(\omega t) d(\omega t) =$$

$$= \frac{2M}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi + \omega t_1} \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{2M}{\pi} (2 \cos(\omega t_1))$$

$$B_1 = \frac{4M}{\pi} \cos(\omega t_1)$$

$$Y_1 = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) = -\frac{4M}{\pi} \sin(\omega t_1) \cos(\omega t) + \frac{4M}{\pi} \cos(\omega t_1) \sin(\omega t) =$$

$$= -\frac{4M}{\pi} [\sin(\omega t_1) \cos(\omega t) - \cos(\omega t_1) \sin(\omega t)] = \frac{4M}{\pi} [\cos(\omega t_1) \sin(\omega t) - \sin(\omega t_1) \cos(\omega t)] =$$

Aplicando: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

$$y_1(t) = \frac{4M}{\pi} \sin(\omega t - \omega t_1) = \frac{4M}{\pi} \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$Y_1 = \frac{4M}{\pi}$$

Como $h = X \sin \omega t_1$

$$\omega t_1 = \arcsen \frac{h}{X}$$

$$\phi_1 = -\arcsen \frac{h}{X}$$

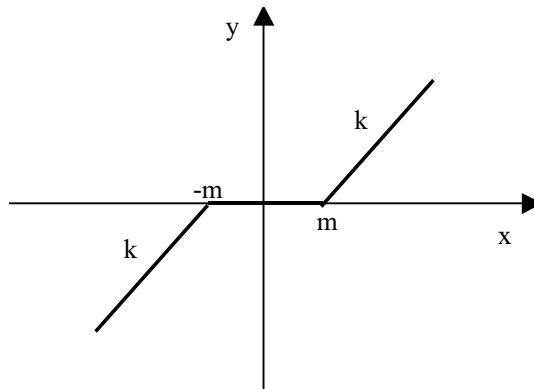
Por tanto, la función descriptiva N:

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1$$

$$N = \frac{\frac{4M}{\pi}}{X} \angle \phi_1 \qquad N = \frac{4M}{\pi X} \angle -\arcsen \frac{h}{X}$$

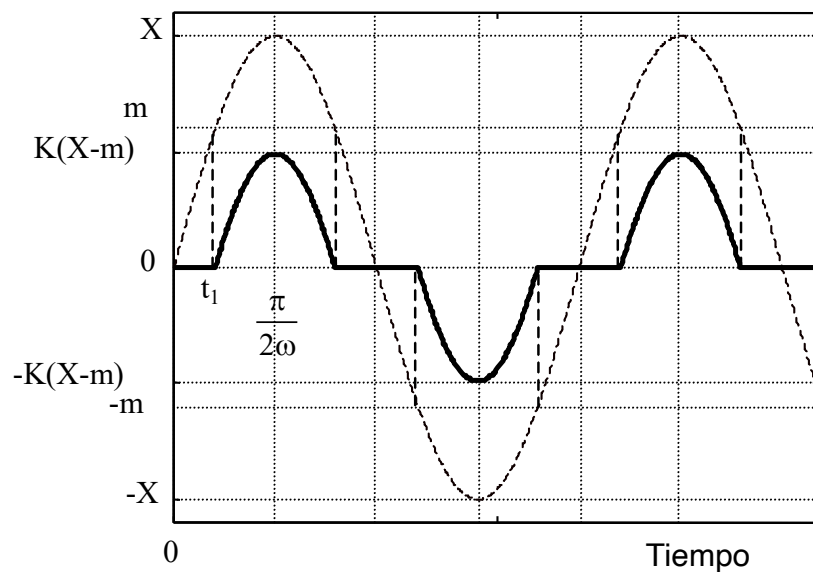
EJERCICIO 6.3.

Calcular la función descriptiva de un elemento no lineal de zona muerta como el que se muestra en la figura:



En la figura se representa la salida $y(t)$ del elemento no lineal ante la entrada senoidal:

$$x(t) = X \sin(\omega t)$$



$$y_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$$

Como la salida $y(t)$ es impar no existen los términos A_i luego el armónico fundamental de la salida será:

$$y_1(t) = B_1 \sin(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} k(X \sin(\omega t) - m) \sin(\omega t) d(\omega t) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4k}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} (X \sin(\omega t) - m) \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{4k}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} [X \sin(\omega t) \sin(\omega t) - m \sin(\omega t)] d(\omega t) = \\
 &= \frac{4kX}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2(\omega t) - \frac{m}{X} \sin(\omega t) \right) d(\omega t) = \frac{4kX}{\pi} \left[\int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\omega t) d(\omega t) - \frac{m}{X} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\omega t) d(\omega t) \right] = \\
 &= \frac{4kX}{\pi} \left[\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4} \right]_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{m}{X} [-\cos \omega t]_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} \right] = \\
 &= \frac{4kX}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sin \pi}{4} - \frac{\omega t_1}{2} + \frac{\sin 2\omega t_1}{4} + \frac{m}{X} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \omega t_1 \right) \right] = \\
 &= \frac{4kX}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\omega t_1}{2} + \frac{\sin 2\omega t_1}{4} - \frac{m}{X} \cos \omega t_1 \right]
 \end{aligned}$$

Como $\sin(\omega t_1)$ se transforma $\cos \omega t_1$ y puede ponerse en función de m:

$$\sin(\omega t_1) = \frac{m}{X}$$

$$\cos(\omega t_1) = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_1}$$

$$\cos(\omega t_1) = \sqrt{1 - \left(\frac{m}{X}\right)^2}$$

$$\omega t_1 = \arcsen\left(\frac{m}{X}\right)$$

$$\sin(2\omega t_1) = 2 \cdot \sin(\omega t_1) \cos(\omega t_1)$$

$$\sin(2\omega t_1) = 2 \frac{m}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{X}\right)^2}$$

luego sustituyendo en B_1 :

$$B_1 = \frac{4kX}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{m}{X}\right) + \frac{1}{2} \frac{m}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{X}\right)^2} - \frac{m}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{X}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{4kX}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{m}{X}\right) - \frac{1}{2} \frac{m}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{X}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{2kX}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsen\left(\frac{m}{X}\right) - \frac{m}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{X}\right)^2} \right]$$

$$y_1(t) = B_1 \sin(\omega t)$$

$$y_1(t) = \frac{2kX}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsen\left(\frac{m}{X}\right) - \frac{m}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{X}\right)^2} \right] \sin(\omega t)$$

$$Y_1 = \frac{2kX}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsen\left(\frac{m}{X}\right) - \frac{m}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{X}\right)^2} \right]$$

Por tanto, la función descriptiva N:

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1$$

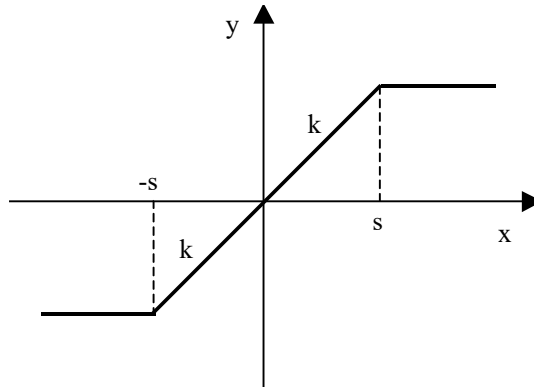
$$N = \frac{\frac{2kX}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsen\left(\frac{m}{X}\right) - \frac{m}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{X}\right)^2} \right]}{X} \angle 0^\circ$$

$$N = \frac{2k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsen\left(\frac{m}{X}\right) - \frac{m}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{X}\right)^2} \right]$$

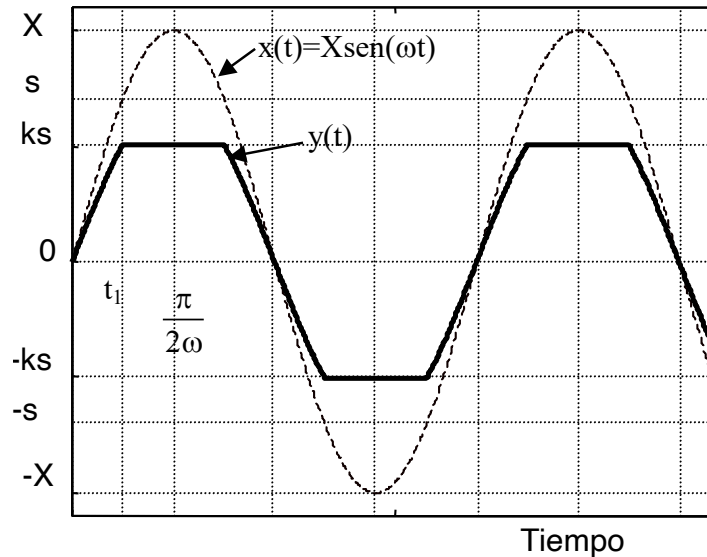
$$N = k - \frac{2k}{\pi} \left[\arcsen\left(\frac{m}{X}\right) + \frac{m}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{X}\right)^2} \right]$$

EJERCICIO 6.4.

Calcular la función descriptiva de un elemento no lineal de saturación como el que se muestra en la figura:



En la figura se representa la entrada senoidal $x(t)=X\text{sen}(\omega t)$ y la salida del elemento no lineal.



$$y_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \text{sen}(\omega t)$$

Como la salida $y(t)$ es impar no existen los términos A_i luego el armónico fundamental de la salida será:

$$y_1(t) = B_1 \text{sen}(\omega t)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \text{sen}(\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \text{sen}(\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\omega t_1} kX \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\omega t) d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} ks \text{sen}(\omega t) d(\omega t) = \end{aligned}$$

$$= \frac{4kX}{\pi} \left[\int_0^{\omega t_1} \sin^2(\omega t) d(\omega t) + \frac{s}{X} \int_{\omega t_1}^{\pi} \sin(\omega t) d(\omega t) \right] =$$

$$= \frac{4kX}{\pi} \left[\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4} \right]_0^{\omega t_1} + \frac{s}{X} \left[-\cos \omega t \right]_{\omega t_1}^{\pi} \right] = \frac{4kX}{\pi} \left[\left[\frac{\omega t_1}{2} - \frac{\sin 2\omega t_1}{4} \right] + \frac{s}{X} [\cos \omega t_1] \right]$$

Como: $s = X \sin(\omega t_1)$ se transforma $\cos \omega t_1$ en función de m:

$$\sin(\omega t_1) = \frac{s}{X}$$

$$\cos(\omega t_1) = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{s}{X}\right)^2}$$

$$\omega t_1 = \arcsen\left(\frac{s}{X}\right)$$

$$\sin 2\omega t_1 = 2 \sin \omega t_1 \cos \omega t_1$$

$$\sin 2\omega t_1 = 2 \frac{s}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{X}\right)^2}$$

luego sustituyendo en B_1 :

$$B_1 = \frac{4kX}{\pi} \left[\frac{\omega t_1}{2} - \frac{\sin 2\omega t_1}{4} + \frac{s}{X} \cos \omega t_1 \right] =$$

$$= \frac{4kX}{\pi} \left[\frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{s}{X}\right) - \frac{1}{2} \frac{s}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{X}\right)^2} + \frac{s}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{X}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{4kX}{\pi} \left[\frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{s}{X}\right) + \frac{1}{2} \frac{s}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{X}\right)^2} \right] = \frac{2kX}{\pi} \left[\arcsen\left(\frac{s}{X}\right) + \frac{s}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{X}\right)^2} \right]$$

$$y_1(t) = B_1 \sin(\omega t)$$

$$y_1(t) = \frac{2kX}{\pi} \left[\arcsen\left(\frac{s}{X}\right) + \frac{s}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{X}\right)^2} \right] \sin(\omega t)$$

$$Y_1 = \frac{2kX}{\pi} \left[\arcsen\left(\frac{s}{X}\right) + \frac{s}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{X}\right)^2} \right]$$

Por tanto la función descriptiva N:

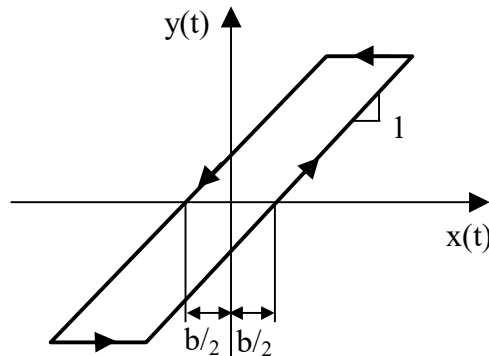
$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1$$

$$N = \frac{\frac{2kX}{\pi} \left[\arcsen\left(\frac{s}{X}\right) + \frac{s}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{X}\right)^2} \right]}{X} \angle 0^\circ$$

$$N = \frac{2k}{\pi} \left[\arcsen\left(\frac{s}{X}\right) + \frac{s}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{X}\right)^2} \right]$$

EJERCICIO 6.5.

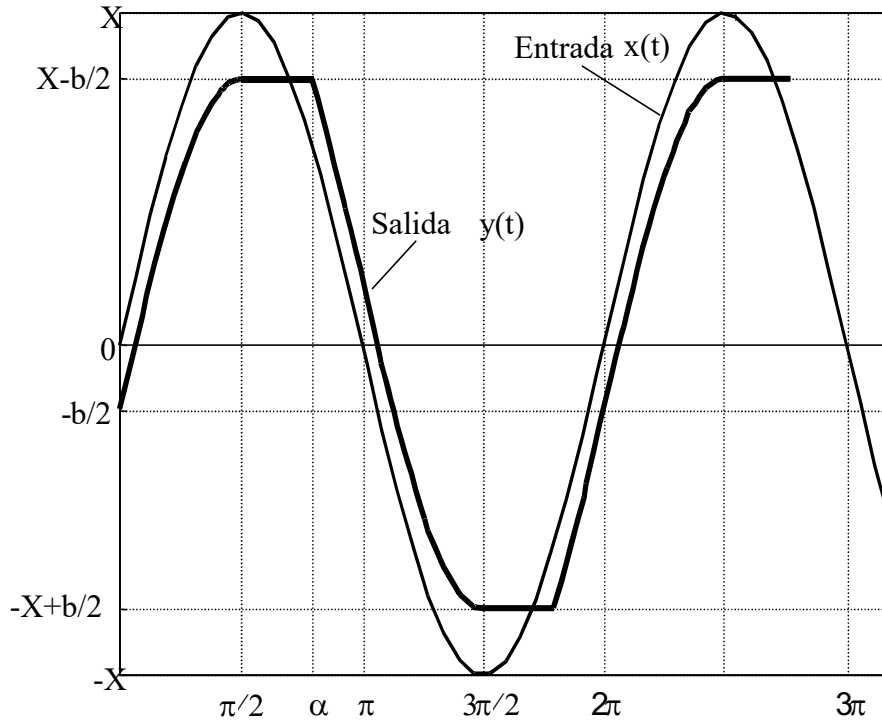
Calcular la función descriptiva de un elemento no lineal como el que se muestra en la figura:



Para una entrada de la forma: $x(t) = X \sin(\omega t)$

Se puede representar la forma de onda de la salida $y(t)$, para valores de la entrada comprendidos entre $0 < \omega t < \pi/2$, por la siguiente serie de ecuaciones:

$X \sin(\omega t) - b/2$	para $0 < \omega t < \pi/2$
$X - b/2$	para $\pi/2 < \omega t < \alpha$
$X \sin(\omega t) + b/2$	para $\alpha < \omega t < 3\pi/2$
$-X + b/2$	para $3\pi/2 < \omega t < \pi + \alpha$
$X \sin(\omega t) - b/2$	para $\pi + \alpha < \omega t < 2\pi$



La componente fundamental de la forma de onda de salida $y(t)$ es:

$$y_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) = Y_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

Donde:

$$Y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{A_1}{B_1}\right)$$

Se obtiene la expresión para el coeficiente B_1 :

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(\omega t) d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \sin(\omega t) d\omega t =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(X \sin(\omega t) - \frac{b}{2} \right) \sin(\omega t) d\omega t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \left(X - \frac{b}{2} \right) \sin(\omega t) d\omega t + \int_{\alpha}^{\pi} \left(X \sin(\omega t) + \frac{b}{2} \right) \sin(\omega t) d\omega t \right]$$

Resolviendo las tres integrales:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(X \sin(\omega t) - \frac{b}{2} \right) \sin(\omega t) d\omega t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} X \sin^2(\omega t) d\omega t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{2} \sin(\omega t) d\omega t =$$

$$\begin{aligned}
 &= X \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} d\omega t - \frac{b}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\omega t) d\omega t = \frac{X}{2} \left([\omega t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin(2\omega t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) - \frac{b}{2} [-\cos(\omega t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{X}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{b}{2} (0 + 1) = \frac{\pi X}{4} - \frac{b}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \left(X - \frac{b}{2} \right) \sin(\omega t) d\omega t &= \left(X - \frac{b}{2} \right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \sin(\omega t) d\omega t = \left(X - \frac{b}{2} \right) [-\cos(\omega t)]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} = \\
 &= \left(X - \frac{b}{2} \right) (-\cos \alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\pi} \left(X \sin(\omega t) + \frac{b}{2} \right) \sin(\omega t) d\omega t &= \int_{\alpha}^{\pi} X \sin^2(\omega t) d\omega t + \int_{\alpha}^{\pi} \frac{b}{2} \sin(\omega t) d\omega t = \\
 &= X \int_{\alpha}^{\pi} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} d\omega t + \frac{b}{2} \int_{\alpha}^{\pi} \sin(\omega t) d\omega t = \frac{X}{2} \left([\omega t]_{\alpha}^{\pi} - \left[\frac{\sin(2\omega t)}{2} \right]_{\alpha}^{\pi} \right) + \frac{b}{2} [-\cos(\omega t)]_{\alpha}^{\pi} = \\
 &= \frac{X}{2} \left(\pi - \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) + \frac{b}{2} (1 + \cos \alpha)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi X}{4} - \frac{b}{2} - X \cos \alpha + \frac{b}{2} \cos \alpha + \frac{X}{2} \left(\pi - \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) + \frac{b}{2} (1 + \cos \alpha) \right] = \\
 &= \frac{2X}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2X} - \cos \alpha + \frac{b}{2X} \cos \alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{4} + \frac{b}{2X} + \frac{b}{2X} \cos \alpha \right] = \\
 &= \frac{2X}{\pi} \left[\frac{3\pi}{4} + \cos \alpha \left(-1 + \frac{b}{2X} + \frac{b}{2X} \right) - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{4} \right] = \\
 &= \frac{2X}{\pi} \left[\frac{3\pi}{4} + \cos \alpha \left(\frac{b}{X} - 1 \right) - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{4} \right]
 \end{aligned}$$

El ángulo α se obtiene de las formas de onda de entrada y salida:

$$\beta = \arcsen \left(1 - \frac{b}{X} \right)$$

$$\alpha = \pi - \beta$$

$$\alpha = \pi - \arcsen\left(1 - \frac{b}{X}\right) = \arccos\frac{X-b}{X}$$

Utilizando las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{2X}{\pi} \left[\frac{3\pi}{4} - \cos\alpha \sin\beta - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{4} \right] = \\ &= \frac{2X}{\pi} \left[\frac{3\pi}{4} - \cos(\pi - \beta) \sin\beta - \frac{\pi - \beta}{2} + \frac{\sin 2(\pi - \beta)}{4} \right] = \\ &= \frac{2X}{\pi} \left[\frac{3\pi}{4} + \cos\beta \sin\beta - \frac{\pi - \beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} \right] = \\ &= \frac{2X}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) + \frac{\sin\beta}{2} - \frac{\sin\beta}{4} \right] = \frac{2X}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) + \frac{\sin\beta}{4} \right] = \\ &= \frac{X}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \beta + \frac{\sin 2\beta}{2} \right] = B_1 \end{aligned}$$

Se obtiene ahora la expresión para el coeficiente A_1 :

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(X \sin(\omega t) - \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t) d\omega t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \left(X - \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t) d\omega t + \int_{\alpha}^{\pi} \left(X \sin(\omega t) + \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t) d\omega t \right]$$

Resolviendo las tres integrales:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(X \sin(\omega t) - \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t) d\omega t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} X \sin(\omega t) \cos(\omega t) d\omega t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{2} \cos(\omega t) d\omega t = \\ &= X \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\omega t)}{2} d\omega t - \frac{b}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega t) d\omega t = \frac{X}{2} \left[\left[-\frac{\cos(2\omega t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right] - \frac{b}{2} [\sin(\omega t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{X}{4} (1+1) - \frac{b}{2} (1-0) = \frac{X}{2} - \frac{b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \left(X - \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t) d\omega t = \left(X - \frac{b}{2} \right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \cos(\omega t) d\omega t = \\
 & = \left(X - \frac{b}{2} \right) [\text{sen}(\omega t)]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} = \left(X - \frac{b}{2} \right) (\text{sen } \alpha - 1) = X \text{sen } \alpha - X - \frac{b}{2} \text{sen } \alpha + \frac{b}{2} \\
 & \int_{\alpha}^{\pi} \left(X \text{sen}(\omega t) + \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t) d\omega t = \int_{\alpha}^{\pi} X \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t) d\omega t + \int_{\alpha}^{\pi} \frac{b}{2} \cos(\omega t) d\omega t = \\
 & = X \int_{\alpha}^{\pi} \frac{\text{sen}(2\omega t)}{2} d\omega t + \frac{b}{2} \int_{\alpha}^{\pi} \cos(\omega t) d\omega t = \frac{X}{2} \left[\left[\frac{-\cos(2\omega t)}{2} \right]_{\alpha}^{\pi} \right] + \frac{b}{2} [\text{sen}(\omega t)]_{\alpha}^{\pi} = \\
 & = \frac{X}{4} (-1 + \cos 2\alpha) - \frac{b}{2} \text{sen } \alpha = -\frac{X}{4} + \frac{X \cos 2\alpha}{4} - \frac{b}{2} \text{sen } \alpha \\
 & A_1 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{X}{2} - \frac{b}{2} + X \text{sen } \alpha - X - \frac{b}{2} \text{sen } \alpha + \frac{b}{2} - \frac{X}{4} + \frac{X \cos 2\alpha}{4} - \frac{b}{2} \text{sen } \alpha \right] = \\
 & = \frac{2X}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \text{sen } \alpha - 1 - \frac{b}{2X} \text{sen } \alpha - \frac{1}{4} + \frac{\cos 2\alpha}{4} - \frac{b}{2X} \text{sen } \alpha \right] = \\
 & = \frac{2X}{\pi} \left[-\frac{3}{4} + \text{sen } \alpha \left(1 - \frac{b}{2X} - \frac{b}{2X} \right) + \frac{\cos 2\alpha}{4} \right] = \frac{2X}{\pi} \left[-\frac{3}{4} + \text{sen } \alpha \left(1 - \frac{b}{X} \right) + \frac{\cos 2\alpha}{4} \right]
 \end{aligned}$$

Utilizando las expresiones:

$$\beta = \arcsen\left(1 - \frac{b}{X}\right)$$

$$\alpha = \pi - \arcsen\left(1 - \frac{b}{X}\right)$$

$$\alpha = \pi - \beta$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{2X}{\pi} \left[-\frac{3}{4} + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta + \frac{\cos 2\alpha}{4} \right] = \\
 &= \frac{2X}{\pi} \left[-\frac{3}{4} + \text{sen}(\pi - \beta) \text{sen } \beta + \frac{1}{4} \cos 2(\pi - \beta) \right] = \\
 &= \frac{2X}{\pi} \left[-\frac{3}{4} + \text{sen}^2 \beta + \frac{1}{4} (\cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta) \right] = \frac{2X}{\pi} \left[-\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \text{sen}^2 \beta + \frac{1}{4} \cos^2 \beta \right] =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2X}{\pi} \left[-\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \left(1 + \frac{b^2}{X^2} - 2 \frac{b}{X} \right) + \frac{1}{4} \left(2 \frac{b}{X} - \frac{b^2}{X^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{2X}{\pi} \left[\frac{b^2}{X^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) - \frac{b}{X} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{2X}{\pi} \left[\frac{b^2}{2X^2} - \frac{b}{X} \right]$$

Una vez calculado A_1 y B_1 obtenemos la función descriptiva:

