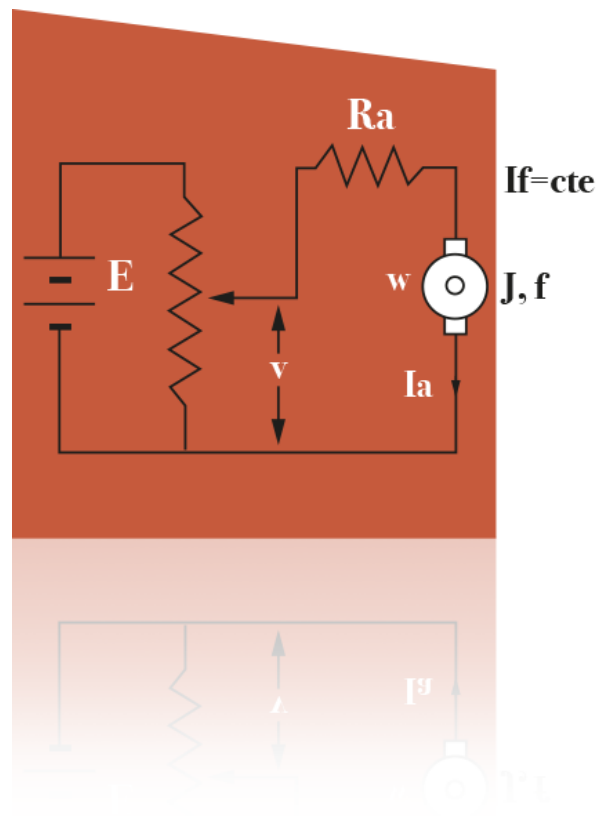


Automática II

Ejercicios Tema 3



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

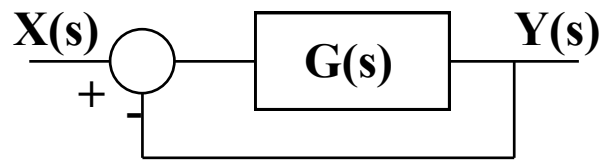
Carlos Torre Ferrero

Elías Revestido Herrero

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 3.1

Para el siguiente sistema:



$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Utilizando diagramas de Bode reales diseñar una red de avance de fase tal que el error de velocidad en estado estacionario sea del 10%, y que el sobreimpulso sea del 20.5%.