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1$$

$$Y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

$$\phi_1 = \arctan \left(\frac{A_1}{B_1} \right)$$

$$Y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{\left(\frac{2X}{\pi} \right)^2 \left(\frac{b^2}{2X^2} - \frac{b}{X} \right)^2 + \frac{X^2}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta + \frac{\sin 2\beta}{2} \right)^2} =$$

$$= \frac{X}{\pi} \sqrt{4 \left(\frac{b^2 - 2bX}{2X^2} \right)^2 + \left(\frac{\pi + 2\beta + \sin 2\beta}{2} \right)^2} =$$

$$= \frac{X}{2\pi} \sqrt{\frac{4b^2(2X-b)^2}{X^4} + \pi^2 + 4\beta^2 + \sin^2 2\beta + 4\beta\pi + (2\pi + 4\beta)\sin 2\beta}$$

$$\phi_1 = \arctg \frac{A_1}{B_1} = \arctg \frac{\frac{2X}{\pi} \left(\frac{b^2}{2X^2} - \frac{b}{X} \right)}{\frac{X}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \beta + \frac{\sin 2\beta}{2} \right)} =$$

$$= \arctg \frac{2 \left(\frac{b^2 - 2Xb}{2X^2} \right)}{\frac{\pi + 2\beta + \sin 2\beta}{2}} =$$

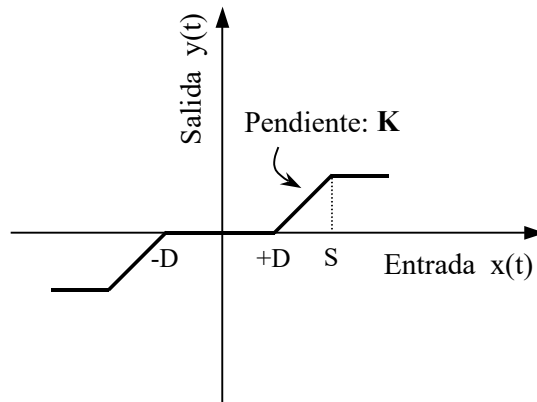
$$= \arctg \frac{2(b^2 - Xb)}{X^2 (\pi + 2\beta + \sin 2\beta)}$$

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4b^2(2X-b)^2}{X^4} + \pi^2 + 4\beta^2 + \sin^2 2\beta + 4\beta\pi + (2\pi + 4\beta)\sin^2 2\beta}$$

$$\angle \arctg \frac{2(b^2 - Xb)}{X^2(\pi + 2\beta + \sin 2\beta)}$$

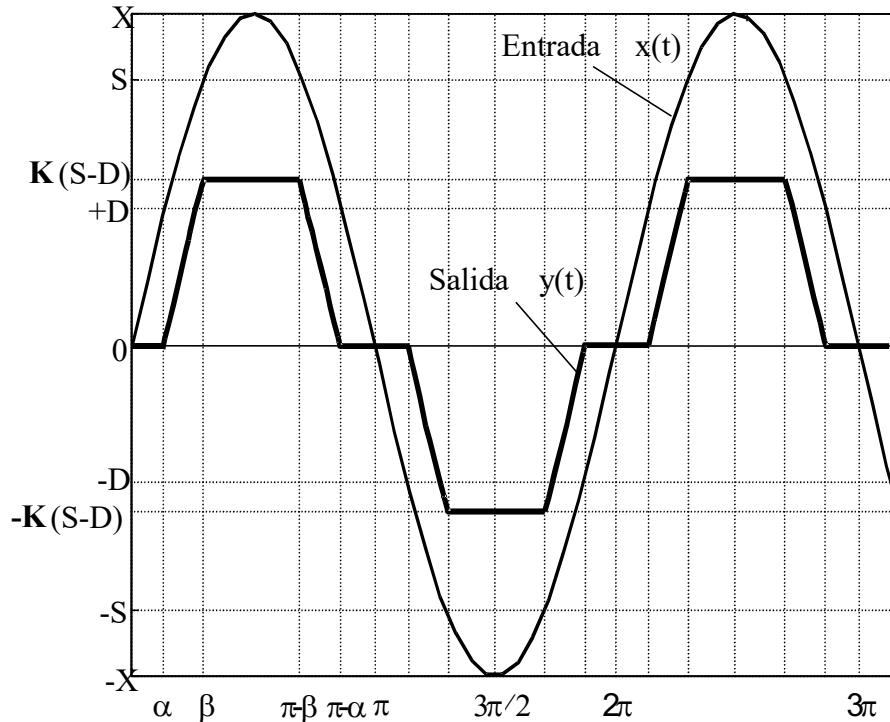
EJERCICIO 6.6.

Calcular la función descriptiva para el elemento no lineal resultante de la combinación de una zona muerta y una saturación.



Para una entrada senoidal $x(t) = X\sin(\omega t)$, si la amplitud de la entrada está dentro de la zona muerta ($0 < x < D$), no habrá salida. Además cuando la amplitud supere el valor de saturación S , la salida va a mantener un valor constante.

La figura siguiente representa las formas de onda de la entrada y la salida para las diferentes amplitudes:



Si la amplitud de la entrada está dentro de la zona muerta ($0 < x < D$), no habrá salida. Además cuando la amplitud supere el valor de saturación S , la salida va a mantener un valor constante.

La salida para valores de la entrada comprendidos entre $0 < \omega t < \pi$ será:

$$\begin{aligned} 0 & \quad \text{para } 0 < \omega t < \alpha \\ K[X \sin \omega t - D] & \quad \text{para } \alpha < \omega t < \beta \\ K(S - D) & \quad \text{para } \beta < \omega t < \pi - \beta \\ K[X \sin \omega t - D] & \quad \text{para } \pi - \beta < \omega t < \pi - \alpha \\ 0 & \quad \text{para } \pi - \alpha < \omega t < \pi \end{aligned}$$

La función de salida es impar, su expansión en serie de Fourier sólo contiene términos de seno. Se obtiene la expresión para el primer armónico:

$$y_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) = Y_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

Donde:

$$Y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{0^2 + B_1^2} = B_1$$

$$\phi_1 = \arctg\left(\frac{A_1}{B_1}\right) = \arctg(0) = 0$$

Sustituyendo $y(t)$ para obtener la expresión de Y_1 :

$$\begin{aligned} Y_1 = B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(\omega t) d\omega t = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \sin(\omega t) d\omega t = \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\int_{\alpha}^{\beta} K[X \sin(\omega t) - D] \sin(\omega t) d\omega t + \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} K(S - D) \sin(\omega t) d\omega t \right] \end{aligned}$$

Resolviendo ambas integrales:

$$\int_{\alpha}^{\beta} K[X \sin(\omega t) - D] \sin(\omega t) d\omega t = K \left(\int_{\alpha}^{\beta} X \sin^2(\omega t) d\omega t - D \int_{\alpha}^{\beta} \sin(\omega t) d\omega t \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= K \left(X \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} d\omega t - D \int_{\alpha}^{\beta} \sin(\omega t) d\omega t \right) = \\
 &= K \left\{ \frac{X}{2} \left([\omega t]_{\alpha}^{\beta} - \left[\frac{\sin(2\omega t)}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} \right) - D [-\cos(\omega t)]_{\alpha}^{\beta} \right\} = \\
 &= K \left[\frac{X}{2} \left(\beta - \alpha - \frac{\sin 2\beta}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) - D (-\cos \beta + \cos \alpha) \right] = \\
 &= \frac{K X}{2} \left(\beta - \alpha - \frac{\sin 2\beta}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) - K D (-\cos \beta + \cos \alpha) \\
 &\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} K (S - D) \sin(\omega t) d\omega t = K (S - D) [-\cos \omega t]_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} = K (S - D) [\cos \beta] = \\
 &= K (S \cos \beta - D \cos \beta)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{K X}{2} \left(\beta - \alpha - \frac{\sin 2\beta}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) + K D \cos \beta - K D \cos \alpha + K S \cos \beta - K D \cos \beta \right] = \\
 &= \frac{4 K X}{2\pi} \left[\beta - \alpha - \frac{\sin 2\beta}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{2 D}{X} \cos \alpha + \frac{2 S}{X} \cos \beta \right] = \\
 &= \frac{2 K X}{\pi} \left[\beta - \alpha - \frac{\sin 2\beta}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{2}{X} (D \cos \alpha - S \cos \beta) \right]
 \end{aligned}$$

De la forma de onda de entrada obtengo las siguientes ecuaciones:

$$S = X \sin \beta$$

$$D = X \sin \alpha$$

Sustituyendo en la expresión de B_1 :

$$B_1 = \frac{2 K X}{\pi} \left[\beta - \alpha - \frac{\sin 2\beta}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{2}{X} (X \sin \alpha \cos \alpha - X \sin \beta \cos \beta) \right]$$

Utilizando las fórmulas trigonométricas del ángulo doble:

$$B_1 = \frac{2 K X}{\pi} \left[\beta - \alpha - \frac{\sin 2\beta}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2} - 2 \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \frac{\sin 2\beta}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{2 K X}{\pi} \left[\beta - \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 2\beta}{2} \right] = \frac{2 K X}{\pi} \left[\beta - \alpha - \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{2} \right]$$

Una vez calculado $Y_1 = B_1$ obtenemos la función descriptiva:

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1 = \frac{2 K}{\pi} \left[\beta - \alpha - \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{2} \right] \angle 0^\circ$$

$$\text{Para } X < D \quad N = 0$$

$$\text{Para } X > S - D \quad N = \frac{2 K}{\pi} \left[\beta - \alpha - \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{2} \right]$$

$$\text{Para } K(S - D) > X > D \quad N = \frac{2 K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right]$$

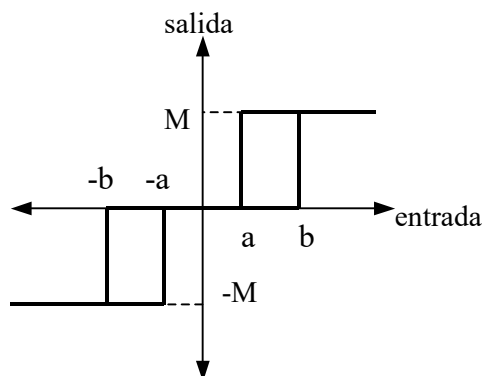
donde

$$\alpha = \arcsen \frac{D}{X}$$

$$\beta = \arcsen \frac{S}{X}$$

EJERCICIO 6.7.

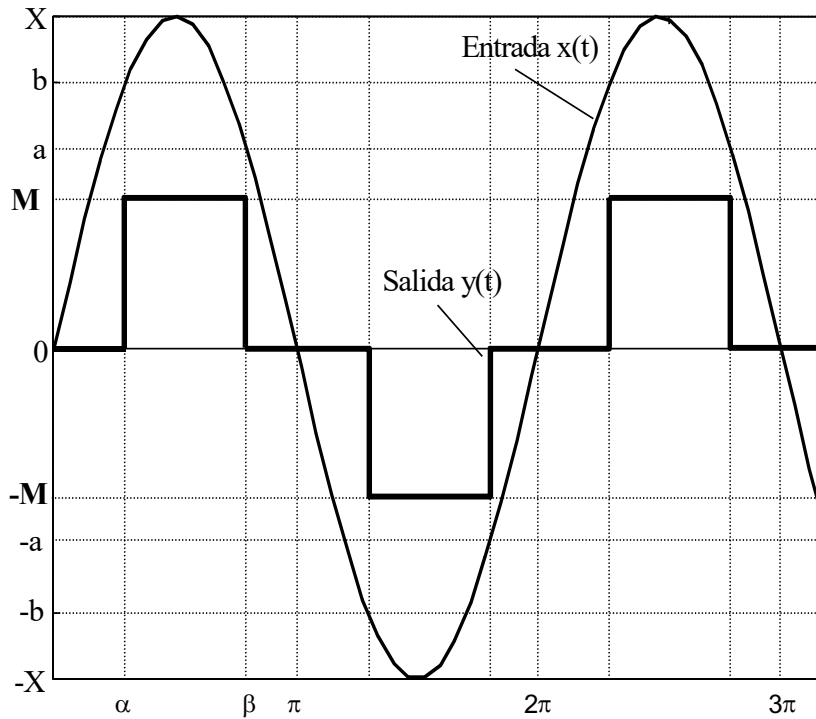
Calcular la función descriptiva para el elemento no lineal de conexión-desconexión con zona muerta e histéresis de la figura:



La figura muestra las formas de onda de entrada y salida de un elemento con estas características.

El elemento no lineal no pone la salida a valor M hasta que la entrada supera el valor b y se

mantiene en dicho valor hasta que la entrada se hace menor que a . En la región entre a y b , la salida depende de la entrada y de la historia previa. El elemento funciona de forma similar ante una entrada negativa.



Para una entrada $x(t) = X \sin(\omega t)$, puede representarse la forma de onda de la salida, para valores de la entrada comprendidos entre $0 < \omega t < \pi$, por la siguiente serie de ecuaciones:

$$0 \quad \text{para } 0 < \omega t < \alpha$$

$$M \quad \text{para } \alpha < \omega t < \beta$$

$$0 \quad \text{para } \beta < \omega t < \pi$$

La componente fundamental de la forma de onda de salida $y(t)$ es:

$$y_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) = Y_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

Donde:

$$Y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

$$\phi_1 = \arctg\left(\frac{A_1}{B_1}\right)$$

Se obtiene la expresión para el coeficiente B_1 :

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(\omega t) d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \sin(\omega t) d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} M \sin(\omega t) d\omega t =$$

$$= \frac{2M}{\pi} [-\cos(\omega t)]_{\alpha}^{\beta} = \frac{2M}{\pi} [-\cos \beta + \cos \alpha]$$

Se obtiene la expresión para el coeficiente A_1 :

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos(\omega t) d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \cos(\omega t) d\omega t = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} M \cos(\omega t) d\omega t =$$

$$= \frac{2M}{\pi} [\sin(\omega t)]_{\alpha}^{\beta} = \frac{2M}{\pi} [\sin \beta - \cos \alpha]$$

De la forma de onda de la entrada obtengo:

$$b = X \sin \alpha$$

$$\alpha = \arcsen \frac{b}{X}$$

$$a = X \sin(\pi - \beta)$$

$$\beta = \pi - \arcsen \frac{a}{X}$$

Una vez calculado A_1 y B_1 se obtiene:

$$Y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{\left[\frac{2M}{\pi} (\sin \beta - \cos \alpha) \right]^2 + \left[\frac{2M}{\pi} (\cos \alpha - \cos \beta) \right]^2} =$$

$$= \frac{2M}{\pi} \sqrt{(\sin \beta - \cos \alpha)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2} =$$

$$= \frac{2M}{\pi} \sqrt{\sin^2 \beta - 2 \sin \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta} =$$

$$= \frac{2M}{\pi} \sqrt{1 + 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin \beta \cos \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta}$$

Sustituyendo los valores de α y de β :

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \frac{2M}{\pi} \sqrt{1 + 2 \cos^2 \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) - 2 \sen \left(\pi - \arcsen \frac{a}{X} \right) \cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) -} \\
 &\quad - 2 \cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) \cos \left(\pi - \arcsen \frac{a}{X} \right) \\
 &= \frac{2M}{\pi} \sqrt{1 + 2 \cos^2 \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) -} \\
 &\quad - 2 \cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) \left[\sen \pi \cos \left(\arcsen \frac{a}{X} \right) - \cos \pi \sen \left(\arcsen \frac{a}{X} \right) \right] -} \\
 &\quad - 2 \cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) \left[\cos \pi \cos \left(\arcsen \frac{a}{X} \right) + \sen \pi \sen \left(\arcsen \frac{a}{X} \right) \right] \\
 &= \frac{2M}{\pi} \sqrt{1 + 2 \cos^2 \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) - 2 \cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) \left(\frac{a}{X} \right) -} \\
 &\quad - 2 \cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) \left[- \cos \left(\arcsen \frac{a}{X} \right) \right] \\
 &= \frac{2M}{X} \sqrt{1 + 2 \cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) \left[- \frac{a}{X} + \cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) + \cos \left(\arcsen \frac{a}{X} \right) \right]} \\
 \phi_1 &= \arctg \left(\frac{A_1}{B_1} \right) = \arctg \frac{\sen \beta - \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos \beta} = \arctg \frac{\sen \left(\pi - \arcsen \frac{a}{X} \right) - \cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right)}{\cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) - \cos \left(\pi - \arcsen \frac{a}{X} \right)} = \\
 &= \arctg \frac{\sen \pi \sen \left(\arcsen \frac{a}{X} \right) - \cos \pi \cos \left(\arcsen \frac{a}{X} \right) - \cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right)}{\cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) - \left[\cos \pi \cos \left(\arcsen \frac{a}{X} \right) + \sen \pi \sen \left(\arcsen \frac{a}{X} \right) \right]} = \\
 &= \arctg \frac{\cos \left(\arcsen \frac{a}{X} \right) - \cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right)}{\cos \left(\arcsen \frac{b}{X} \right) + \cos \left(\arcsen \frac{a}{X} \right)} = \phi_1
 \end{aligned}$$

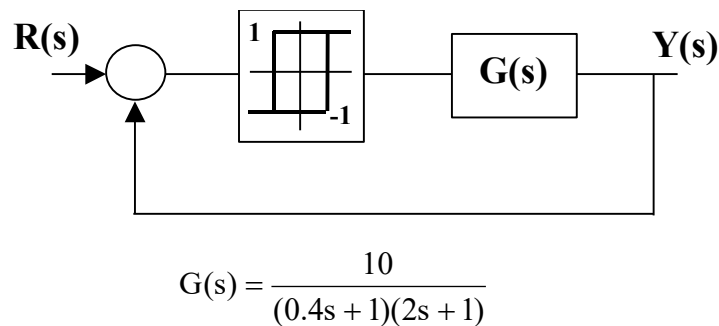
Luego la Función descriptiva queda:

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1 = \frac{2M}{\pi X} \sqrt{1 + 2 \cos\left(\arcsen \frac{b}{X}\right) \left[-\frac{a}{X} + \cos\left(\arcsen \frac{b}{X}\right) + \cos\left(\arcsen \frac{a}{X}\right) \right]}$$

$$\angle \arctg \frac{\cos\left(\arcsen \frac{a}{X}\right) - \cos\left(\arcsen \frac{b}{X}\right)}{\cos\left(\arcsen \frac{b}{X}\right) + \cos\left(\arcsen \frac{a}{X}\right)}$$

EJERCICIO 6.8.

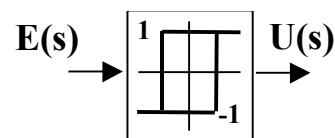
En la siguiente figura se puede observar un sistema de control en el que aparece un elemento no lineal del tipo todo nada, con histéresis.



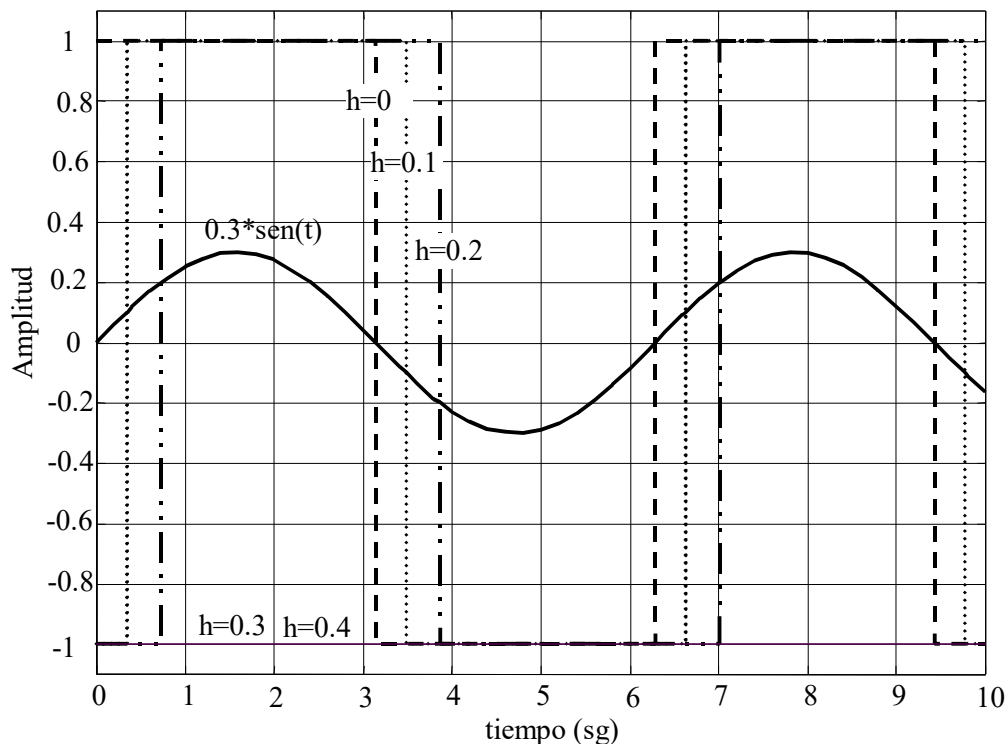
1. Calcular la función descriptiva del elemento no lineal.
2. Dibujar el diagrama polar de la función de transferencia $G(s)$.
3. Analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado.
4. Respuesta del sistema ante entradas escalón sin considerar y considerando la no linealidad. Conclusiones.

1. El sistema en lazo cerrado presenta una no linealidad de tipo todo-nada con histéresis.

La salida del elemento no lineal será:



Suponiendo que la señal de entrada al sistema es una entrada sinusoidal de amplitud 0.3v, que la frecuencia es de 1 rad/sg. y que variamos la histéresis desde 0 a 0.4v:



Como se puede comprobar en la figura anterior, el efecto de este elemento no lineal es hacer que su salida sólo pueda tomar dos valores (+1 ó -1). Se observa, también, que la señal cuadrada a su salida tiene la misma frecuencia que la de entrada y que no varía con la modificación de la histéresis. A partir de del valor $h=0.3$, la amplitud de la señal de entrada no supera nunca el umbral de la histéresis por lo que la salida es siempre nula.

Periodo: $T=6.283 \approx 2\pi$.

Frecuencia (Hz) $f = \frac{1}{2\pi} = 0.1592 \text{ Hz}$

(rad/sg) $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{2\pi} = 1 \text{ rad/sg.}$

Lo que sí varía con la histéresis es el desfase que se produce entre la señal de entrada y la señal de salida. Se puede comprobar que el desfase que se produce es de la forma:

$$X \cdot \sin(\omega t_1) = h$$

$$\omega t_1 = \text{ArcSen}(h/X) \quad (\text{rad})$$

$$t_1 = \frac{[\text{ArcSen}(h/X)]}{\omega}$$

En este caso:

$$t_1 = \frac{[\text{ArcSen}(0.2/0.3)]}{1} = 0.73 \text{ sg.}$$

Calculo de la función descriptiva:

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \Phi_1$$

En cualquier caso, la transformada de Fourier de la señal de salida del elemento no lineal es de la forma:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (Y_n \sin(n\omega t + \phi_n))$$

Siendo:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \cos(n\omega t) \cdot d(\omega t)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \sin(n\omega t) \cdot d(\omega t)$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\phi_n = \text{Arctang}\left(\frac{A_n}{B_n}\right)$$

Y la componente fundamental:

$$y_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) = Y_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1)$$

Siendo:

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y_1(t) \cdot \cos(\omega t) \cdot d(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y_1(t) \cdot \sin(\omega t) \cdot d(\omega t)$$

En este caso, el módulo del primer armónico será el mismo, tenga histéresis o no, la única diferencia estará en el retardo. Entonces realizamos el cálculo del módulo con el sistema sin histéresis y luego le ponemos el desfase de la histéresis. Sin histéresis la señal es impar, con lo que $A_n=0$, entonces:

$$y_1(t) = B_1 \sin(\omega t)$$

Calculando B_1 :

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} M \cdot \sin(\omega t) \cdot d(\omega t) = \frac{-2M}{\pi} [\cos(\omega t)]_0^{\pi} = \frac{4M}{\pi}$$

Entonces, el primer armónico será de la forma:

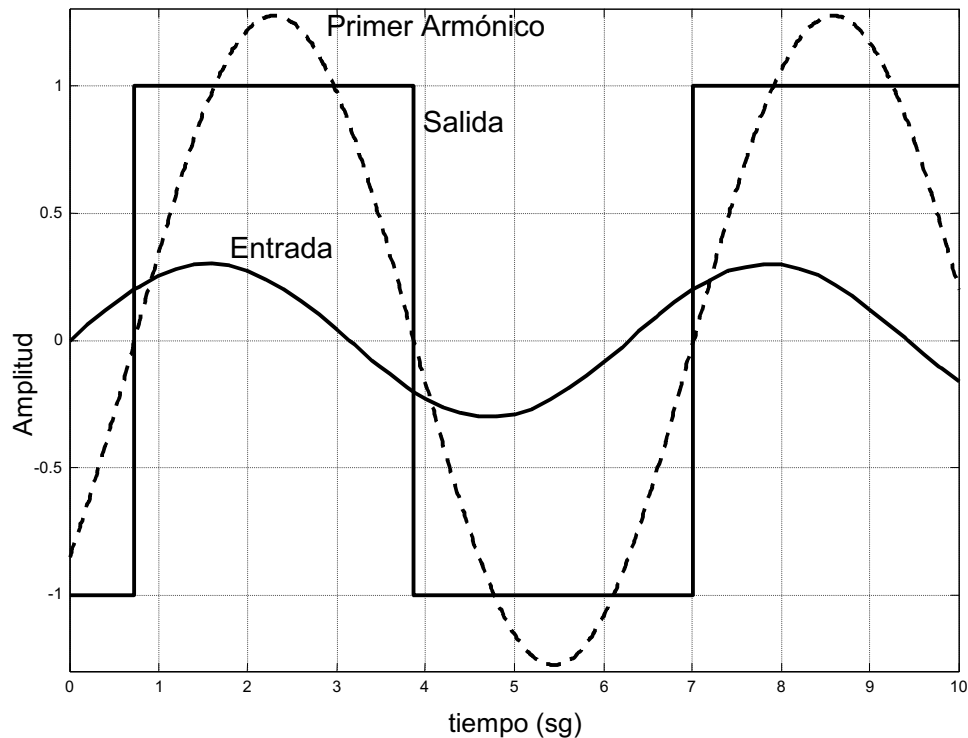
$$y_1(t) = \frac{4M}{\pi} \sin(\omega t + \phi) \quad \phi = -\text{ArcSen}(h/X)$$

El desfase de la salida corresponde con un retardo, por eso el signo negativo.