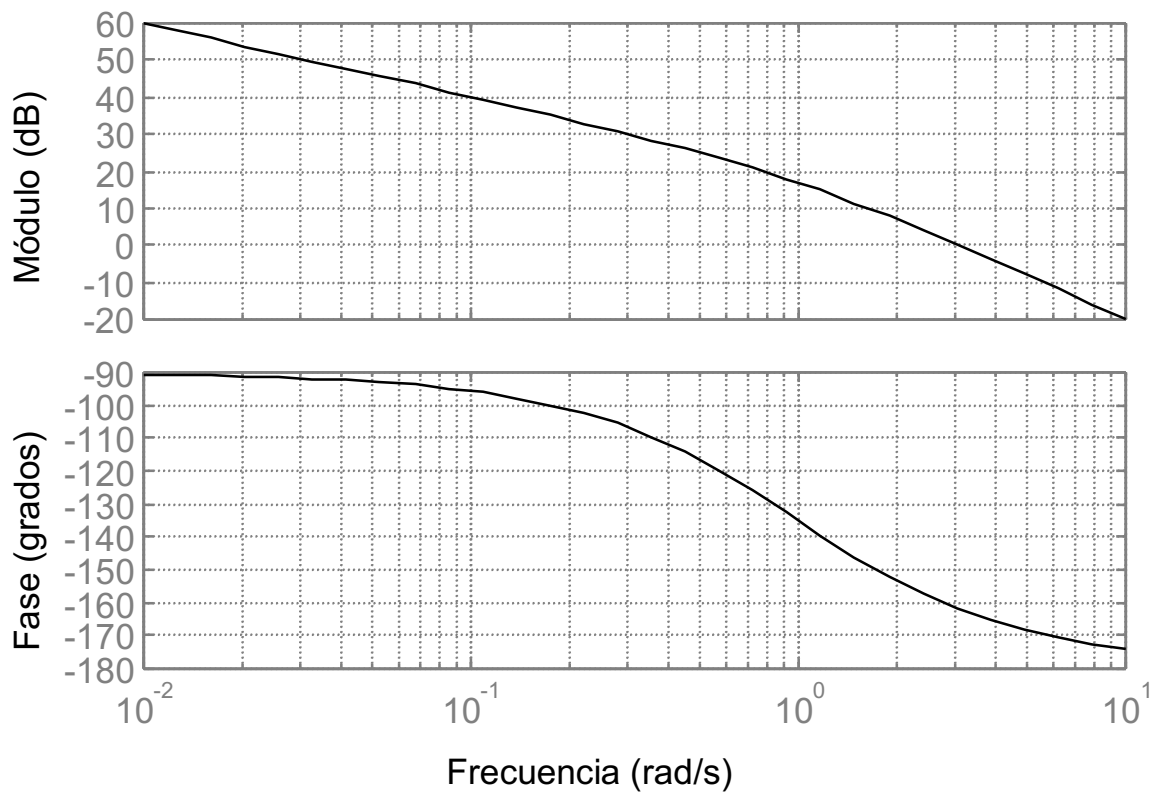
Error de velocidad del 10%:

$$e_v = \frac{1}{k_v} = 0.1 \rightarrow k_v = 10$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+1)} = K \rightarrow K = 10$$

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Diagramas de Bode



Máximo sobreimpulso de 25%:

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.205 \rightarrow \delta = 0.45$$

$$MF \approx 100 \cdot \delta = 45^\circ$$

Se calcula el margen de fase que tiene el sistema inicialmente:

$$MF = 180 + \angle G(w_a)$$

La frecuencia crítica de ganancia ω_{cg} corresponde con aquella en la que el sistema presenta ganancia 1.

$$\left| \frac{10}{jw_a(jw_a + 1)} \right| = 1; \frac{10}{\sqrt{w_a^4 + w_a^2}} = 1 \rightarrow w_a = 3 \text{ rad/sg}$$

Luego el margen de fase inicial es:

$$MF = 180 + [-90 - \arctg(3/1)] \approx 20^\circ$$

Entonces, el ángulo a aportar por la red:

$$\Phi_m = \theta_1 - \theta_2 + \theta_3 = 45^\circ - 20^\circ + 15^\circ = 40^\circ$$

Cálculo de α :

$$\text{sen}(\Phi_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}; \quad \alpha = 0.217$$

Cálculo del valor del módulo de la red en W_m :

$$K_r = 10 \log(1/\alpha) = 6.63$$

La nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$w'_a = 4.5 \text{ rad/sg} \rightarrow w_m$$

$$w_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \rightarrow T = \frac{1}{w_m\sqrt{\alpha}} = 0.477$$

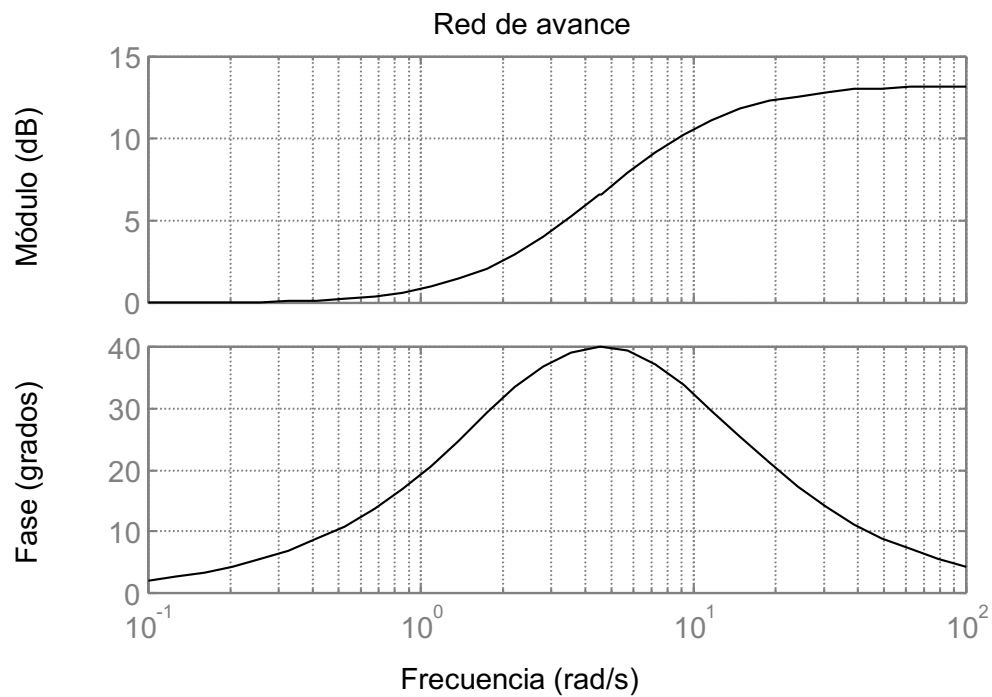
Luego se tendrá:

$$\frac{1}{T} = 2.1$$

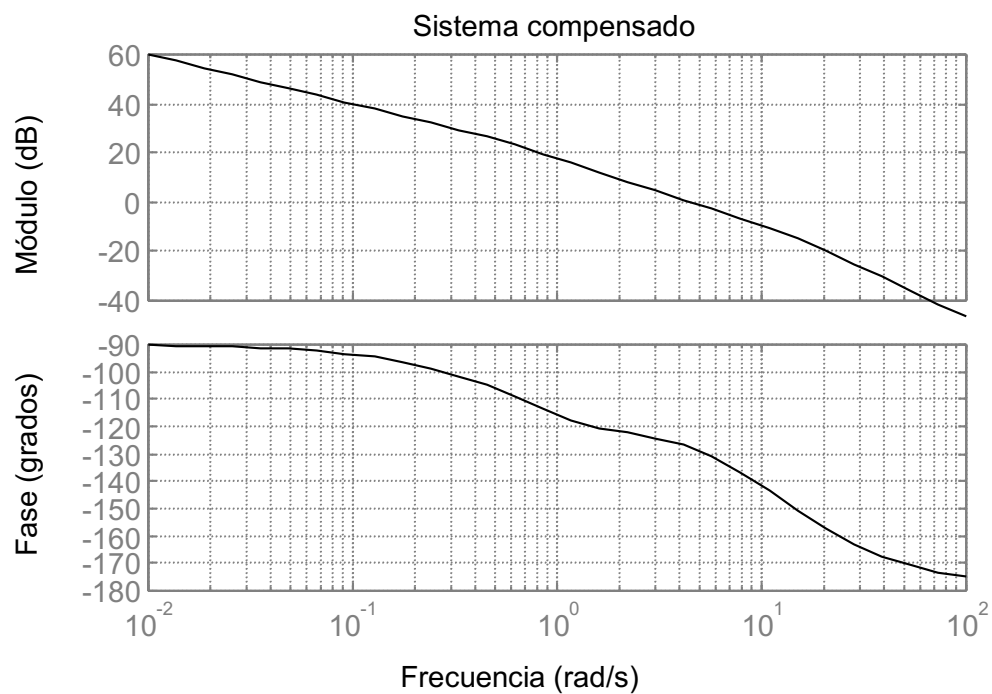
$$\frac{1}{\alpha T} = 9.66$$

Entonces, la red de adelanto queda:

$$D(s) = \frac{1}{0.217} \frac{s + 2.1}{s + 9.66}$$

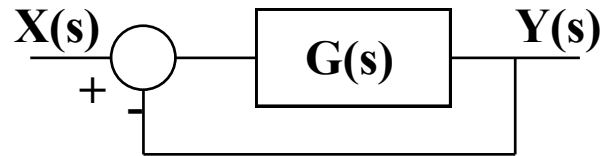


Y el sistema completo compensado:



EJERCICIO 3.2.