Entonces, la función descriptiva de este elemento:

$$N = \frac{4M}{\pi X} \angle -\text{ArcSen}(h/X)$$

En la figura se muestra la respuesta del sistema para el ejemplo actual, con $h=0.2$, $w=1$ rad/sg., $M=1$, y amplitud de senoidal de entrada de $0.3v$:



2. Cálculo del diagrama polar de la función de transferencia del sistema.

$$G(s) = \frac{10}{(0.4s + 1)(2s + 1)}$$

$$G(jw) = \frac{10}{(0.4jw + 1)(2jw + 1)}$$

Cuando la frecuencia w tiende a cero:

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{10}{(0.4jw + 1)(2jw + 1)} = 10 \rightarrow 10 \angle 0^\circ$$

Cuando la frecuencia w tiende a infinito:

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{10}{(0.4jw + 1)(2jw + 1)} \rightarrow 0 \angle -180^\circ$$

El punto de corte con el eje imaginario:

$$G(jw) = \frac{10}{(0.4jw + 1)(2jw + 1)} = \frac{10}{2.4jw + 1 - 0.8w^2}$$

$$G(jw) = \frac{10(2.4jw - (1 - 0.8w^2))}{(2.4jw + (1 - 0.8w^2))(2.4jw - (1 - 0.8w^2))}$$

$$G(jw) = \frac{10[2.4jw - (1 - 0.8w^2)]}{[2.4^2 w^2 + (1 - 0.8w^2)^2]}$$

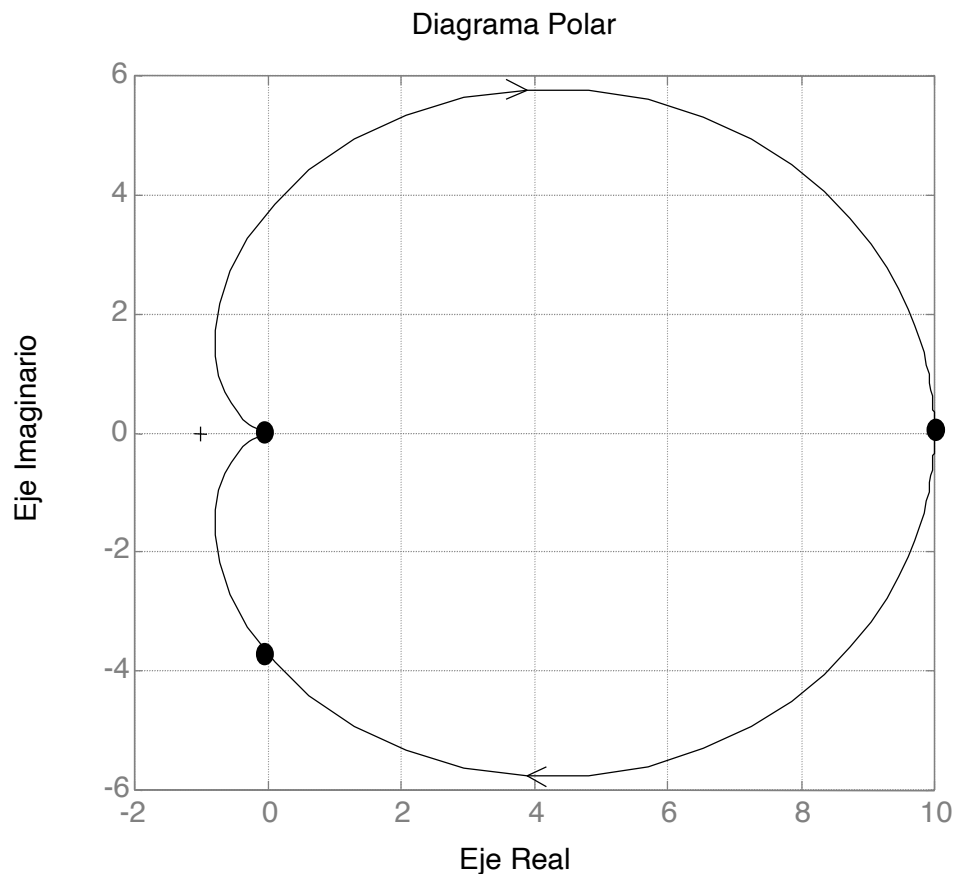
Haciendo la parte real igual a cero:

$$w = \sqrt{10/8} = 1.118 \text{ rad / sg}$$

Y llevando este valor a la parte imaginaria:

$$G(jw) = \left[\frac{10[2.4jw]}{[2.4^2 w^2 + (1 - 0.8w^2)^2]} \right]_{w=1.118} = 3.72$$

Con lo que el diagrama polar queda de la forma mostrada en la siguiente figura.



3. Análisis de la estabilidad del sistema, en lazo cerrado:

Tratando a la función descriptiva como una ganancia compleja, se puede llegar a que la ecuación característica es de la forma:

$$1 + N \cdot G(s) = 0 ; \text{ luego: } G(s) = \frac{-1}{N}$$

Esto serían los puntos donde la ecuación característica se anula, el denominador se hace cero, y la función de transferencia de lazo cerrado tiende a infinito (Sistema Inestable). Recordar que en los sistemas lineales esto era en el punto -1.

Entonces, lo primero es calcular la zona que hará inestable al sistema (-1/N):

Suponiendo que se varía la amplitud de la entrada entre 0v y 2v, las siguientes tablas muestran los valores de N y 1/N para cada uno de los valores de la amplitud X, considerando diferentes valores de la histéresis de la no linealidad.

En concreto se presentan los valores correspondientes para la no linealidad sin histéresis (h=0), y para histéresis de valor 0.2 y 0.4. Considerando M=1, el cálculo de los valores de N de esta tabla se obtienen mediante la siguiente expresión:

$$N = \frac{4}{\pi X} \angle -\arcsen(h/X) = \frac{4}{\pi X} \cos\left(-\arcsen \frac{h}{X}\right) + j \frac{4}{\pi X} \sen\left(-\arcsen \frac{h}{X}\right)$$

Para h=0:

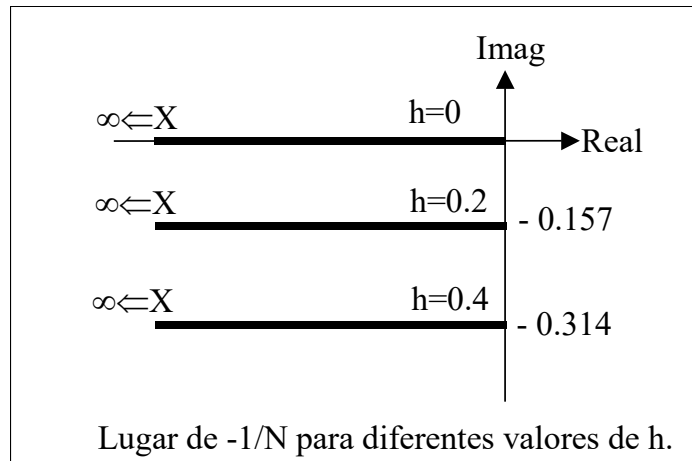
X	N	-1/N
0	-	-
0.2	6.3662	-0.1571
0.4	3.1831	-0.3142
0.6	2.1221	-0.4712
0.8	1.5915	-0.6283
1	1.2732	-0.7854
1.2	1.0610	-0.9425
1.4	0.9095	-1.0996
1.6	0.7958	-1.2566
1.8	0.7074	-1.4137
2	0.6366	-1.5708

Para $h=0.2$:

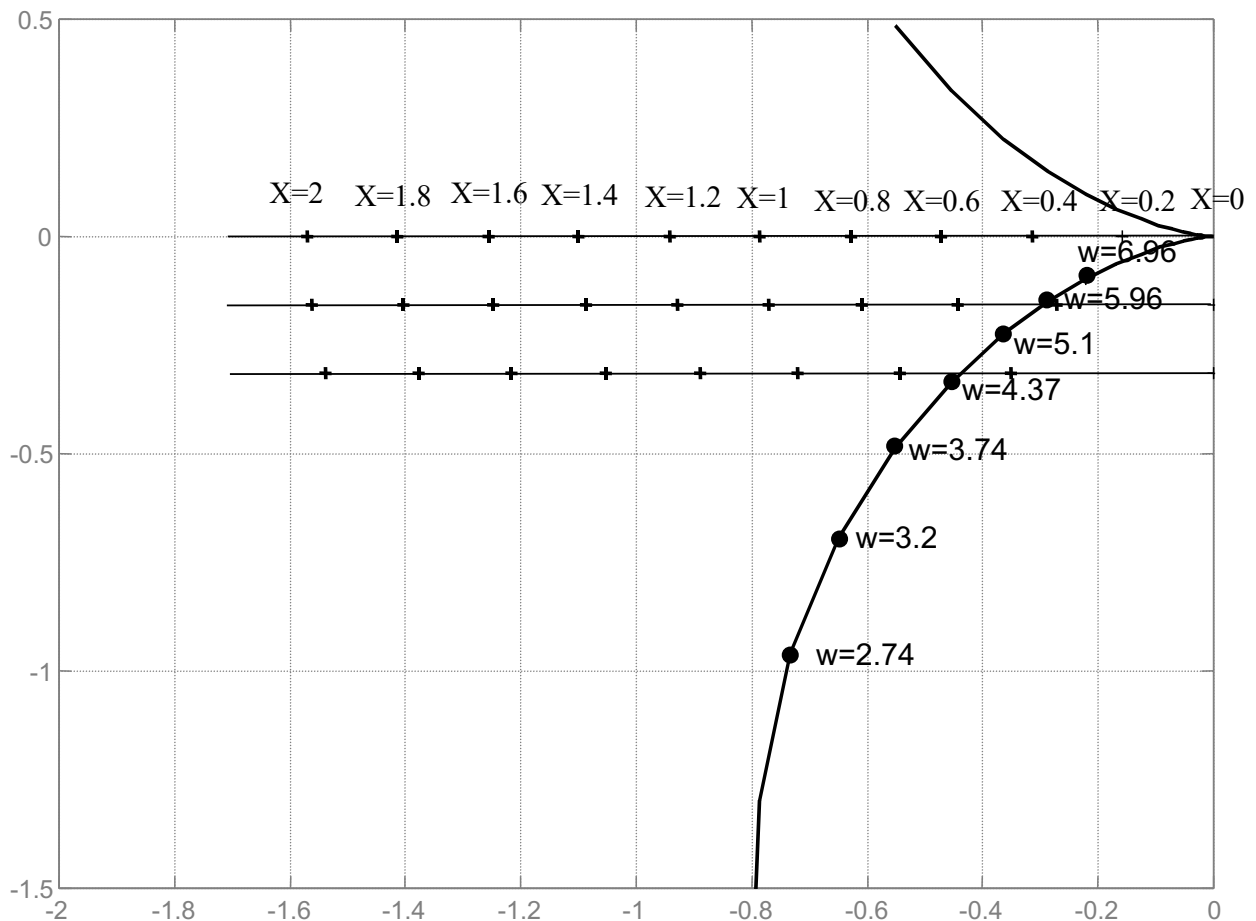
X	N	-1/N
0	-	-
0.2	0.0000 - 6.3662i	0.0000 - 0.1571i
0.4	2.7566 - 1.5915i	-0.2721 - 0.1571i
0.6	2.0007 - 0.7074i	-0.4443 - 0.1571i
0.8	1.5410 - 0.3979i	-0.6084 - 0.1571i
1	1.2475 - 0.2546i	-0.7695 - 0.1571i
1.2	1.0462 - 0.1768i	-0.9293 - 0.1571i
1.4	0.9001 - 0.1299i	-1.0883 - 0.1571i
1.6	0.7895 - 0.0995i	-1.2468 - 0.1571i
1.8	0.7030 - 0.0786i	-1.4050 - 0.1571i
2	0.6334 - 0.0637i	-1.5629 - 0.1571i

Para $h=0.4$:

X	N	-1/N
0	-	-
0.2	0.0000 - 1.7058i	0.0000 - 0.3142i
0.4	0.0000 - 3.1831i	0.0000 - 0.3142i
0.6	1.5817 - 1.4147i	-0.3512 - 0.3142i
0.8	1.3783 - 0.7958i	-0.5441 - 0.3142i
1	1.1669 - 0.5093i	-0.7198 - 0.3142i
1.2	1.0004 - 0.3537i	-0.8886 - 0.3142i
1.4	0.8715 - 0.2598i	-1.0537 - 0.3142i
1.6	0.7705 - 0.1989i	-1.2167 - 0.3142i
1.8	0.6897 - 0.1572i	-1.3784 - 0.3142i
2	0.6238 - 0.1273i	-1.5391 - 0.3142i



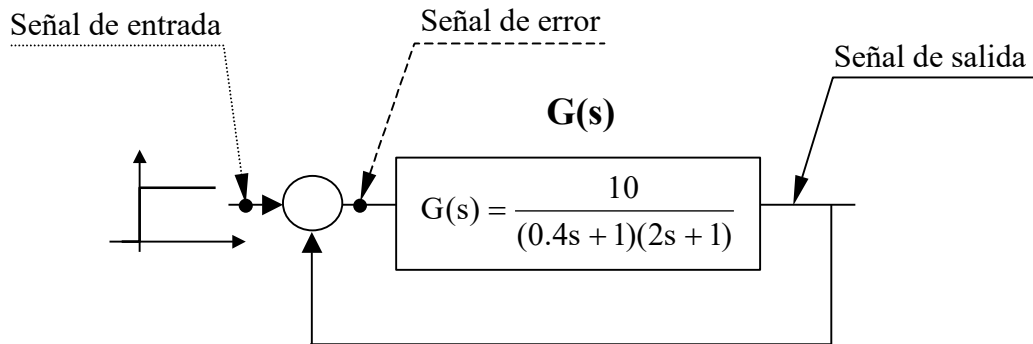
En la siguiente figura se representa $G(jw)$ y $1/N$ para localizar los ciclos límite:



4. Pruebas y simulaciones

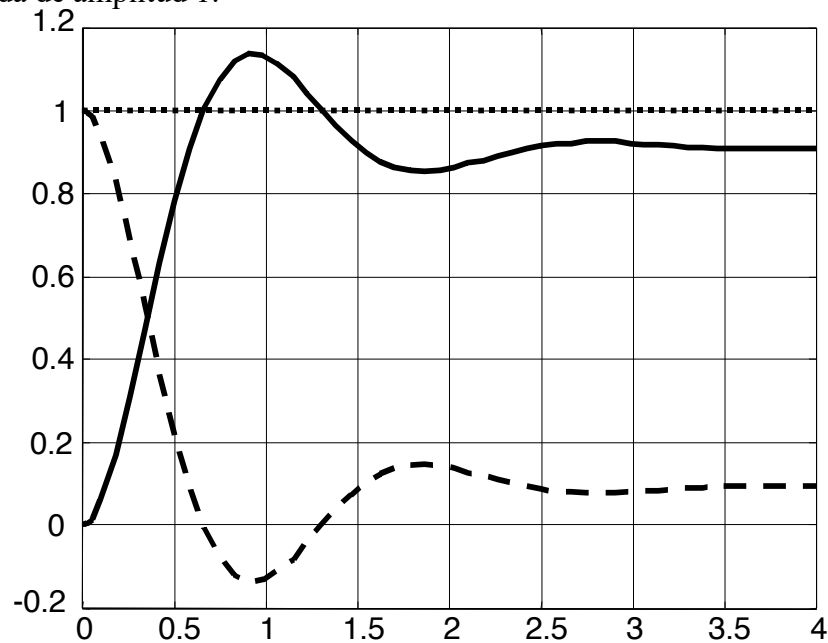
El sistema sin la no linealidad:

El esquema mostrado en la siguiente figura se ha utilizado para ver la respuesta del sistema ante un escalón de entrada de amplitud 1 y amplitud 3 cuando éste no contiene no linealidades.

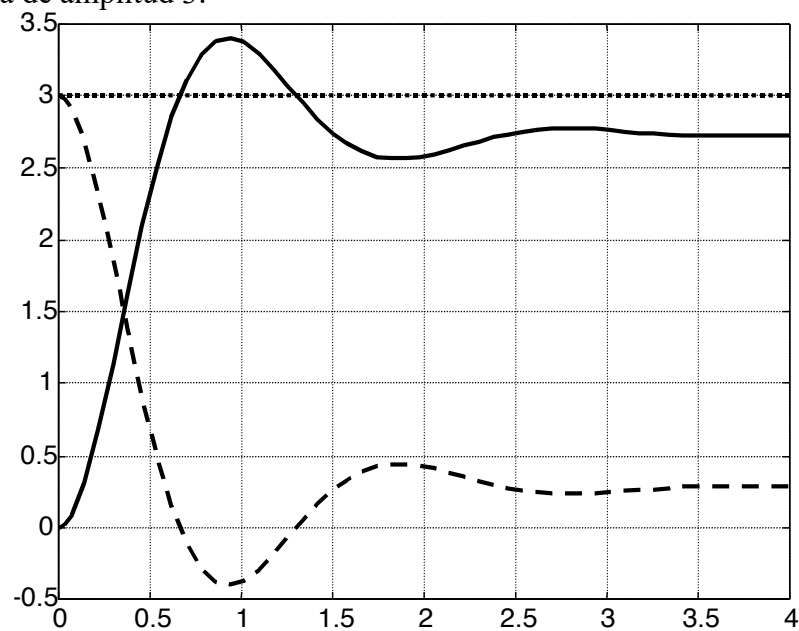


Las siguientes figuras muestran la evolución de la señal de entrada (línea de puntos), señal de salida (línea continua) y señal de error (línea discontinua).

Para la entrada de amplitud 1:



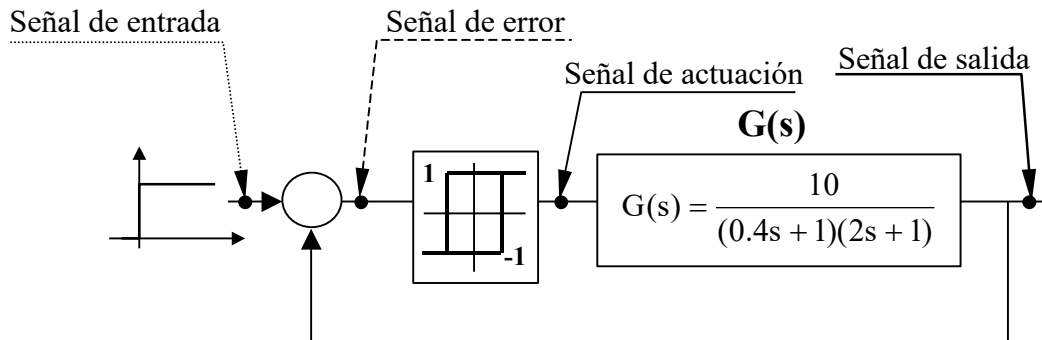
Para la entrada de amplitud 3:



Se puede observar de las respuestas obtenidas que las características dinámicas del sistema lineal (tiempo de subida, tiempo de pico, máximo sobreimpulso, etc.) no varían con la amplitud de la señal de entrada.

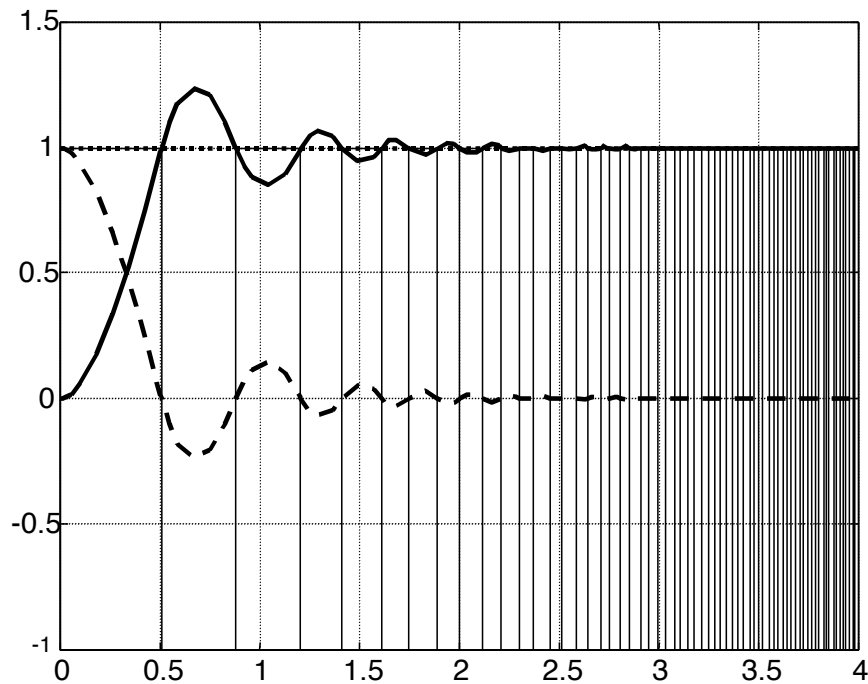
El sistema con la no linealidad y sin histéresis

Se ha utilizado el siguiente esquema para ver la respuesta del sistema a un escalón de entrada de amplitud 1 y amplitud 3 cuando contiene una no-linealidad del tipo todo-nada sin histéresis ($h=0$).

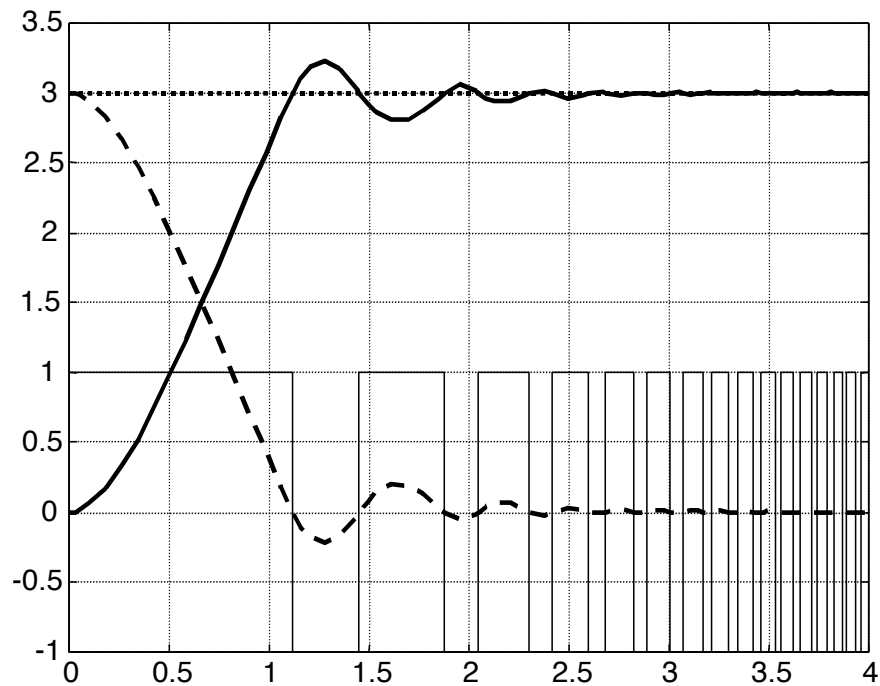


La siguientes figuras muestra la evolución de la señal de entrada (línea de puntos), señal de salida (línea continua), señal de error (línea discontinua) y señal de actuación (línea continua fina).