Para el siguiente sistema:



$$G(s) = \frac{K}{(s+1)^2(s+2)}$$

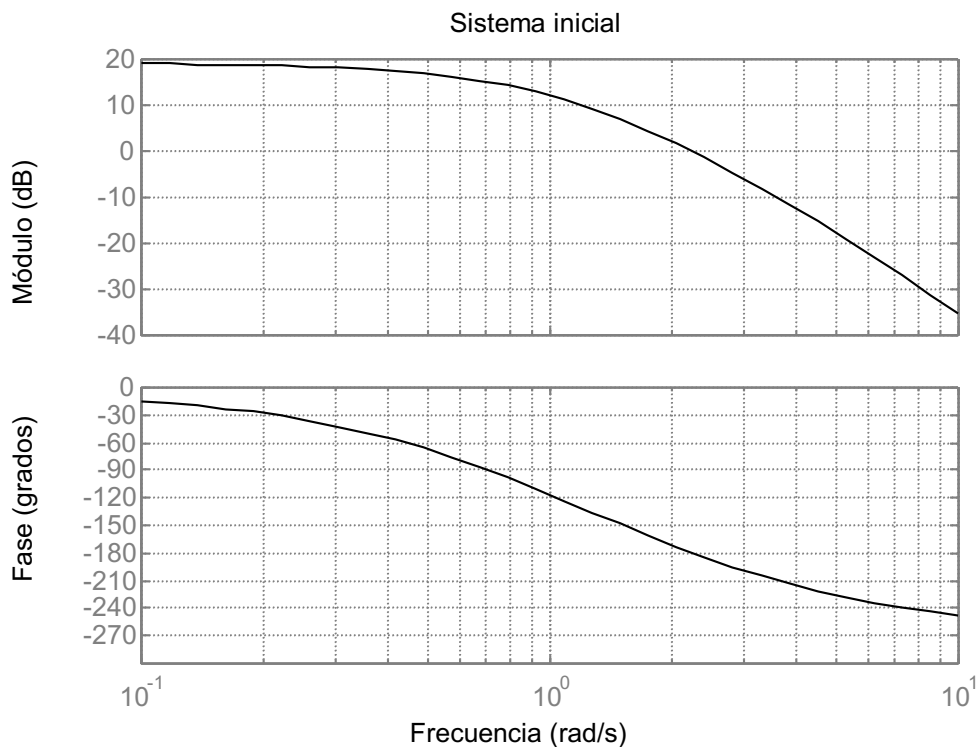
Utilizando diagramas de Bode reales diseñar una red de avance de fase tal que el error de posición en estado estacionario sea de 0.1, y que el margen de fase sea de 30°.

Para la condición de error de régimen permanente se tiene:

$$e_p = \frac{1}{1+k_p} = 0.1 \rightarrow k_p = 9$$

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{K}{2} \rightarrow K = 18$$

$$G(s) = \frac{18}{(s+1)^2(s+2)}$$



Se calcula en primer lugar el margen de fase inicial que posee el sistema:

$$MF = 180 + \angle G(w_a)$$

Para ello se necesita calcular la frecuencia crítica de ganancia w_a :

$$\left| \frac{18}{(jw_a + 1)^2(jw_a + 2)} \right| = 1; \quad \left| \frac{18}{(2 - 4w_a^2) + j(5w_a - w_a^3)} \right| = 1$$