Para la entrada de amplitud 1:



Para la entrada de amplitud 3:

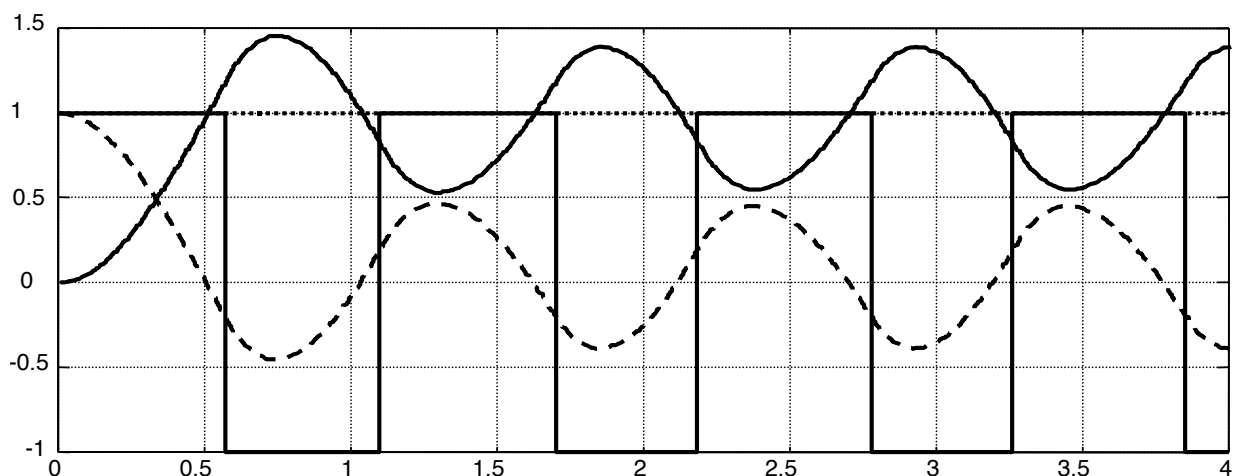


Se puede observar en este caso que:

- Las características dinámicas del sistema no lineal (tiempo de subida, tiempo de pico, Máximo sobreimpulso, etc) sí varían con la amplitud de la señal de entrada.
- El sistema no lineal, en este caso disminuye el error (debido a la no histéresis).
- El sistema no lineal presenta unas grandes señales de actuación sobre la planta, aún cuando el error es pequeño.
- El sistema no lineal también es estable.

El sistema con la no linealidad y con histéresis de valor 0.2

La siguiente figura muestra la evolución de la señal de entrada (línea de puntos), señal de salida (línea continua), señal de error (línea discontinua) y señal de actuación (línea continua fina).



La amplitud ha sido de 1v, pero no es demasiado importante.

Se produce un ciclo límite con las siguientes características:

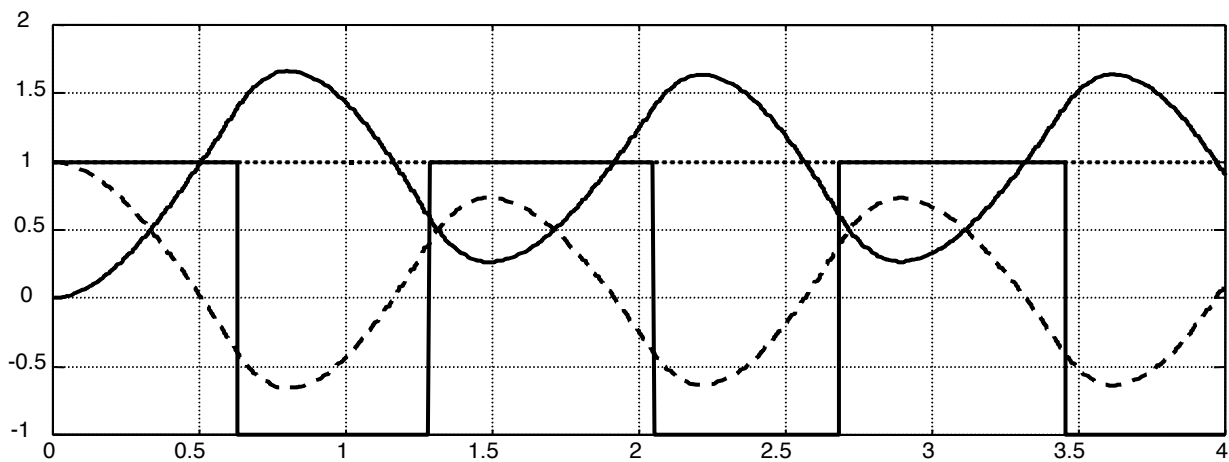
Frecuencia $\Rightarrow \omega \approx 5.8 \text{ rad/sg.}$

Amplitud $\Rightarrow A \approx 0.42 \text{ v.}$

Observar que esto puede obtenerse de la función descriptiva.

El sistema con la no linealidad y con histéresis de valor 0.4

La siguiente figura muestra la evolución de la señal de entrada (línea de puntos), señal de salida (línea continua), señal de error (línea discontinua) y señal de actuación (línea continua fina).



La amplitud ha sido de 1v.

Se produce un ciclo límite con las siguientes características:

Frecuencia $\Rightarrow \omega \approx 4.4 \text{ rad/sg.}$

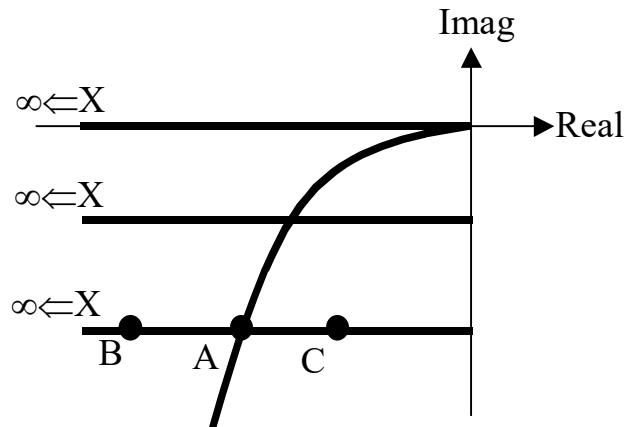
Amplitud $\Rightarrow A \approx 0.67 \text{ v.}$

Observar que esto puede obtenerse de la función descriptiva.

Tanto de las simulaciones como del diagrama polar se puede observar que:

El sistema, debido a que la función descriptiva corta al diagrama polar, presenta una oscilación mantenida, o un ciclo límite. Este es estable ya que, si una perturbación nos lleva desde el punto A al punto B, este, al no estar rodeado por el diagrama polar es estable, y hace que disminuya la oscilación y por lo tanto la amplitud de la oscilación. Entonces, la señal a la entrada del elemento no lineal disminuye y vuelve al punto A.

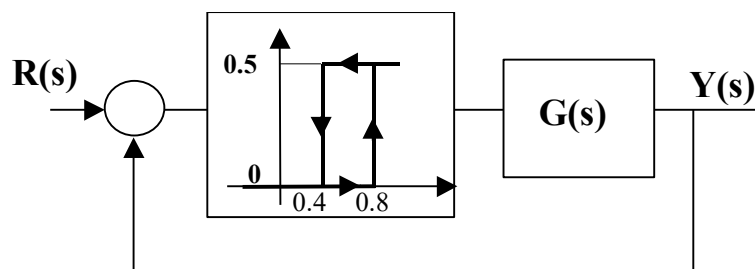
Si, por el contrario, una perturbación lleva al sistema al punto C, al estar rodeado por el diagrama polar de la planta, hará al sistema inestable, haciendo que aumenten las oscilaciones, creciendo el valor de entrada al elemento no lineal (X) y llevando al sistema al punto A de nuevo.



Lugar de $-1/N$ para diferentes valores de h .

EJERCICIO 6.9.

En la siguiente figura se puede observar un sistema de control en el que aparece un elemento no lineal del tipo todo nada, con histéresis.

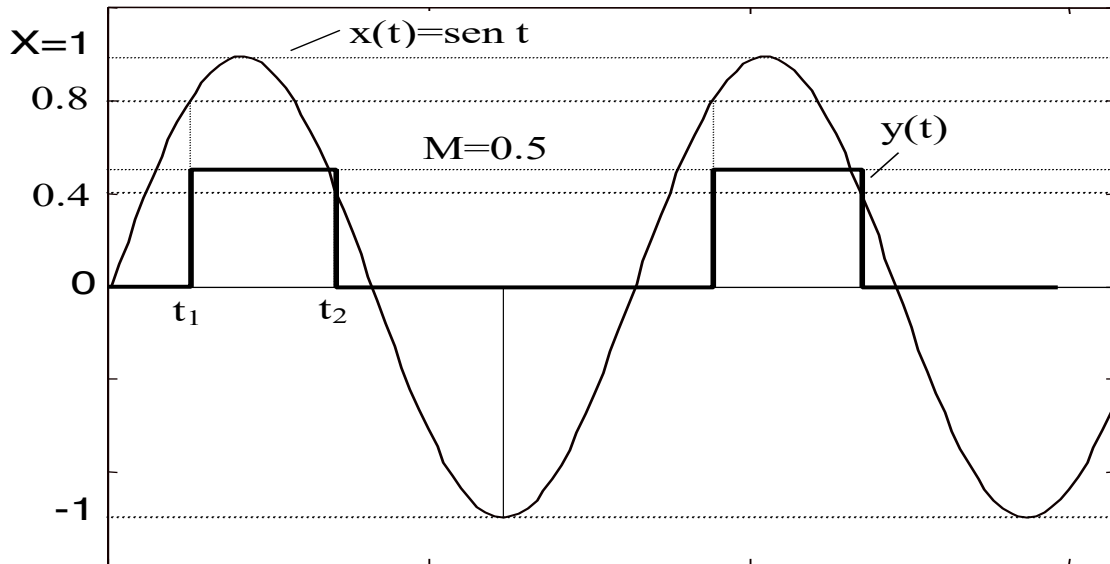


$$G(s) = \frac{4000(s+3)}{(s+2)(s+4)(s+10)}$$

1. Representar la salida del elemento no lineal si se le somete a una entrada senoidal de 1 voltio de amplitud y frecuencia 1 rad/s.
2. Calcular la función descriptiva del elemento no lineal.
3. Dibujar el diagrama polar de la función de transferencia $G(s)$.
4. Analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado.
5. Respuesta del sistema ante entradas escalón de 0.6 y 1.2 voltios de amplitud.

1. Respuesta del elemento no lineal ante la entrada senoidal.

Hasta que la entrada no alcanza el valor de amplitud $+0.8$ v. la salida es cero, a partir de este punto (ωt_1), la salida es constante y vale 0.5 (respuesta en saturación), sigue aumentando la entrada, pasa por su valor de amplitud máxima y empieza descender hasta llegar de nuevo al punto de amplitud $+0.4$ en (ωt_2), en el que la respuesta vuelve a valer 0 v., sigue aumentando el tiempo y en $2\pi + \omega t_1$, se alcanza de nuevo el valor 0.8 v. de amplitud, instante en el cual la respuesta vale $+0.5$ (respuesta en saturación), continúa aumentando el tiempo y en $2\pi - \omega t_2$, la respuesta vuelve a valer 0 v. ya que la amplitud de la señal de entrada tomó el valor $+0.4$ y así sucesivamente.



$$0.8 = X \operatorname{sen} \omega t_1 \Rightarrow \omega t_1 = \arcsen \frac{0.8}{X}$$

$$\omega t_2 = \pi - \arcsen \frac{0.4}{X}$$

2. La señal de salida $y(t)$ puede expresarse por una serie de Fourier:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \operatorname{sen} n\omega t)$$

dado que la señal $y(t)$ no es una función impar [$y(t) \neq -y(-t)$], los coeficientes A_n no son nulos. Por tanto, el desarrollo en serie de Fourier tendrá términos en seno y coseno. Como no es simétrica, presentará un nivel de continua ($A_0 \neq 0$):

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(t) d(\omega t) = \frac{M}{2\pi} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} d(\omega t) = \frac{M}{2\pi} (\omega t_2 - \omega t_1) = \frac{0.5}{2\pi} \left(\pi - \arcsen \frac{0.4}{X} - \arcsen \frac{0.8}{X} \right)$$

$$A_0 = \frac{1}{4\pi} \left(\pi - \arcsen \frac{0.4}{X} - \arcsen \frac{0.8}{X} \right)$$

limitando el desarrollo en serie a la componente armónica fundamental, queda:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \cos \omega t d(\omega t) = \frac{M}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} \cos \omega t d(\omega t) = \frac{M}{\pi} [\operatorname{sen} \omega t_2 - \operatorname{sen} \omega t_1] = \\ &= \frac{M}{\pi} \left[\operatorname{sen} \left(\pi - \arcsen \frac{0.4}{X} \right) - \operatorname{sen} \left(\arcsen \frac{0.8}{X} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{M}{\pi} \left[\sin \pi \cos \left(\arcsen \frac{0.4}{X} \right) - \sin \left(\arcsen \frac{0.4}{X} \right) \cos \pi - \frac{0.8}{X} \right] =$$

$$A_0 = \frac{M}{\pi} \left[0 + \frac{0.4}{X} - \frac{0.8}{X} \right] = \frac{0.5}{\pi} \left[-\frac{0.4}{X} \right] = -\frac{0.2}{\pi X} = -\frac{1}{5\pi X}$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{M}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{M}{\pi} [-\cos \omega t_2 + \cos \omega t_1] =$$

$$= \frac{M}{\pi} \left[\cos \left(\arcsen \frac{0.8}{X} \right) - \cos \left(\pi - \arcsen \frac{0.4}{X} \right) \right] =$$

$$= \frac{M}{\pi} \left[\cos \left(\arcsen \frac{0.8}{X} \right) - \cos \pi \cdot \cos \left(\arcsen \frac{0.4}{X} \right) + \sin \pi \cdot \sin \left(\arcsen \frac{0.4}{X} \right) \right] =$$

$$= \frac{0.5}{\pi} \left[\cos \left(\arcsen \frac{0.8}{X} \right) + \cos \left(\arcsen \frac{0.4}{X} \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\cos \left(\arcsen \frac{0.8}{X} \right) + \cos \left(\arcsen \frac{0.4}{X} \right) \right]$$

Luego el módulo del primer armónico vendrá dado por:

$$Y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

y el argumento, por:

$$\Phi_1 = \arctg \frac{A_1}{B_1}$$

sustituyendo en ambas expresiones los valores de A_1 y B_1 hallados anteriormente, tendremos:

$$Y_1 = \sqrt{\left(\frac{-1}{5\pi X} \right)^2 + \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[\cos \left(\arcsen \frac{0.8}{X} \right) + \cos \left(\arcsen \frac{0.4}{X} \right) \right] \right\}^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{25X^2} + \frac{1}{4} \left[\cos \left(\arcsen \frac{0.8}{X} \right) + \cos \left(\arcsen \frac{0.4}{X} \right) \right]^2}$$

$$\Phi_1 = \arctg \frac{\frac{-1}{5\pi X}}{\frac{1}{2\pi} \left[\cos \left(\arcsen \frac{0.8}{X} \right) + \cos \left(\arcsen \frac{0.4}{X} \right) \right]} =$$

$$= \arctg \frac{-2}{5X \left[\cos \left(\arcsen \frac{0.8}{X} \right) + \cos \left(\arcsen \frac{0.4}{X} \right) \right]}$$

y la función descriptiva para el elemento no lineal es:

$$N = \frac{Y_1}{X} \angle \Phi_1$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$N = \frac{1}{\pi X} \sqrt{\frac{1}{25 X^2} + \frac{1}{4} \left[\cos \left(\arcsen \frac{0.8}{X} \right) + \cos \left(\arcsen \frac{0.4}{X} \right) \right]^2}$$

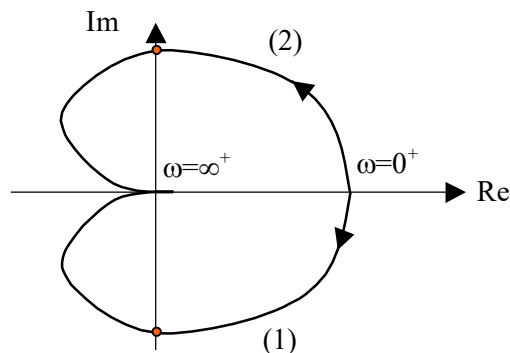
$$\angle \text{arc tg} \frac{-2}{5 X \left[\cos \left(\arcsen \frac{0.8}{X} \right) + \cos \left(\arcsen \frac{0.4}{X} \right) \right]}$$

3. Trazado del lugar $G(j\omega) = \frac{4000(j\omega + 3)}{(j\omega + 2)(j\omega + 4)(j\omega + 10)}$ Sistema de tipo 0.

$$\omega = 0^+ \left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{4000 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 10} = \frac{12000}{80} = 150 \\ \arg G(j\omega) = -90 \cdot \text{tipo} = 0^\circ \end{array} \right.$$

$$\omega = \infty^+ \left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \arg G(j\omega) = -90 \cdot (p - z) = -90^\circ \cdot 2 = -180^\circ \end{array} \right.$$

Existen dos posibles soluciones dependiendo si corta al eje imaginario en la parte negativa (1) o si lo corta en la positiva (2), según se puede observar en la figura:



Suponiendo, por ejemplo, que el corte se produce en la zona negativa. Se tiene que verificar:

$$\arg G(j\omega) = -90^\circ$$

$$\underbrace{\text{arc tg} \frac{\omega}{3} - \text{arc tg} \frac{\omega}{2}}_A - \underbrace{\text{arc tg} \frac{\omega}{4} - \text{arc tg} \frac{\omega}{10}}_B = -90^\circ$$

tomando tangentes en ambos miembros:

$$\operatorname{tg}(A - B) = \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} = \operatorname{tg}(-90^\circ) = \infty$$

luego

$$1 + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B = 0 = 1 + \operatorname{tg}\left(\arctan \frac{\omega}{3} - \arctan \frac{\omega}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\arctan \frac{\omega}{4} + \arctan \frac{\omega}{10}\right) = 0$$

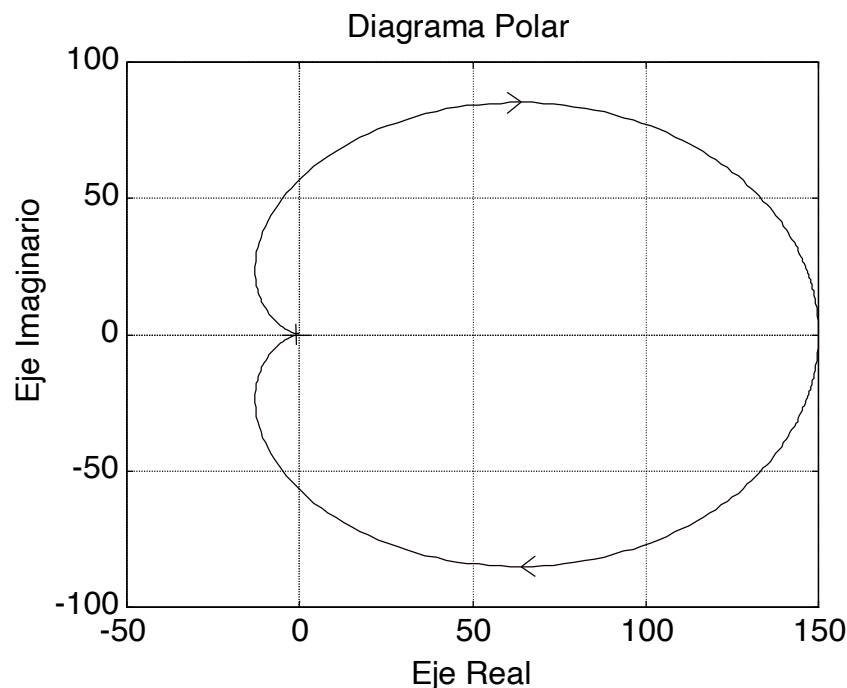
$$1 + \frac{\frac{\omega}{3} - \frac{\omega}{2}}{1 + \frac{\omega^2}{6}} \cdot \frac{\frac{\omega}{4} + \frac{\omega}{10}}{1 - \frac{\omega^2}{40}} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{-14\omega^2}{240 + 34\omega^2 - \omega^4} = 0 \Rightarrow 240 + 34\omega^2 - \omega^4 = 0$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos como una posible solución $\omega = 5.33 \text{ rad/seg}$, y como estamos en el camino (1) de 0^+ a ∞^+ , este camino será el válido.

El corte con el eje imaginario en esta frecuencia será en:

$$|G(j\omega)|_{\omega=5.33} = \frac{4000 |5.33j + 3|}{|5.33j + 2| |5.33j + 4| |5.33j + 10|} = \frac{24465.1262}{5.6929 \cdot 6.664 \cdot 11.3318} = 56.91$$

Con estos datos ya se puede dibujar el lugar $G(j\omega)$.



4. La función de transferencia en lazo cerrado del sistema será:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{N \cdot G(j\omega)}{1 + N \cdot G(j\omega)}$$

y la ecuación característica:

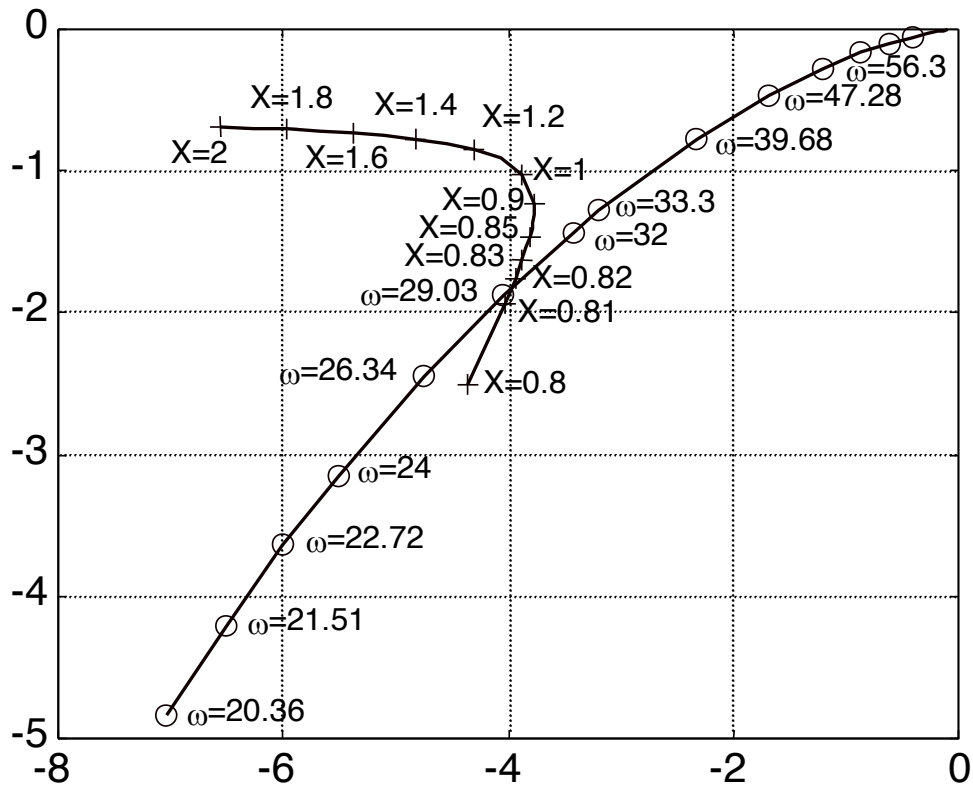
$$1 + N \cdot G(j\omega) = 0 \quad \text{y} \quad G(j\omega) = -\frac{1}{N}$$

Si se satisface esta última ecuación el sistema presentará oscilaciones mantenidas o ciclos límites. Para ello se construye la siguiente tabla dando valores a la amplitud de la entrada senoidal, partiendo de la función descriptiva:

X	N	-1/N
0.8	0.1723 - 0.0995i	-4.3531 - 2.5133i
0.81	0.2016 - 0.0970i	-4.0269 - 1.9378i
0.82	0.2120 - 0.0947i	-3.9322 - 1.7558i
0.83	0.2191 - 0.0924i	-3.8748 - 1.6343i
0.84	0.2244 - 0.0902i	-3.8364 - 1.5426i
0.85	0.2285 - 0.0881i	-3.8100 - 1.4693i
0.86	0.2317 - 0.0861i	-3.7920 - 1.4085i
0.87	0.2343 - 0.0841i	-3.7802 - 1.3567i
0.88	0.2364 - 0.0822i	-3.7733 - 1.3119i
0.89	0.2381 - 0.0804i	-3.7702 - 1.2726i
0.90	0.2394 - 0.0786i	-3.7704 - 1.2377i
1.0	0.2414 - 0.0637i	-3.8737 - 1.0217i
1.1	0.2341 - 0.0526i	-4.0665 - 0.9140i
1.2	0.2239 - 0.0442i	-4.2987 - 0.8488i
1.3	0.2130 - 0.0377i	-4.5527 - 0.8052i
1.4	0.2022 - 0.0325i	-4.8204 - 0.7742i
1.5	0.1920 - 0.0283i	-5.0973 - 0.7511i
1.6	0.1825 - 0.0249i	-5.3808 - 0.7334i
1.7	0.1736 - 0.0220i	-5.6691 - 0.7194i
1.8	0.1654 - 0.0196i	-5.9613 - 0.7081i
1.9	0.1579 - 0.0176i	-6.2564 - 0.6989i
2.0	0.1509 - 0.0159i	-6.5538 - 0.6912i

Análisis de la estabilidad del sistema: la posición relativa del diagrama $-1/N$ y del diagrama polar de $G(j\omega)$ proporciona la información sobre la estabilidad. El criterio de estabilidad, es que si el lugar $-1/N$ no está rodeado por el diagrama de $G(j\omega)$, entonces el sistema es estable, o bien no hay ciclo límite en estado estacionario. Por otro lado, si el lugar $-1/N$ está rodeado por el de $G(j\omega)$, entonces el sistema es inestable y la salida del sistema, cuando está sometido a cualquier perturbación, aumenta hasta que se produce la ruptura. Si el lugar $-1/N$ y el de $G(j\omega)$ se cortan, el sistema puede presentar una oscilación mantenida, o ciclo límite.

La siguiente figura muestra la representación conjunta del lugar $G(j\omega)$ y $-1/N$.



Sí existe ciclo límite, porque se verifica en al menos un punto que:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N}$$

y esto ocurre para:

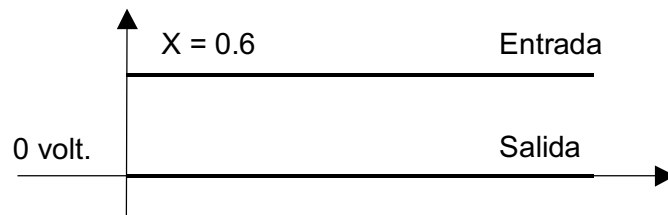
$$\begin{aligned}\omega &\cong 29 \text{ rad/seg} \\ X &\cong 0.82\end{aligned}$$

Los valores de ω y de X son aproximados. La precisión del estudio depende de cómo sea el corte de ambos lugares: si se cortan perpendicularmente, el estudio será más preciso que si no lo hacen perpendicularmente.

Ya que en este caso el corte se puede asemejar más a una tangencia entre ambos lugares, diremos que el estudio no es muy preciso.

5. Para la entrada escalón de amplitud 0.6 v.

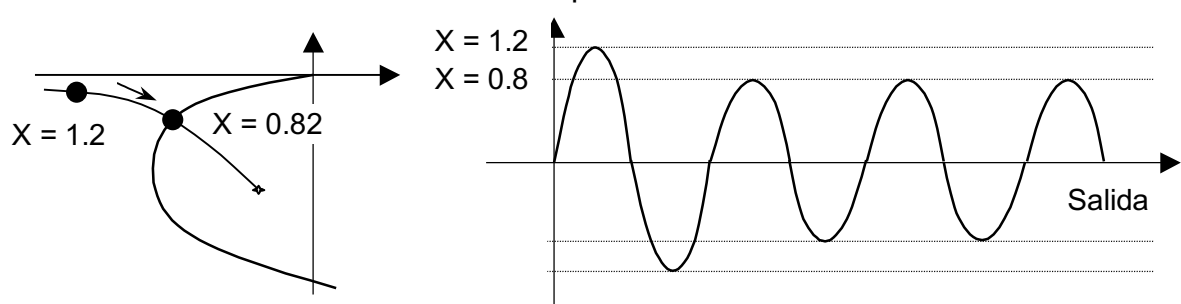
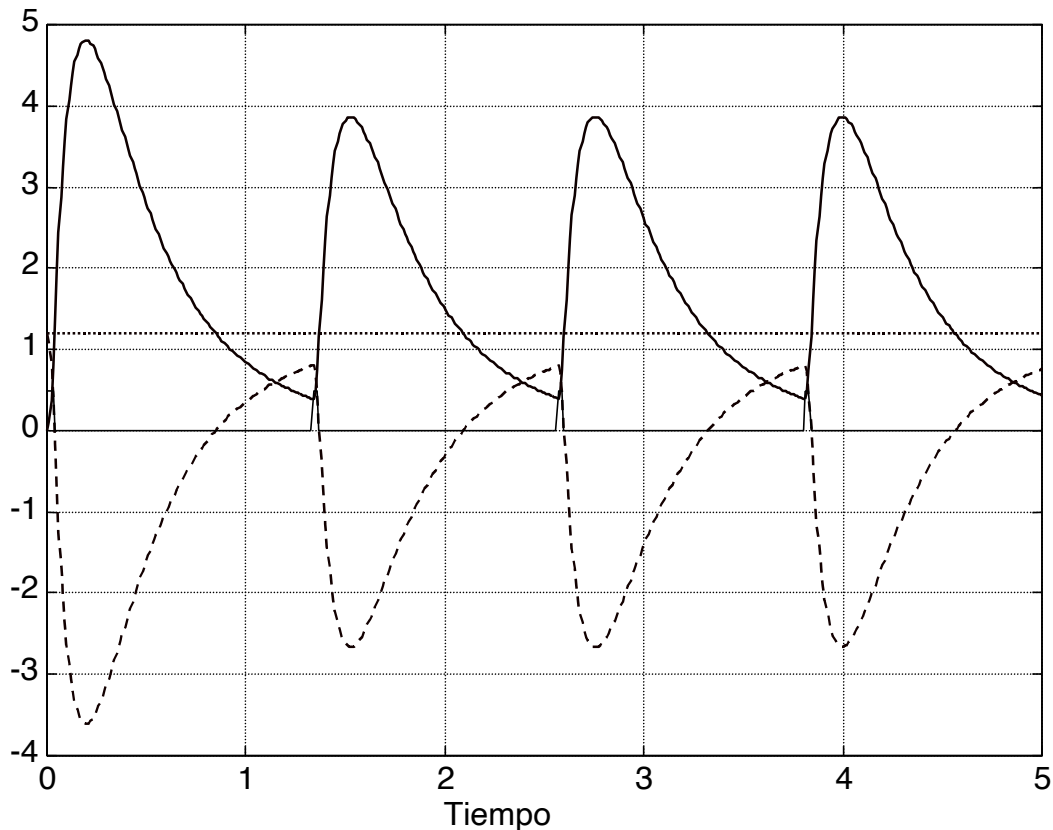
La salida será nula ya que la tensión de entrada no es lo suficientemente grande para superar la histéresis del elemento no lineal:



Si la entrada es ahora un escalón de amplitud 1.2 v. No envuelve: Estable.

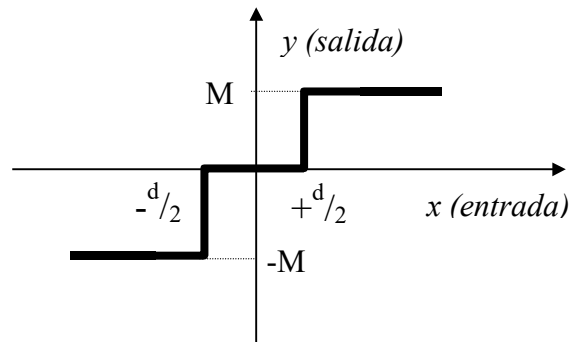
La amplitud de la entrada ($X = 1.2$) senoidal al elemento no lineal decrece y el punto de funcionamiento es el punto de oscilación automantenida o ciclo límite.

La siguientes figuras muestra la evolución de la señal de entrada (línea de puntos), señal de salida (línea continua), señal de error (línea discontinua) y señal de actuación (línea continua fina).

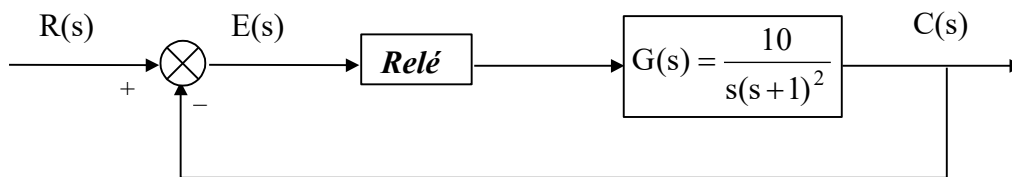


EJERCICIO 6.10.

Un relé tiene la zona muerta que se indica en la figura:



1. Representar la respuesta de dicho relé ante una entrada senoidal, $x(t) = X \sin \omega t$ comentando la gráfica.
2. Hallar la función descriptiva N , del elemento no lineal.
3. En la figura se muestra el diagrama de bloques del sistema de control no lineal. Haciendo $M=1$ y $d = 1$, en el relé; determinar la amplitud, frecuencia y estabilidad de la posible oscilación mantenida.

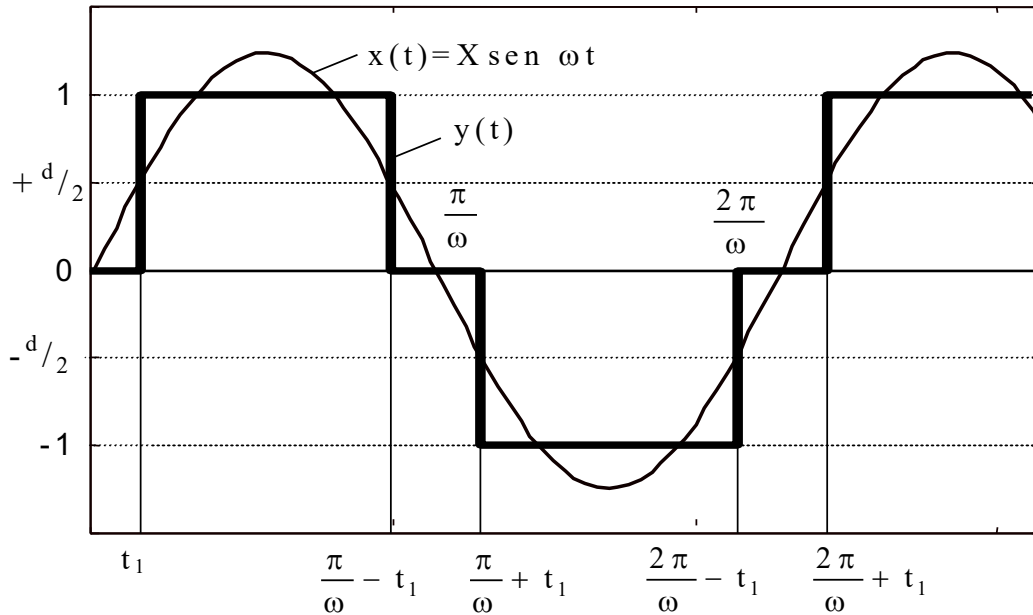


1. Respuesta del elemento no lineal ante la entrada senoidal:

Hasta que la entrada no alcanza el valor de amplitud $+d/2$ v. la salida es cero, a partir de este punto (t_1), la salida es constante y vale 1 (respuesta en saturación), sigue aumentando la entrada, pasa por su valor de amplitud máxima y empieza descender hasta llegar de nuevo al punto de amplitud $+d/2$ en $\frac{\pi}{\omega} - t_1$, en el que la respuesta vuelve a valer 0 v., sigue aumentando el tiempo y en $\frac{\pi}{\omega} + t_1$, se alcanza el valor $-d/2$ de amplitud, instante en el cual la respuesta vale -1 (respuesta en saturación), continúa aumentando el tiempo y en $\frac{2\pi}{\omega} - t_1$, la respuesta vuelve a valer 0 v. ya que la amplitud de la señal de entrada tomó el valor $-d/2$ de nuevo. Sigue aumentando el tiempo hasta llegar a $\frac{2\pi}{\omega} + t_1$, instante en el cual la respuesta pasa de ser 0 v. a 1 (respuesta en saturación), volviéndose a repetir el ciclo.

La salida está dada por:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq t_1 \\ 1 & \text{para } t_1 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} - t_1 \\ 0 & \text{para } \frac{\pi}{\omega} - t_1 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$



2. Esta señal de salida $y(t)$ puede expresarse por una serie de Fourier:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

Dado que la señal $y(t)$ es una función impar [$y(t) = -y(-t)$], los términos A_n son nulos. Por tanto, el desarrollo en serie de Fourier sólo tendrá términos en seno:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega t$$

y limitando el desarrollo en serie a la componente armónica fundamental, queda:

$$y(t) = B_1 \sin \omega t$$

y como:

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \sin \omega t d(\omega t) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \cdot \sin \omega t d(\omega t) = \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} M \cdot \sin \omega t d(\omega t) = \frac{4M}{\pi} \left[-\cos \frac{\pi}{2} + \cos \omega t_1 \right] = \frac{4M}{\pi} \cos \omega t_1$$

como:

$$\sin \omega t_1 = \frac{d/2}{X}$$

sustituyendo se tiene:

$$B_1 = \frac{4M}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{d/2}{X} \right)^2}$$

luego:

$$y(t) = \frac{4M}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{d/2}{X} \right)^2} \sin \omega t$$

y la función descriptiva para el elemento no lineal de sí / no con zona muerta es:

$$N = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{2X}\right)^2}$$

Sólo es función de la amplitud de la entrada X.

3. Haciendo $d = 1$, se tiene la función descriptiva del elemento no lineal:

$$N = \frac{4}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2X}\right)^2}$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema será:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{N \cdot G(j\omega)}{1 + N \cdot G(j\omega)},$$

y la ecuación característica:

$$1 + N \cdot G(j\omega) = 0 \text{ y } G(j\omega) = -\frac{1}{N}$$

Si se satisface esta última ecuación el sistema presentará oscilaciones mantenidas o ciclos límites.

$$\text{Trazado del lugar } G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1+j\omega)^2} :$$

$$\omega = 0^+ \left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{10}{0} = \infty \\ \arg G(j\omega) = -90^\circ \cdot \text{tipo} = -90^\circ \end{array} \right.$$

$$\omega = \infty^+ \left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{10}{\infty} = 0 \\ \arg G(j\omega) = -90^\circ \cdot (p - z) = -90^\circ \cdot 3 = -270^\circ \end{array} \right.$$

Corte con el eje real:

$$\arg G(j\omega) = -180^\circ$$

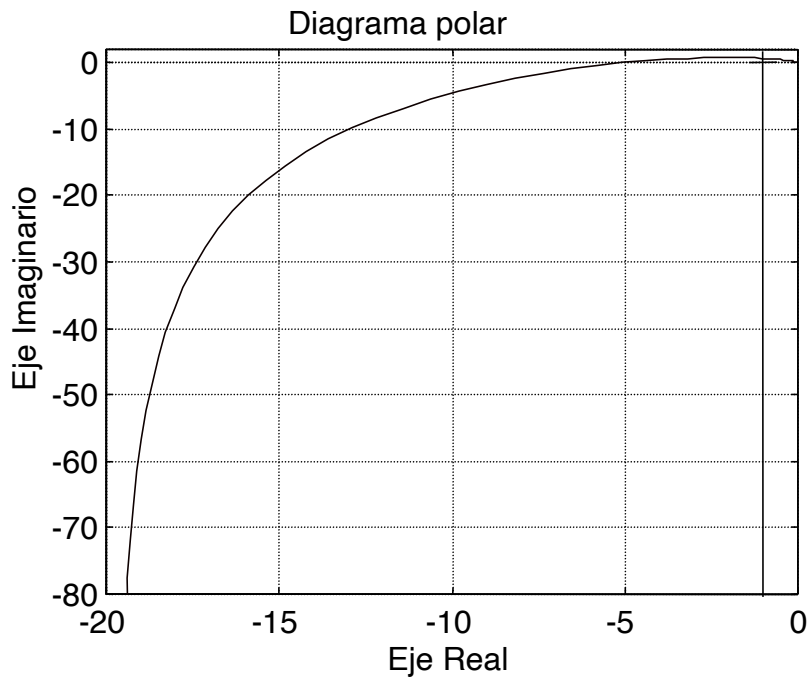
$$\arg 10 - \arg j\omega - \arg (1+j\omega)^2 = -180^\circ,$$

$$-\frac{\pi}{2} - 2 \arctg \frac{\omega}{1} = -180^\circ \Rightarrow \arctg \omega = 45^\circ \Rightarrow \omega = 1 \text{ rad/seg}$$

A esta frecuencia se produce el corte con el eje real, que será:

$$|G(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{10}{\omega \cdot [\sqrt{1+\omega^2}]^2} = \frac{10}{[\sqrt{2}]^2} = \frac{10}{2} = 5$$

Con estos datos ya se puede dibujar el lugar $G(j\omega)$.

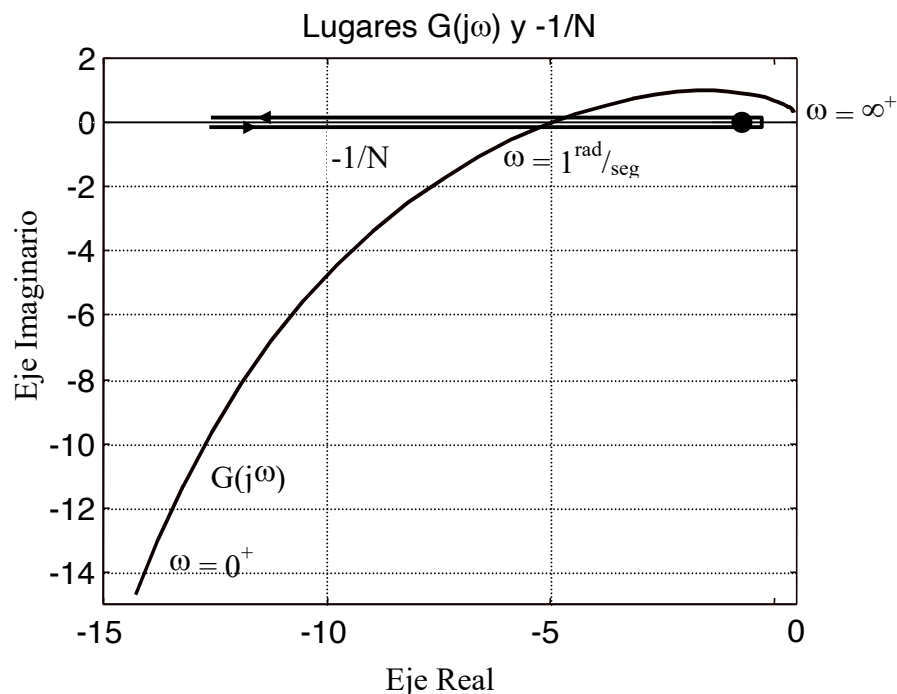


Se halla ahora el lugar $-\frac{1}{N}$, para ello se construye la siguiente tabla dando valores a la amplitud de la entrada senoidal, partiendo de la función descriptiva:

X	N	$-\frac{1}{N}$
0.50	0	$-\infty$
0.52	0.6725	-1.4869
0.53	0.7968	-1.2551
0.55	0.9644	-1.0369
0.56	1.0239	-0.9766
0.58	1.1125	-0.8989
0.70	1.2730	-0.7856
0.71	1.2732	-0.7854
0.715	1.2729	-0.7856
0.75	1.2654	-0.7903
0.72	1.2724	-0.7859

0.73	1.2708	-0.7869
0.8	1.2424	-0.8049
0.9	1.1763	-0.8501
2	0.6164	-1.6223
100	0.0127	-78.5408
1000	0.0013	-785.3983
$+\infty$	0	$-\infty$

En la siguiente figura se representan conjuntamente los lugares $G(j\omega)$ y $-1/N$.



Puede verse que ambos lugares se cortan en el punto de frecuencia $\omega = 1 \text{ rad/seg}$ para el lugar de $G(j\omega)$ y con valor de amplitud X en el lugar de $-1/N$, dada por:

$$-5 = -\frac{1}{N} \Rightarrow N = 0.2$$

$$0.2 = \frac{4}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2X}\right)^2}$$

$$0.04 = \frac{16}{\pi^2 X^2} \left(1 - \left(\frac{1}{2X}\right)^2\right)$$

$$0.0025\pi^2 X^2 = 1 - \frac{1}{4X^2}$$

$$0.01\pi^2 X^4 - 4X^2 + 1 = 0$$

$$X = \begin{cases} 6.3464 \\ 0.5016 \end{cases}$$

Luego existen dos puntos de intersección del lugar $G(j\omega)$ con el lugar de $-1/N$ para los valores de la amplitud: $X = 6.3464$ y $X=0.5016$.

Es decir, existen dos puntos de ciclo límite siendo la frecuencia de ambos 1 rad/s.

Para valores de X tal que $0.5016 < X < 6.3463$ el sistema es inestable. Esto puede verse en que al recorrer $G(j\omega)$ en el sentido de ω crecientes, el lugar de puntos críticos $-1/N$ queda a la derecha, es decir $G(j\omega)$ envuelve a $-1/N$.

Para valores de X tal que $6.3464 < X < 0.5016$ el sistema es estable. Esto puede verse en que al recorrer $G(j\omega)$ en el sentido de ω crecientes, el lugar de puntos críticos $-1/N$ queda a la izquierda, es decir $G(j\omega)$ no envuelve a $-1/N$.

EJERCICIO 6.11.

Un sistema de control con realimentación unitaria tiene como función de transferencia de la parte lineal:

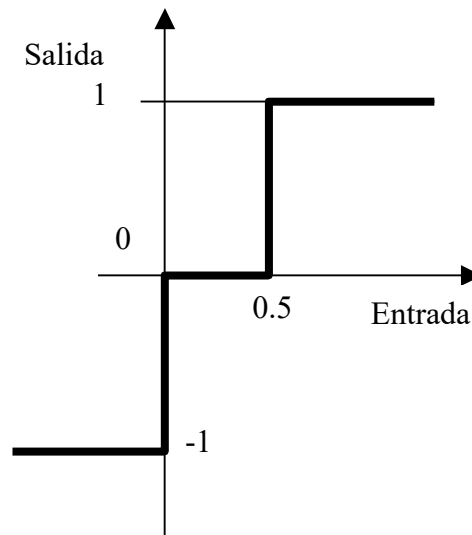
$$G(s) = \frac{80(s + 0.25)}{s^2(s + 4)^2}$$

siendo la alinealidad un dispositivo de dos posiciones, entre -1 y $+1$, con una zona muerta entre 0 y 0.5.

Obtener:

1. La función descriptiva de la parte no lineal, y su representación.
2. La representación polar de la parte lineal.
3. El estudio de los posibles ciclos límites.
4. De existir ciclo límite: ¿qué haría para evitarlo?

-
1. A partir del enunciado, se obtiene la curva característica entrada/salida del elemento no lineal:
-



Se comienza hallando la respuesta del elemento no lineal ante la entrada senoidal:

$$x(t) = X \sin \omega t$$

Hasta que la entrada no alcanza el valor de amplitud $+0.5$ v. la salida es cero, a partir de este punto (ωt_1), la salida es constante y vale 1 (respuesta en saturación), sigue aumentando la entrada, pasa por su valor de amplitud máxima y empieza descender hasta llegar de nuevo al punto de amplitud $+0.5$ en $(\pi - \omega t_1)$, en el que la respuesta vuelve a valer 0 v., sigue aumentando el tiempo y en π , se alcanza el valor 0 v., instante en el cual la respuesta vale -1 (respuesta en saturación), continúa aumentando el tiempo y en 2π , la respuesta vuelve a valer 0 v. Continuando este valor hasta $2\pi + \omega t_1$ y así sucesivamente.

$$0.5 = X \sin \omega t_1$$

$$\omega t_1 = \arcsin \frac{0.5}{X} = \arcsin \frac{1}{2X}$$

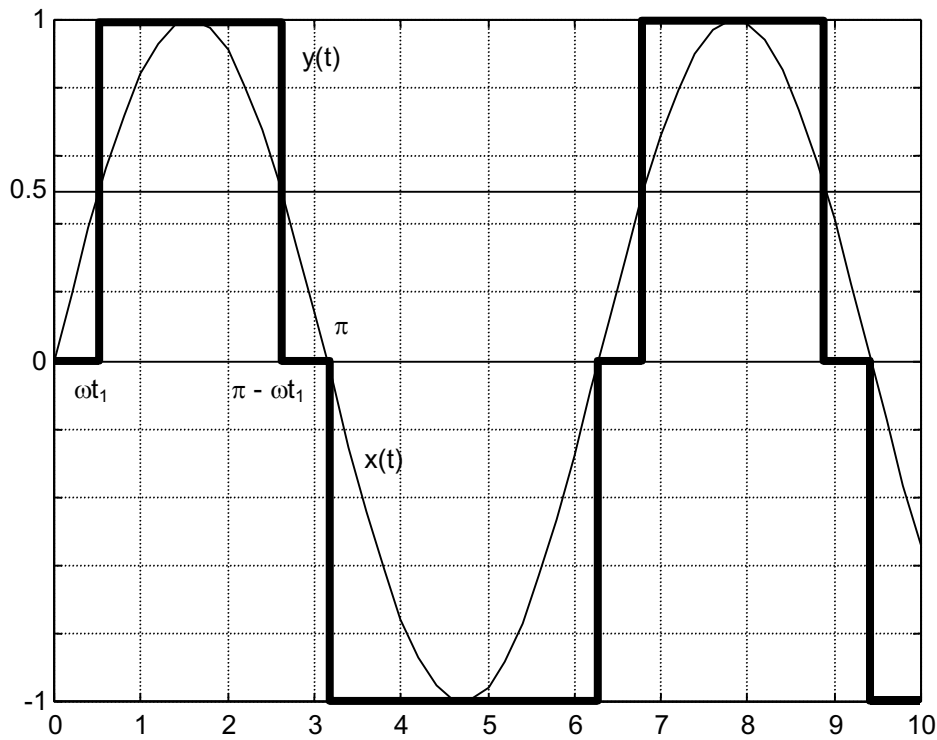
$$\omega t_2 = \pi - \omega t_1 = \pi - \arcsin \frac{1}{2X}$$

La señal de salida $y(t)$ puede expresarse por una serie de Fourier:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

Dado que la señal $y(t)$ no es una función impar [$y(t) \neq -y(-t)$], los coeficientes A_n no son nulos. Por tanto, el desarrollo en serie de Fourier tendrá términos en seno y coseno.

Como no es simétrica, presentará un nivel de continua ($A_0 \neq 0$):



$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(t) d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} d(\omega t) - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} (\omega t_2 - \omega t_1 - 2\pi + \pi) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi - \arcsen \frac{0.5}{X} - \arcsen \frac{0.5}{X} - \pi \right) = -\frac{1}{\pi} \arcsen \frac{1}{2X}
 \end{aligned}$$

Limitando el desarrollo en serie a las componentes armónicas fundamentales, queda:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \cos \omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} \cos \omega t d(\omega t) - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos \omega t d(\omega t) = \\
 &= \frac{1}{\pi} [\sen \omega t_2 - \sen \omega t_1] - \frac{1}{\pi} [\sen 2\pi - \sen \pi] = \frac{1}{\pi} [\sen (\pi - \omega t_1) - \sen \omega t_1] - 0 = \\
 &= \frac{1}{\pi} [\sen \pi \cos \omega t_1 - \cos \pi \sen \omega t_1 - \sen \omega t_1] = \sen \omega t_1 - \sen \omega t_1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} \sin \omega t \, d(\omega t) - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin \omega t \, d(\omega t) \\
 &= \frac{1}{\pi} [-\cos \omega t_2 + \cos \omega t_1] - \frac{1}{\pi} [-\cos 2\pi + \cos \pi] = \\
 &= -\frac{1}{\pi} [\cos \omega t_2 - \cos \omega t_1] + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} [\cos \omega t_2 - \cos \omega t_1]
 \end{aligned}$$

Pero se tiene que:

$$\sin \omega t_1 = \frac{1}{2X}$$

$$\sin^2 \omega t_1 + \cos^2 \omega t_1 = 1$$

$$\cos \omega t_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{4X^2}}$$

$$\cos \omega t_2 = \cos (\pi - \omega t_1) = \cos \pi \cos \omega t_1 + \sin \pi \sin \omega t_1 = -\cos \omega t_1 = -\sqrt{1 - \frac{1}{4X^2}}$$

que substituyéndolos en B_1 , tendremos:

$$B_1 = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[-\sqrt{1 - \frac{1}{4X^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{4X^2}} \right] = \frac{2}{\pi} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4X^2}} \right]$$

Luego:

$$y(t) \approx Y_1 \sin (\omega t + \phi)$$

siendo:

$$Y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = B_1$$

$$\phi = \arctg \frac{A_1}{B_1} = 0$$

quedando:

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4X^2}} \right] \sin \omega t$$

Y la Función Descriptiva N será:

$$N = \frac{2}{\pi X} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4X^2}} \right]$$

2. Diagrama Polar de la parte lineal. Pasamos al dominio de la frecuencia: $s \rightarrow j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{80(j\omega + 0.25)}{(j\omega)^2 (j\omega + 4)^2}$$

Es un sistema tipo 2.

$$\omega = 0^+ \quad \left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{80 \cdot 0.25}{0 \cdot 16} = \infty \\ \arg G(j\omega) = -90^\circ \cdot \text{tipo} = -180^\circ \end{array} \right\}$$

$$\omega = \infty^+ \quad \left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = 0 \\ \arg G(j\omega) = -90^\circ (\text{n}^\circ \text{ polos} - \text{n}^\circ \text{ ceros}) = -90^\circ (4 - 1) = -270^\circ \end{array} \right\}$$

Corte con el eje Real:

$$\arg G(j\omega) = -180^\circ = \arg 80 + \arg (j\omega + 0.25) - \arg (j\omega)^2 - \arg (j\omega + 4)^2$$

$$0^\circ + \arg \text{tg} 4\omega - 180^\circ - \left(\arg \text{tg} \frac{\omega}{4} \right)^2 = -180^\circ$$

$$\arg \text{tg} 4\omega - \left(\arg \text{tg} \frac{\omega}{4} \right) = \arg \text{tg} \frac{\omega}{4}$$

Tomando tangentes en ambos miembros, y teniendo en cuenta que:

$$\text{tg}(A - B) = \frac{\text{tg} A - \text{tg} B}{1 + \text{tg} A \cdot \text{tg} B}$$

se tiene que,

$$\frac{4\omega - \frac{\omega}{4}}{1 + 4\omega \cdot \frac{\omega}{4}} = \frac{\omega}{4}$$

operando:

$$\omega_f = \sqrt{14} \text{ rad/seg}$$

y substituyendo este valor de la frecuencia de cruce de fase en la ecuación del módulo:

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_f} = \left| \frac{80 \sqrt{14 + 0.25^2}}{14 \cdot (14 + 16)} \right| = \frac{300}{14 \cdot 30} = \frac{10}{14} = 0.7142$$

Corte con la circunferencia unidad:

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_a} = \left| \frac{80 \sqrt{\omega_a^2 + 0.25^2}}{\omega_a^2 \cdot (\omega_a^2 + 16)} \right| = 1$$

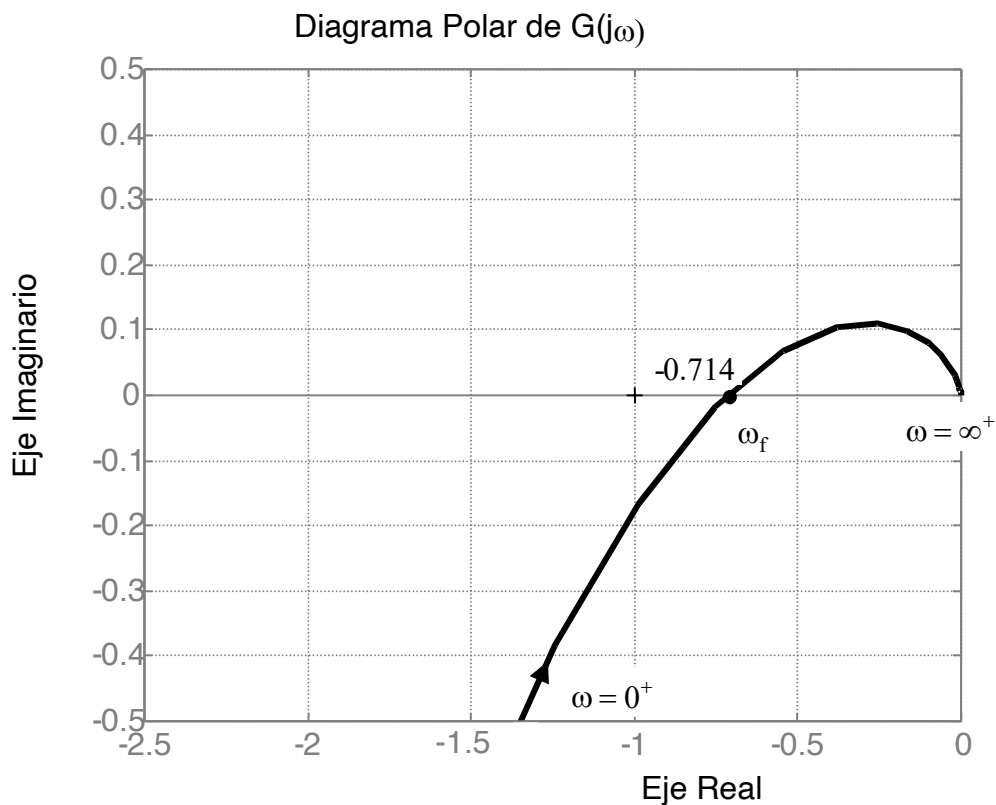
operando resulta:

$$\omega^8 + 32\omega^6 + 256\omega^4 - 6400\omega^2 - 400 = 0$$

y resolviendo:

$$\omega = \omega_a = 3.1192 \text{ rad/seg}$$

Con estos datos ya se puede representar el Diagrama Polar:



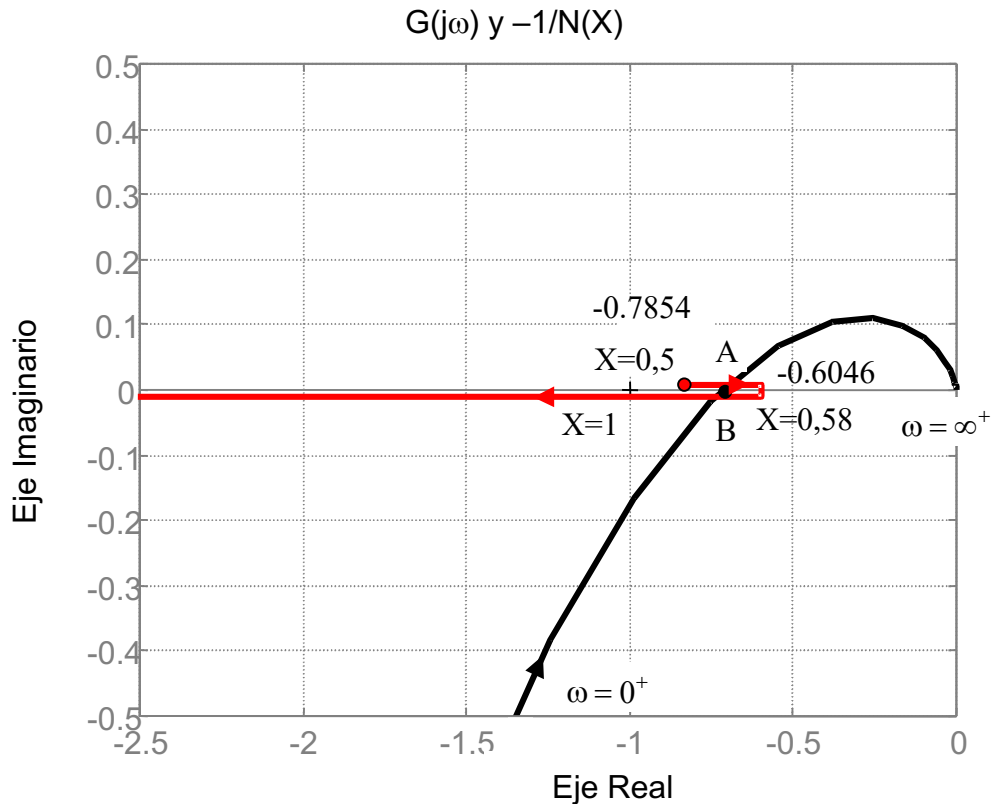
3. Los ciclos límites se producen en la intersección del Diagrama Polar de $G(j\omega)$ con el lugar geométrico $(-1/N)$, es decir, se cumplirá que:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(X)}$$

A partir de la Función Descriptiva y dando valores a la Amplitud X, obtenemos la siguiente tabla.

X	N	-1/N(X)
0,5	1,2732	-0,7854
0,55	1,6397	-0,6099
0,56	1,6488	-0,6065
0,57	1,6531	-0,6049
0,58	1,6539	-0,6046
0,585	1,6532	-0,6049
0,6	1,6475	-0,6070
0,7	1,5459	-0,6469
0,8	1,4170	-0,7057
1	1,1879	-0,8418
1,5	0,8246	-1,2128
5	0,2540	-3,9369
10	0,1272	-7,8589
50	0,0255	-39,2709
100	0,0127	-78,5403
1000	0,0013	-785,3982
10000	0,0001	-8418,2728

Representando estos valores sobre el Diagrama Polar, obtenemos:



Como hay intersección entre los lugares $G(j\omega)$ y $-1/N(X)$, el sistema puede tener a su salida una oscilación mantenida o ciclo límite. Los posibles puntos de oscilación mantenida son el A y el B.

Se calcula la amplitud en el punto A. Sabemos que en dicho punto:

$$-\frac{1}{N(X)} = -0.7142$$

$$N = 1.4$$

Llevando este valor a la ecuación de la Función descriptiva, tendremos:

$$1.4 = \frac{2}{\pi X} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4 X^2}} \right]$$

Operando:

$$19.36 X^4 - 17.6 X^3 + 1 = 0$$

Resolviendo:

$$X_A = 0.5028$$

$$X_B = 0.81295$$

La amplitud del punto A es $X_A = 0.5028$ y su frecuencia de oscilación es ω_f . Si el sistema funciona inicialmente en el punto A, y una pequeña perturbación hace que aumente la amplitud de la oscilación, el nuevo punto de funcionamiento queda rodeado con el diagrama Polar, siendo inestable el sistema y tendiendo a aumentar la amplitud, desplazando el punto de funcionamiento hasta el punto B. Si la perturbación es tal que tiende a disminuir la amplitud de la oscilación, el lugar $G(j\omega)$ ya no rodea al nuevo punto, y la amplitud decrecerá desplazando el punto de funcionamiento hacia la izquierda. Luego el punto A corresponde a un ciclo límite inestable.

Supongamos que ahora el sistema está funcionando inicialmente en el punto B, al que le corresponde una amplitud de $X_B = 0.81295$ y una frecuencia de oscilación ω_f . Una perturbación exterior hace que disminuya la amplitud, entonces $G(j\omega)$ rodea al punto y el sistema se hace inestable, aumentando la amplitud y volviendo al punto B. En el caso de que la perturbación hiciese aumentar la amplitud de la oscilación, el lugar $G(j\omega)$ no rodea al punto luego el sistema es estable y si cesase la perturbación el funcionamiento volvería al punto B. Luego el punto B corresponde a un ciclo límite estable.

4. Para eliminar el ciclo límite sería suficiente con disminuir la Ganancia del sistema lineal para que no se produzca intersección de ambos lugares. Es decir que el módulo de $G(j\omega)$ para $\omega = \omega_f$ valga:

$$|K G(j\omega)|_{\omega_f} = 0.6046$$

Luego:

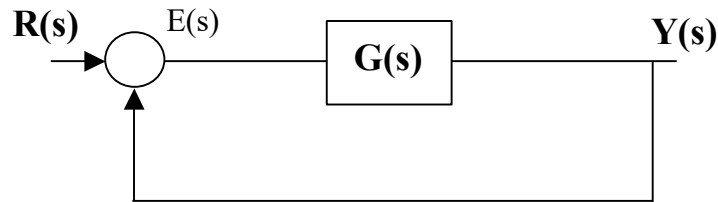
$$|K G(j\omega)|_{\omega=\omega_f} = \left| \frac{K \cdot 80 \sqrt{14 + 0.25^2}}{14 \cdot (14 + 16)} \right| = \frac{300 K}{14 \cdot 30} = \frac{10 K}{14} = 0.6046$$

Despejando:

$$K = \frac{14 \cdot 0.6046}{10} = 0.84644$$

EJERCICIO 6.11.

Para el sistema mostrado en la figura representar la trayectoria del error en el plano de fase para la respuesta del sistema ante entrada escalón unitario.



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s^2 + s}$$

$$(s^2 + s)Y(s) = E(s)$$

$$Y(s) = R(s) - E(s)$$

$$(s^2 + s)(R(s) - E(s)) = E(s)$$

$$(s^2 + s)R(s) = (s^2 + s + 1)E(s)$$

$$\ddot{r} + \dot{r} = \ddot{e} + \dot{e} + e$$

Si la entrada es un escalón unitario entonces:

$$\begin{aligned} r &= 1 \\ \dot{r} &= 0 \\ \ddot{r} &= 0 \end{aligned}$$

Con lo que la ecuación quedará:

$$\ddot{e} + \dot{e} + e = 0$$

Para dibujar la trayectoria se buscan los puntos singulares en los que $\ddot{e} = \dot{e} = 0$:

Se cumple para $e = 0$. Luego el punto singular estable será el $(e, \dot{e}) = (0, 0)$

Se va a aplicar el método gráfico de las isoclinas para representar las trayectorias.

Variables de estado empleadas:

$$x_1 = e$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_1}{dt} = \dot{e}$$

Como:

$$\frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{d\dot{e}}{de}$$

y

$$\frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{\ddot{e}}{\dot{e}}$$

entonces uniendo ambas expresiones:

$$\frac{d\dot{e}}{de} = \frac{\ddot{e}}{\dot{e}}$$

expresión que representa la pendiente de la trayectoria e frente a $\dot{e}$.

Si se obtienen las ecuaciones para las que dicha pendiente tiene un valor constante:

$$\frac{d\dot{e}}{de} = \frac{\ddot{e}}{\dot{e}} = N$$

se obtendrán las isoclinas, a partir de las cuales se puede obtener el campo de direcciones de las trayectorias.

$$\frac{\ddot{e}}{\dot{e}} = \frac{-\dot{e} - e}{\dot{e}} = N$$

$$-\dot{e} - e = N\dot{e}$$

$$-(1 + N)\dot{e} = e$$

Luego las isoclinas serán de la forma:

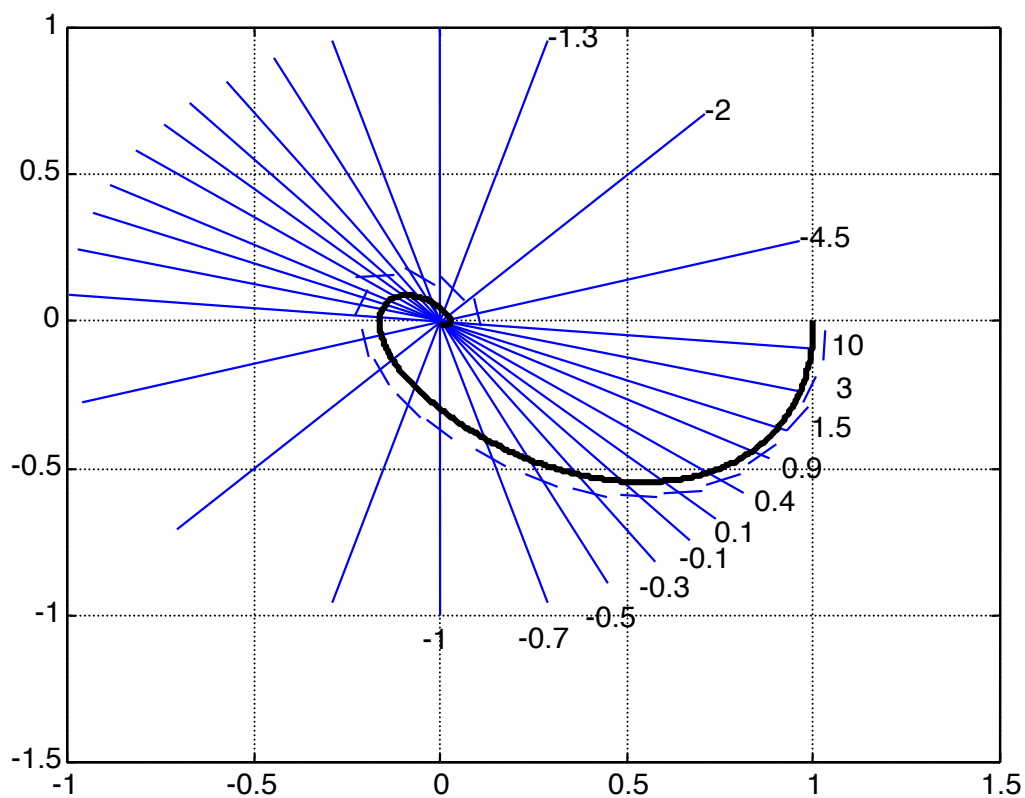
$$\dot{e} = -\frac{1}{1 + N} e$$

donde puede verse que son rectas que pasan por el origen y tienen pendiente $-\frac{1}{1 + N}$

A continuación se va a ir dando valores a la pendiente N para ir representando las diferentes isoclinas.

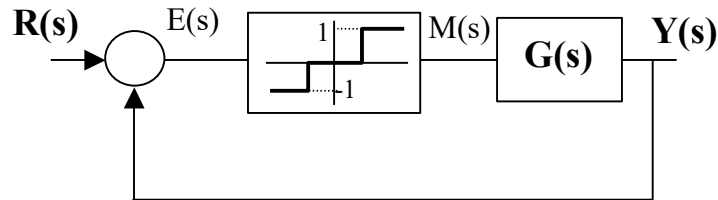
N	Arctg(N)	Pendiente $-\frac{1}{1+N}$	$\arctg\left(-\frac{1}{1+N}\right)$
-4.5	-77.5°	0.2857	15.9°
-2	-63.4°	1	45°
-1.3	-52.4°	3.3333	73.3°
-1	-45°	$-\infty$	-90°
-0.7	-35.0°	-3.3333	-73.3°
-0.5	-26.6°	-2	-63.4°
-0.3	-16.7°	-1.4286	-55.0°
-0.1	-5.7°	-1.1111	-48.0°
0.1	5.7°	-0.9091	-42.3°
0.4	21.8°	-0.7143	-35.5°
0.9	42.0°	-0.5263	-27.8°
1.5	56.3°	-0.4	-21.8°
3	71.6°	-0.25	-14.0°
10	84.3°	-0.0909	-5.2°

Y su representación partiendo de las condiciones iniciales: $e = 1$ $\dot{e} = 0$



EJERCICIO 6.12

Para el sistema mostrado en la figura representar la trayectoria del error en el plano de fase para la respuesta del sistema ante entrada escalón unitario sabiendo que el umbral del elemento no lineal es 0.2.



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s^2 + s}$$

$$(s^2 + s)Y(s) = M(s)$$

$$\ddot{y} + \dot{y} = m$$

La respuesta del elemento no lineal es:

$$\begin{aligned} m &= -1 & \text{si } e &\leq -0.2 \\ m &= 0 & \text{si } -0.2 < e < 0.2 \\ m &= 1 & \text{si } e &\geq 0.2 \end{aligned}$$

$$y = r - e$$

$$\ddot{r} - \ddot{e} + \dot{r} - \dot{e} = m$$

$$\ddot{r} + \dot{r} = \ddot{e} + \dot{e} + m$$

Si la entrada es un escalón unitario entonces:

$$\begin{aligned} r &= 1 \\ \dot{r} &= 0 \\ \ddot{r} &= 0 \end{aligned}$$

$$\ddot{e} + \dot{e} + m = 0$$

Con lo que las ecuaciones quedarán:

$$\begin{aligned} \ddot{e} + \dot{e} &= 1 & \text{si } e &\leq -0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} &= 0 & \text{si } -0.2 < e < 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} &= -1 & \text{si } e &\geq 0.2 \end{aligned}$$

Se trazan a continuación las isoclinas:

$$\frac{d\ddot{e}}{de} = \frac{\ddot{e}}{\dot{e}} = N$$

Se analizará cada tramo de forma independiente:

Si $e \leq -0.2$

$$\ddot{e} = 1 - \dot{e}$$

$$\frac{\ddot{e}}{\dot{e}} = \frac{1 - \dot{e}}{\dot{e}} = N$$

$$1 - \dot{e} = N\dot{e}$$

$$(1 + N)\dot{e} = 1$$

$$\dot{e} = \frac{1}{(1 + N)}$$

Luego las isoclinas son rectas horizontales

N	Arctg(N)	Constante $\frac{1}{1 + N}$
-30	-88.1°	-0.0345
-8	-82.9°	-0.1429
-5	-78.7°	-0.2500
-3.5	-74.1°	-0.4000
2.5	68.2°	0.2857
4	76.0°	0.2000
10	84.3°	0.0909

Si $-0.2 < e < 0.2$

$$\ddot{e} = -\dot{e}$$

$$\frac{\ddot{e}}{\dot{e}} = -1 = N$$

N	Arctg(N)
-1	-45°

Toda trayectoria en esta zona tiene pendiente de -45°

Si $e \geq 0.2$

$$\ddot{e} = -(1 + \dot{e})$$

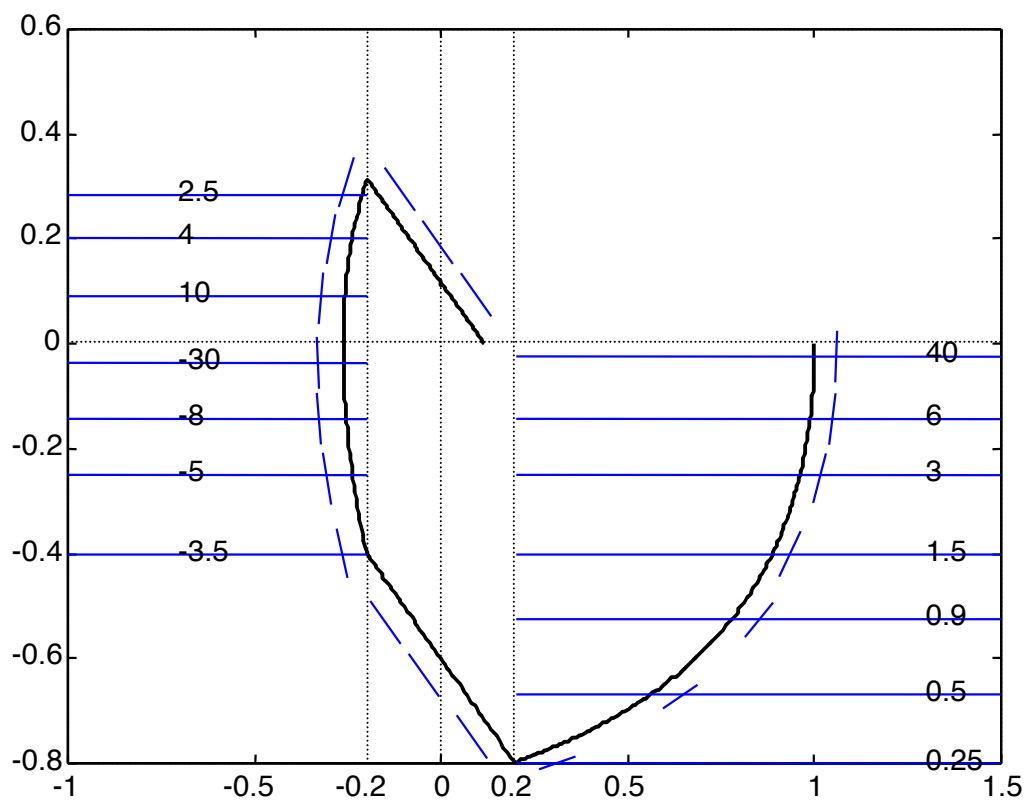
$$\frac{\ddot{e}}{\dot{e}} = -\frac{1 + \dot{e}}{\dot{e}} = N$$

$$1 + \dot{e} = -N\dot{e}$$

$$\dot{e} = \frac{-1}{1 + N}$$

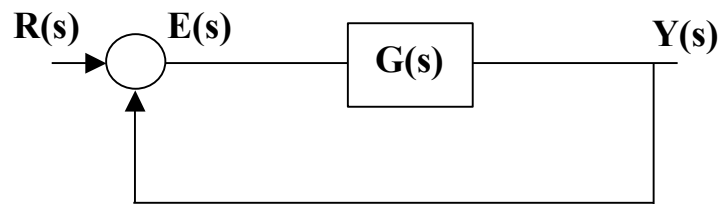
Luego las isoclinas son rectas horizontales

N	Arctg(N)	Constante $-\frac{1}{1+N}$
0.25	14.0°	-0.8000
0.5	26.6°	-0.6667
0.9	42.0°	-0.5263
1.5	56.3°	-0.4000
3	71.6°	-0.2500
6	80.5°	-0.1429
40	88.6°	-0.0244



EJERCICIO 6.13

Para el sistema de la figura:



$$G(s) = \frac{10}{(0.4s + 1)(2s + 1)}$$

Representar el diagrama del plano de fase del sistema para la variable e.

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{10}{(0.4s + 1)(2s + 1)} = \frac{10}{0.8s^2 + 2.4s + 1}$$

$$(0.8s^2 + 2.4s + 1)Y(s) = 10E(s)$$

$$0.8\ddot{y} + 2.4\dot{y} + y = 10e$$

Como:

$$e = r - y \quad y = r - e$$

entonces:

$$0.8(\ddot{r} - \ddot{e}) + 2.4(\dot{r} - \dot{e}) + r - e = 10e$$

$$0.8\ddot{e} + 2.4\dot{e} + 11e = 0.8\ddot{r} + 2.4\dot{r} + r$$

Para entrada escalón unitario:

$$r = 1 \quad \dot{r} = 0 \quad \ddot{r} = 0$$

Luego:

$$0.8\ddot{e} + 2.4\dot{e} + 11e = 1$$

Para dibujar la trayectoria se buscan los puntos singulares en los que $\ddot{e} = \dot{e} = 0$:

Se cumple para $e = \frac{1}{11} = 0.09$

Luego el punto singular estable será el $(e, \dot{e}) = (0.09, 0)$

Se va a aplicar el método gráfico de las isoclinas para representar las trayectorias.

Variables de estado empleadas:

$$x_1 = e$$

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} = \dot{e}$$

Como $\frac{d\dot{e}}{de} = \frac{\ddot{e}}{\dot{e}}$ representa la pendiente de la trayectoria e frente a $\dot{e}$.

Si se obtienen las ecuaciones para las que dicha pendiente tiene un valor constante:

$$\frac{d\dot{e}}{de} = \frac{\ddot{e}}{\dot{e}} = N$$

se obtendrán las isoclinas, a partir de las cuales se puede obtener el campo de direcciones de las trayectorias.

Para el caso considerado:

$$0.8\ddot{e} = -2.4\dot{e} - 11e + 1$$

$$\frac{\ddot{e}}{\dot{e}} = \frac{-2.4\dot{e} - 11e + 1}{0.8\dot{e}} = N$$

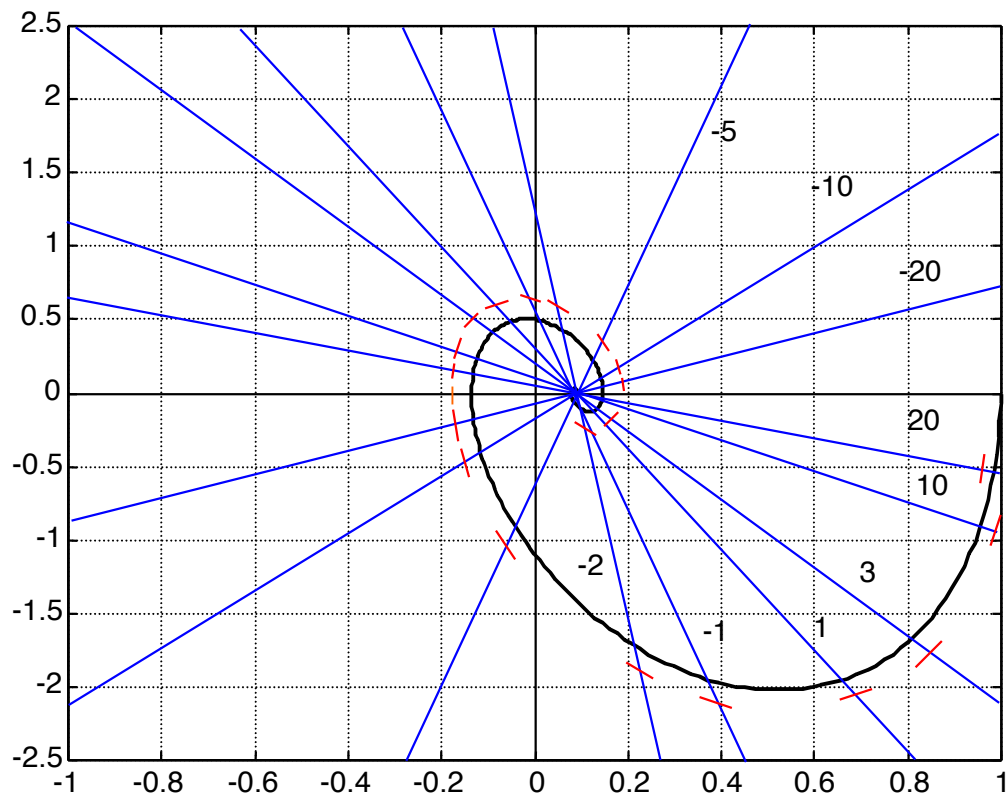
$$-2.4\dot{e} - 11e + 1 = 0.8\dot{e}N$$

$$-11e + 1 = (0.8N + 2.4)\dot{e}$$

Con lo que la ecuación de las isoclinas es:

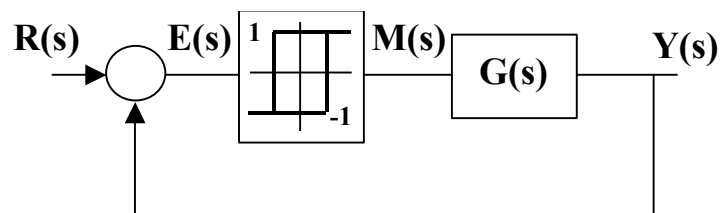
$$\dot{e} = \frac{-11}{0.8N + 2.4}e + \frac{1}{0.8N + 2.4}$$

N	Arctg(N)	Pendiente $\frac{-11}{0.8N + 2.4}$	Constante $\frac{1}{0.8N + 2.4}$	Angulo isoclina
-20	-87.1°	0.8088	-0.0735	39.0°
-10	-84.3°	1.9643	-0.1786	63.0°
-5	-78.7°	6.8750	-0.6250	81.7°
-2	-63.4°	-13.7500	1.2500	-85.8°
-1	-45°	-6.8750	0.6250	-81.7°
1	45°	-3.4375	0.3125	-73.8°
3	71.6°	-2.2917	0.2083	-66.4°
10	84.3°	-1.0577	0.0962	-46.6°
20	87.1°	-0.5978	0.0543	-30.9°



EJERCICIO 6.14

En la siguiente figura se puede observar un sistema de control en el que aparece un elemento no lineal del tipo todo nada, con histéresis.



$$G(s) = \frac{10}{(0.4s + 1)(2s + 1)}$$

Representar el diagrama del plano de fase del sistema con la no linealidad con un valor de histéresis de 0.2.

$$\frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{10}{(0.4s + 1)(2s + 1)} = \frac{10}{0.8s^2 + 2.4s + 1}$$

$$(0.8s^2 + 2.4s + 1)Y(s) = 10M(s)$$

$$0.8\ddot{y} + 2.4\dot{y} + y = 10m$$

Como:

$$e = r - y \quad y = r - e$$

entonces:

$$0.8(\ddot{r} - \ddot{e}) + 2.4(\dot{r} - \dot{e}) + r - e = 10m$$

$$0.8\ddot{e} + 2.4\dot{e} + e = 0.8\ddot{r} + 2.4\dot{r} + r - 10m$$

Para entrada escalón unitario:

$$r = 1 \quad \dot{r} = 0 \quad \ddot{r} = 0$$

Luego:

$$0.8\ddot{e} + 2.4\dot{e} + e = 1 - 10m$$

El funcionamiento del elemento no lineal es:

Si $\dot{e} > 0$:

$$\begin{aligned} m &= -1 & \text{si } e < 0.2 \\ m &= 1 & \text{si } e \geq 0.2 \end{aligned}$$

Si $\dot{e} < 0$:

$$\begin{aligned} m &= 1 & \text{si } e > -0.2 \\ m &= -1 & \text{si } e \leq -0.2 \end{aligned}$$

Luego existen cuatro zonas de funcionamiento del sistema:

Si $\dot{e} > 0$ y $e < 0.2$:

$$0.8\ddot{e} + 2.4\dot{e} + e = 11$$

Si $\dot{e} > 0$ y $e \geq 0.2$:

$$0.8\ddot{e} + 2.4\dot{e} + e = -9$$

Si $\dot{e} < 0$ y $e > -0.2$:

$$0.8\ddot{e} + 2.4\dot{e} + e = -9$$

Si $\dot{e} < 0$ y $e \leq -0.2$:

$$0.8\ddot{e} + 2.4\dot{e} + e = 11$$

En cada tramo la trayectoria tenderá hacia un punto singular:

Si $\dot{e} > 0$ y $e < 0.2$ tiende hacia el (11,0)

Si $\dot{e} > 0$ y $e \geq 0.2$ tiende hacia el (-9,0)

Si $\dot{e} < 0$ y $e > -0.2$ tiende hacia el (-9,0)

Si $\dot{e} < 0$ y $e \leq -0.2$ tiende hacia el (11,0)

Cálculo de las isoclinas:

Si $\dot{e} > 0$ y $e < 0.2$ ó si $\dot{e} < 0$ y $e \leq -0.2$ la ecuación es:

$$0.8\ddot{e} + 2.4\dot{e} + e = 11$$

luego:

$$0.8\ddot{e} = -2.4\dot{e} - e + 11$$

$$\frac{\ddot{e}}{\dot{e}} = \frac{-2.4\dot{e} - e + 11}{0.8\dot{e}} = N$$

$$-2.4\dot{e} - e + 11 = N \cdot 0.8\dot{e}$$

$$-(2.4 + 0.8N)\dot{e} = e - 11$$

$$\dot{e} = \frac{-1}{2.4 + 0.8N}e + \frac{11}{2.4 + 0.8N}$$

N	Arctg(N)	Pendiente $\frac{-1}{0.8N + 2.4}$	Constante $\frac{11}{0.8N + 2.4}$	Angulo isoclina
-40	-88.6°	0.0338	-0.3716	1.9°
-15	-86.2°	0.1042	-1.1458	5.9°
-10.5	-84.6°	0.1667	-1.8333	9.5°
-8.5	-83.3°	0.2273	-2.5000	12.8°
-7.5	-82.4°	0.2778	-3.0556	15.5°
1.8	60.9°	-0.2604	2.8646	-14.6°
3	71.6°	-0.2083	2.2917	-11.8°
5	78.7°	-0.1562	1.7188	-8.9°
10	84.3°	-0.0962	1.0577	-5.5°
40	88.6°	-0.0291	0.3198	-1.7°

Si $\dot{e} > 0$ y $e \geq 0.2$ ó si $\dot{e} < 0$ y $e > -0.2$ la ecuación es:

$$0.8\ddot{e} + 2.4\dot{e} + e = -9$$

$$0.8\ddot{e} = -2.4\dot{e} - e - 9$$

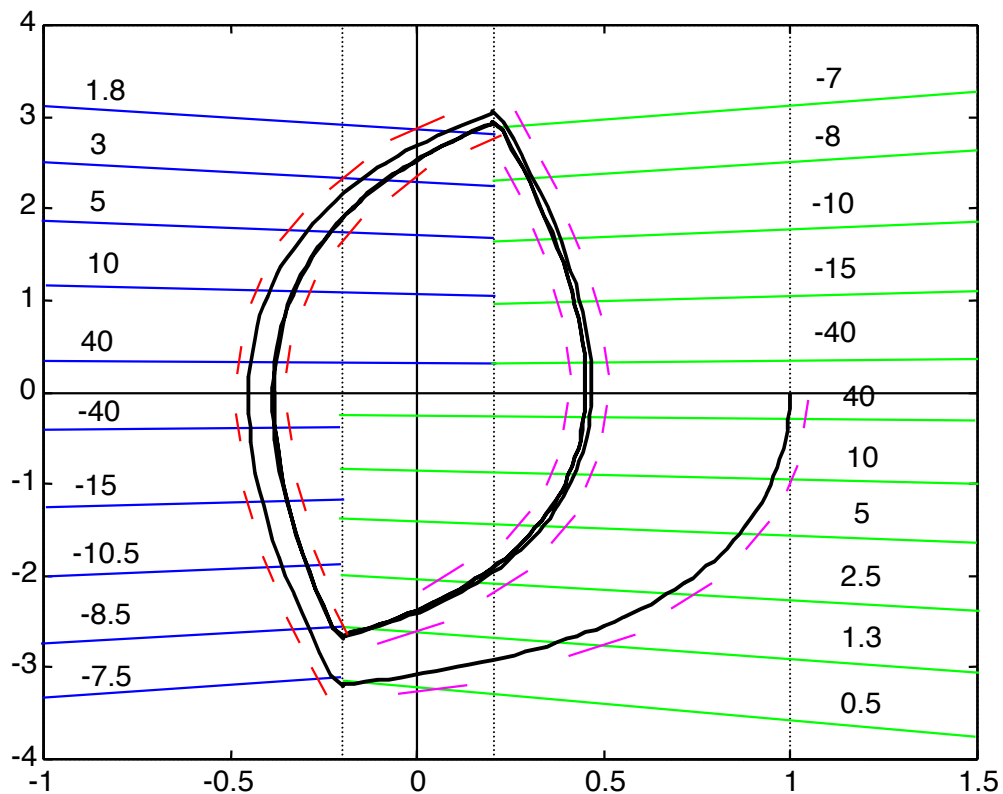
$$\frac{\ddot{e}}{\dot{e}} = \frac{-2.4\dot{e} - e - 9}{0.8\dot{e}} = N$$

$$-2.4\dot{e} - e - 9 = N \cdot 0.8\dot{e}$$

$$-(2.4 + 0.8N)\dot{e} = e + 9$$

$$\dot{e} = \frac{-1}{2.4 + 0.8N}e + \frac{-9}{2.4 + 0.8N}$$

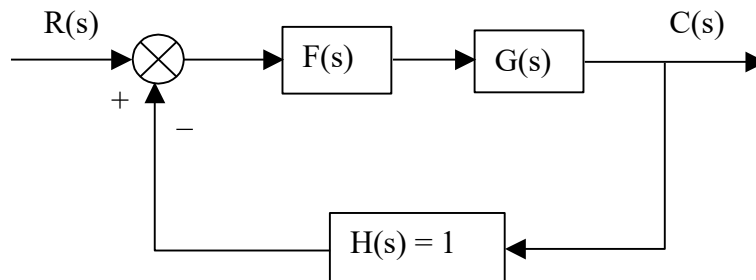
N	Arctg(N)	Pendiente $\frac{-11}{0.8N + 2.4}$	Constante $\frac{1}{0.8N + 2.4}$	Angulo isoclina
-40	-88.6°	0.0338	0.3041	1.9
-15	-86.2°	0.1042	0.9375	5.9
-10	-84.3°	0.1786	1.6071	10.1
-8	-82.9°	0.2500	2.2500	14.0
-7	-81.9°	0.3125	2.8125	17.4
0.5	26.6°	-0.3571	-3.2143	-19.7
1.3	52.4°	-0.2907	-2.6163	-16.2
2.5	68.2°	-0.2273	-2.0455	-12.8
5	78.7°	-0.1562	-1.4062	-8.9
10	84.3°	-0.0962	-0.8654	-5.5
40	88.6°	-0.0291	-0.2616	-1.7



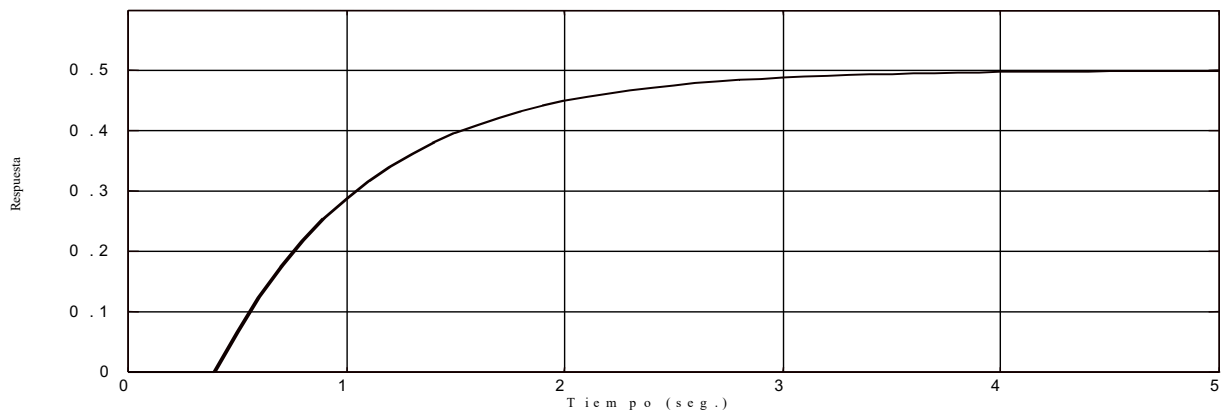
Puede observarse que el sistema no llega a ningún punto estable sino que presenta un ciclo límite.

EJERCICIO 6.15

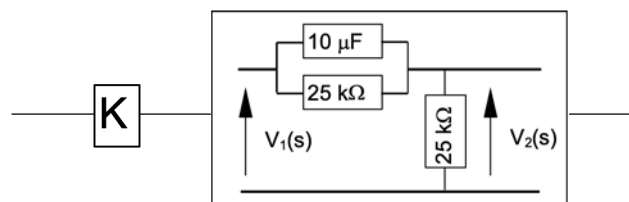
En la figura se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control:



Se sabe que $G(s)$ (reactor químico) ante una entrada escalón unitario tiene una respuesta:



Para regular el proceso, se utiliza un regulador $F(s)$ de la forma:



Calcular la función de transferencia de la Planta y del Regulador.
Obtener gráficamente el efecto de la red de compensación para $K = 10$.

Se comienza hallando cada uno de los bloques que constituyen el sistema.

$F(s)$: Por la representación, se trata de una red de avance de fase. Su función de transferencia es:

$$G_{ra}(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \alpha \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T}$$

siendo:

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{25 \text{ k}\Omega}{25 + 25 \text{ k}\Omega} = \frac{1}{2},$$

$$y \quad T = R_1 C = 25 \text{ k}\Omega \cdot 10 \mu\text{F} = 25 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \Omega\text{F} = 0.25 = \frac{1}{4}$$

sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación anterior, se tiene:

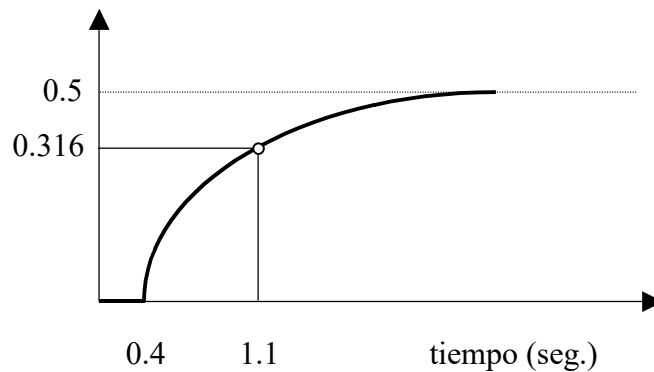
$$G_{ra}(s) = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{s}{4}}{1 + s \frac{1}{2 \cdot 4}} = \frac{1}{2} \frac{\frac{4+s}{4}}{\frac{8+s}{8}} = \frac{1}{2} \frac{8s+4}{4s+8} = \frac{s+4}{s+8}$$

Luego el regulador $F(s)$, será:

$$F(s) = K \frac{s+4}{s+8}$$

$G(s)$: puede verse en la gráfica que la respuesta presenta un retardo de valor $\tau_d = 0.4$ segundos. La respuesta tiene un valor final de 0.5 y la podemos aproximar a la un sistema de 1^{er} orden ante un escalón unitario, luego:

$$63.2\% \cdot V_{\text{final}} = 0.632 \cdot 0.5 = 0.316, \text{ y entrando en la gráfica con este valor:}$$



$$\text{Luego la constante de tiempo del sistema será: } \tau = 1.1 - \tau_d = 1.1 - 0.4 = 0.7$$

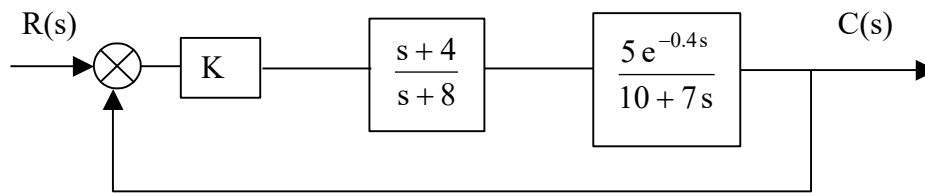
La función de transferencia del sistema de 1^{er} orden, será:

$$G'(s) = \frac{K'}{1 + \tau s} = \frac{0.5}{1 + 0.7s} = \frac{0.5}{\frac{10 + 7s}{10}} = \frac{5}{10 + 7s}$$

por lo que la función de transferencia de la planta quedará:

$$G(s) = \frac{5 e^{-0.4s}}{10 + 7s}$$

quedando entonces el diagrama de bloques del sistema de control:



La función de transferencia del sistema sin compensar, es:

$$G(s) = \frac{5 e^{-0.4s}}{10 + 7s}$$

Se halla su respuesta en frecuencia haciendo el cambio: $s \rightarrow j\omega$.

$$G(j\omega) = \frac{5 \cdot e^{-0.4j\omega}}{10 \left(\frac{7j\omega}{10} + 1 \right)} = \frac{0.5 e^{-0.4j\omega}}{\frac{j\omega}{10/7} + 1}$$

Se obtiene $K_{\text{Bode}} = 0.5$

Frecuencia de corte: $10/7$.

A continuación se incluyen las tablas de pendientes para el trazado de los diagramas de Bode asintóticos. El término de retardo no afecta al diagrama de amplitud.

DIAGRAMA DE AMPLITUD

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (dB)	Pendiente (dB/dec)
$K_B=0.5$	$(0.1, 10/7]$	★	$-20 \cdot \text{tipo} = 0$
$\frac{0.5}{\left(\frac{j\omega}{10/7} + 1 \right)}$	$[10/7, 100)$	-20	-20

$$\star \text{ Aportación} = 20 \cdot [\log K_{\text{Bode}} - \text{tipo} \cdot \log \omega_i] = 20 \cdot [\log 0.5] = -6.0206 \text{ dB}$$

DIAGRAMA DE FASE

Ahora se debe tener en cuenta el término de retardo:

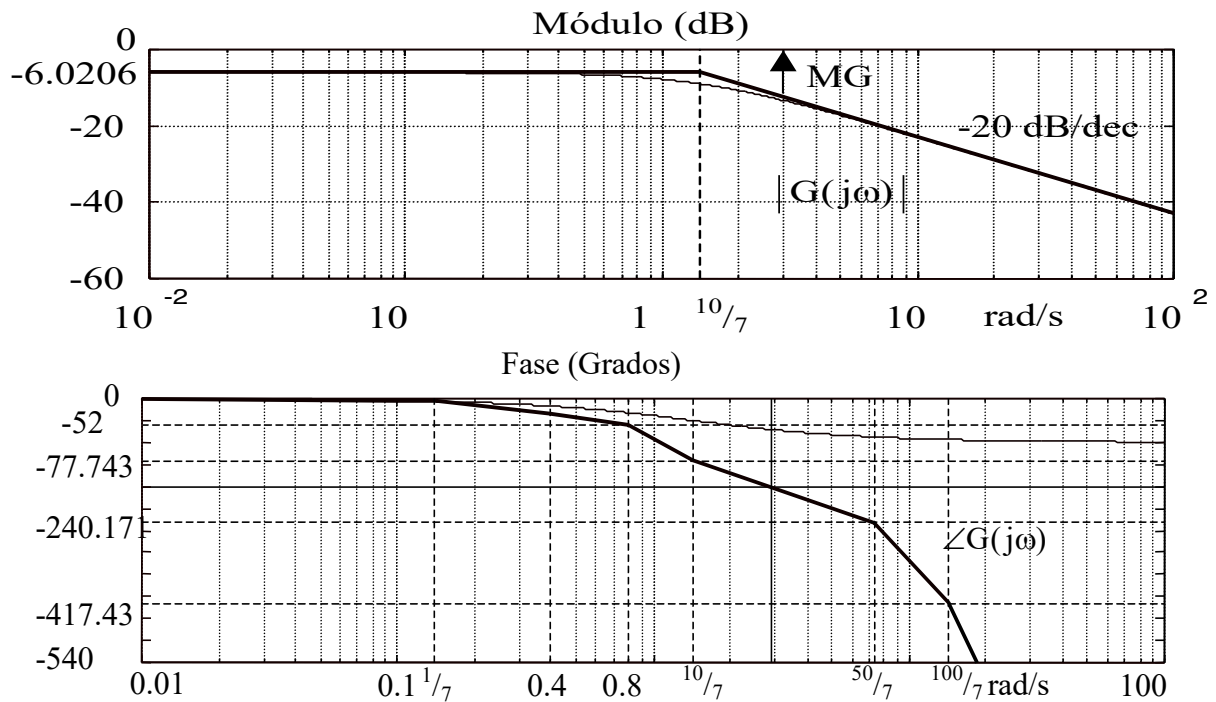
$$\angle e^{-0.4j\omega} = -57.3 \cdot 0.4 \cdot \omega \text{ (grados)} = -22.92 \omega \text{ } (^{\circ})$$

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (°)	Pendiente (°/dec)
0.5	(0.01, $1/7$]	- 90° * tipo = 0°	0°
$\frac{0.5}{\left(\frac{j\omega}{10/7} + 1\right)}$	$[1/7, 100/7]$	- 45°	- 45°
0.5	$[100/7, 100)$	+ 45°	0°

Se calcula el valor de la fase del término de retardo en los puntos más significativos del intervalo del diagrama y se suma al valor de fase que tendría el sistema sin el retardo del sistema:

$\omega = 0.01$	$- 0.4 \cdot 0.01 \cdot 57.3 = - 0.2292^\circ$
$\omega = 0.1$	$- 0.4 \cdot 0.1 \cdot 57.3 = - 2.292^\circ$
$\omega = 1/7$	$- 0.4 \cdot 1/7 \cdot 57.3 = - 3.2743^\circ$
$\omega = 0.4$	$- 0.4 \cdot 0.4 \cdot 57.3 = - 9.168^\circ$
$\omega = 0.8$	$- 0.4 \cdot 0.8 \cdot 57.3 = - 18.336^\circ$
$\omega = 10/7$	$- 0.4 \cdot 10/7 \cdot 57.3 = - 32.743^\circ$
$\omega = 50/7$	$- 0.4 \cdot 50/7 \cdot 57.3 = - 163.7143^\circ$
$\omega = 100/7$	$- 0.4 \cdot 100/7 \cdot 57.3 = - 327.43^\circ$
$\omega = 200/7$	$- 0.4 \cdot 200/7 \cdot 57.3 = - 654.8571^\circ$
$\omega = 40$	$- 0.4 \cdot 40 \cdot 57.3 = - 916.8^\circ$
$\omega = 80$	$- 0.4 \cdot 80 \cdot 57.3 = - 1833.6^\circ$

Con estos datos, podemos dibujar los diagramas asintóticos de Bode:



Ahora se introduce la red de avance, quedando la función de transferencia en lazo abierto del nuevo sistema compensado:

$$G_{\text{comp}}(s) = \frac{10(s+4)}{(s+8)} \cdot \frac{5e^{-0.4s}}{10+7s} = \frac{50(s+4)e^{-0.4s}}{(s+8)(7s+10)}$$

Haciendo el cambio $s \rightarrow j\omega$, se tiene:

$$G_{\text{comp}}(j\omega) = \frac{50 \cdot 4 \left(\frac{j\omega}{4} + 1 \right) e^{-0.4j\omega}}{8 \left(\frac{j\omega}{8} + 1 \right) 10 \left(\frac{j\omega}{10/7} + 1 \right)} = \frac{2.5 \left(\frac{j\omega}{4} + 1 \right) e^{-0.4j\omega}}{\left(\frac{j\omega}{8} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{10/7} + 1 \right)}$$

$$K'_{\text{Bode}} = 2.5$$

Frecuencias de corte: $\frac{10}{7}$, 4, 8

El término de retardo no afecta al diagrama de amplitud.

DIAGRAMA DE AMPLITUD

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (dB)	Pendiente (dB/dec)
$K_B=2.5$	$(0.1, 10/7]$	★	$-20 \cdot \text{tipo} = 0$
$\frac{2.5}{\left(\frac{j\omega}{10/7} + 1 \right)}$	$[10/7, 4]$	- 20	- 20

$\frac{2.5 \left(\frac{j\omega}{4} + 1 \right)}{\left(\frac{j\omega}{10/7} + 1 \right)}$	[4, 8]	+ 20	0
$\frac{2.5 \left(\frac{j\omega}{4} + 1 \right)}{\left(\frac{j\omega}{10/7} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{8} + 1 \right)}$	[8 100)	- 20	- 20

★ Aportación = $20 \cdot [\log K'_{\text{Bode}} - \text{tipo} \cdot \log \omega_i] = 20 \cdot [\log 2.5] = 7.9588 \text{ dB}$

DIAGRAMA DE FASE:

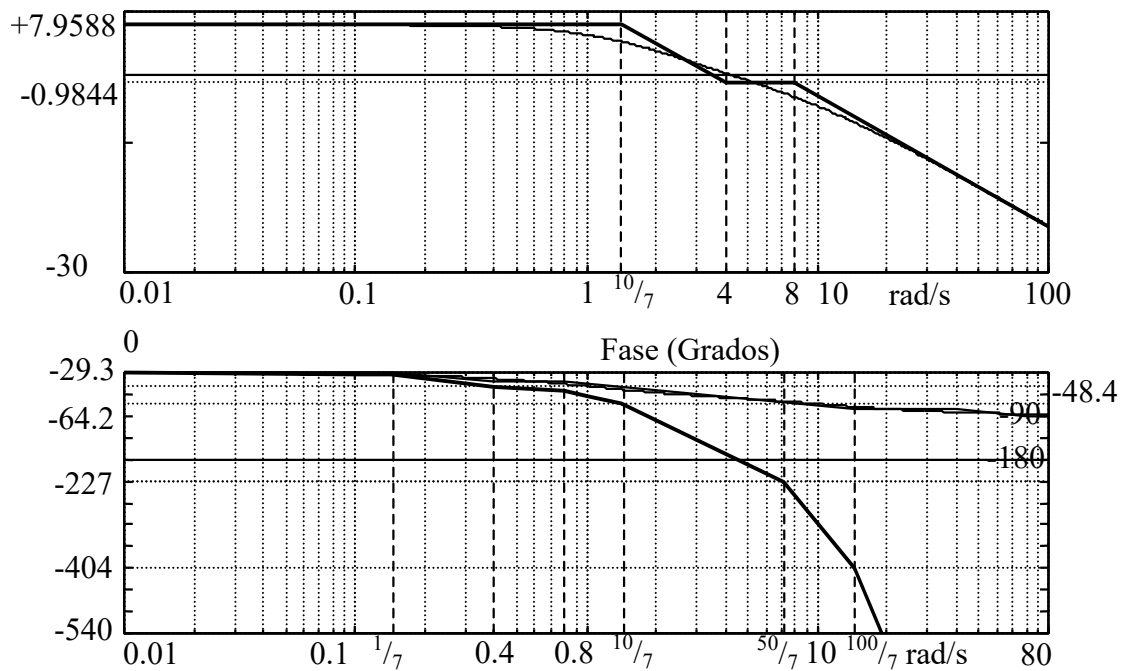
Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (°)	Pendiente (°/dec)
2.5	$(0.1, 1/7]$	-90° * tipo = -90° * 1 = -90°	0°
$\frac{2.5}{\left(\frac{j\omega}{10/7} + 1 \right)}$	$[1/7, 0.4]$	- 45°	- 45°
$\frac{2.5 \left(\frac{j\omega}{4} + 1 \right)}{\left(\frac{j\omega}{10/7} + 1 \right)}$	[0.4, 0.8]	+ 45°	0°
$\frac{2.5 \left(\frac{j\omega}{4} + 1 \right)}{\left(\frac{j\omega}{10/7} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{8} + 1 \right)}$	$[0.8, 100/7]$	- 45°	- 45°
$\frac{2.5 \left(\frac{j\omega}{4} + 1 \right)}{\left(\frac{j\omega}{8} + 1 \right)}$	$[100/7, 40]$	+ 45°	0°
$\frac{2.5}{\left(\frac{j\omega}{8} + 1 \right)}$	[40, 80]	- 45°	- 45°

2.5	[80, 100)	+ 45°	0°
-----	-----------	-------	----

Al igual que antes, para dibujar el diagrama de fase, se debe sumar en cada punto la fase que aporta el retardo.

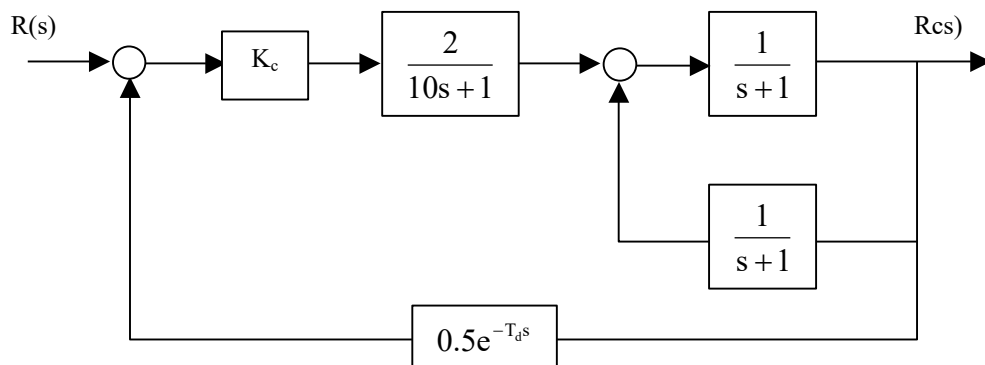
Estos valores, ya estaban calculados.

A continuación se representan los diagramas asintóticos de Bode del sistema completo.
Módulo (dB)



EJERCICIO 6.16

Para el sistema de control dado en la figura:



Para $T_d=0$ y $K_c=1$ dibujar los diagramas de Bode asintóticos.

La ganancia K_c se incrementa hasta que el sistema se hace oscilante a una frecuencia de 3

rad/min.. Con esta información calcular el retardo de transporte T_d .

$$G'(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+1}} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$G(s) = K_c \frac{2}{10s+1} G'(s) = K_c \frac{2}{10s+1} \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$H(s) = 0.5$$

$$G(s)H(s) = K_c \frac{2}{10s+1} \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2} 0.5 = \frac{K_c (s+1)}{(10s+1)(s^2 + 2s + 2)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K_c (j\omega+1)}{(10j\omega+1)((j\omega)^2 + 2j\omega + 2)} = \frac{K_c (j\omega+1)}{\left(\frac{j\omega}{0.1} + 1\right)^2 \left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{j\omega}{1} + 1\right]}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{0.5K_c (j\omega+1)}{\left(\frac{j\omega}{0.1} + 1\right) \left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{j\omega}{1} + 1\right]}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{0.5(j\omega+1)}{\left(\frac{j\omega}{0.1} + 1\right) \left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{j\omega}{1} + 1\right]}$$

$$K_B = 0.5$$

Frecuencias de corte: 0.1, 1 y $\sqrt{2}$

Diagrama de amplitud:

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (dB)	Pendiente (dB/dec)
0.5	(0, 0.1)	H	0
$\frac{0.5}{\left(\frac{j\omega}{0.1} + 1\right)}$	(0.1, 1)	-20	-20

$\frac{0.5(j\omega + 1)}{\left(\frac{j\omega}{0.1} + 1\right)}$	$(1, \sqrt{2})$	+20	0
$\frac{0.5(j\omega + 1)}{\left(\frac{j\omega}{0.1} + 1\right) \left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{j\omega}{1} + 1 \right]}$	$(\sqrt{2}, \infty)$	-40	-40

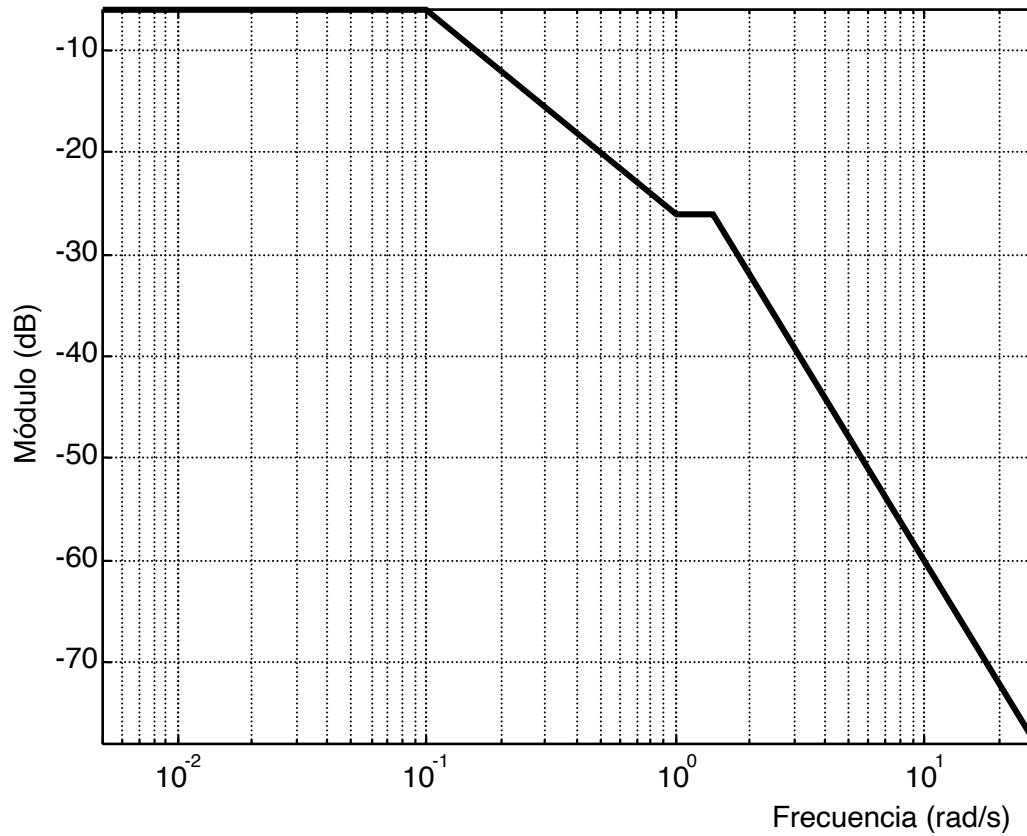
$$H = 20(\log K_B - 0 \cdot \log 0.01) = -6.0206$$

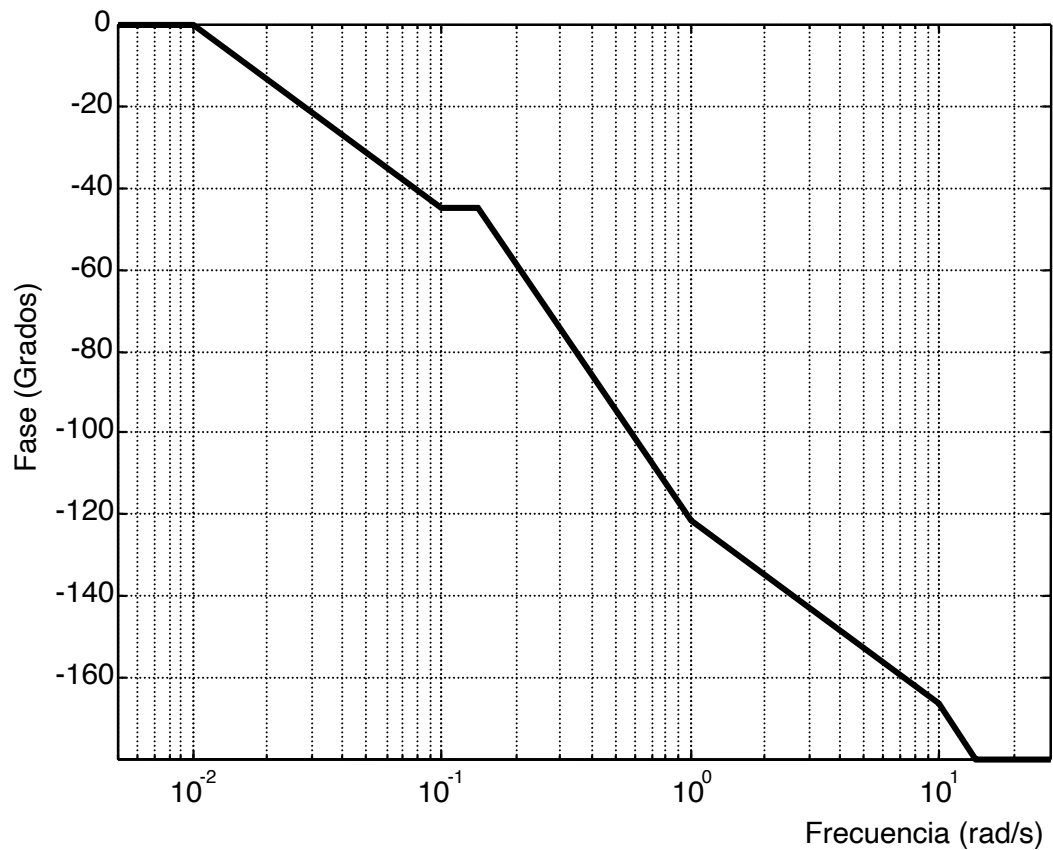
Diagrama de Fase:

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (dB)	Pendiente (dB/dec)
0.5	(0, 0.001)	0°	0
$\frac{0.5}{\left(\frac{j\omega}{0.1} + 1\right)}$	(0.01, 0.1)	-45°	-45°
$\frac{0.5(j\omega + 1)}{\left(\frac{j\omega}{0.1} + 1\right)}$	(0.11, 0.1414)	+45°	0
$\frac{0.5(j\omega + 1)}{\left(\frac{j\omega}{0.1} + 1\right) \left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{j\omega}{1} + 1 \right]}$	(0.1414, 1)	-90°	-90°
$\frac{0.5(j\omega + 1)}{\left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{j\omega}{1} + 1 \right]}$	(1, 10)	+45°	-45°
$\frac{0.5}{\left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{j\omega}{1} + 1 \right]}$	(10, 14.14)	-45°	-90°
0.5	(14.14, ∞)	+90°	0°

En la figura de la página siguiente puede verse la representación de los diagramas de Bode asintóticos para la magnitud y la fase.

En dicha figura puede verse que como los diagramas de amplitud y fase no cortan a las líneas de 0dB y -180° respectivamente, el margen de ganancia es infinito y el margen de fase 180° .





Se incrementa la ganancia:

$$\omega = 3 \text{ rad/min} = \frac{3}{60} \text{ rad/s} = 0.05 \text{ rad/s}$$

Sistema oscilante

$$\angle GH(j\omega) \Big|_{\omega=0.05} + \angle e^{-j\omega T_d} \Big|_{\omega=0.05} = -180^\circ$$

$$\angle GH(j\omega) \Big|_{\omega=0.05} = -45 \log \frac{0.05}{0.01} = -31.454^\circ$$

$$\angle e^{-j\omega T_d} \Big|_{\omega=0.05} = -\frac{180}{\pi} \omega T_d = -\frac{180}{\pi} 0.05 T_d$$

El retardo de transporte debe aportar:

$$-180^\circ + 31.454^\circ = -148.546^\circ$$

luego

$$-\frac{180}{\pi} 0.05 T_d = -148.546^\circ$$

$$T_d = \frac{148.546}{0.05} \frac{\pi}{180}$$

$$T_d = 51.85 \text{ s}$$