$$\frac{18}{\sqrt{(5w_a - w_a^3)^2 + (2 - 4w_a^2)^2}} = 1$$

$$w_a = 2.24 \text{ rad/sg}$$

$$MF = 180 + [-2 \arctg(2.24) - \arctg(2.24/2)] \approx 0^\circ$$

Entonces, el ángulo de fase que debe aportar la red será:

$$\Phi_m = \theta_1 - \theta_2 + \theta_3 = 30^\circ - 0^\circ + 5^\circ = 35^\circ$$

Cálculo de α :

$$\text{sen}(\Phi_m) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}; \quad \alpha = 0.27$$

La nueva frecuencia crítica de ganancia será aquella en la que el sistema inicial presenta una atenuación igual a la mitad de la ganancia de la red, esto es, el valor del módulo de la red en W_m :

$$K_r = 10 \log(1/\alpha) = 5.68$$

Se hace coincidir la frecuencia a la que se produce el máximo avance de fase de la red con la nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$w'_a = 3 \text{ rad/sg} \rightarrow w_m$$

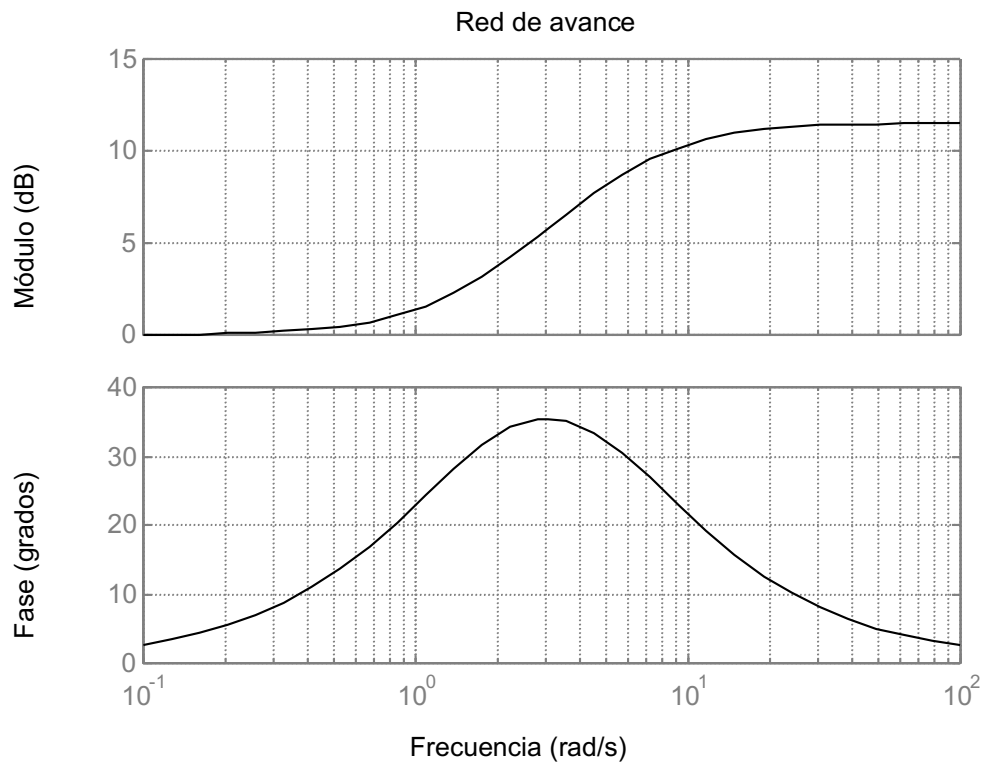
$$w_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \rightarrow T = \frac{1}{w_m\sqrt{\alpha}} = 0.64$$

$$\frac{1}{T} = 1.56 \qquad \frac{1}{\alpha T} = 5.78$$

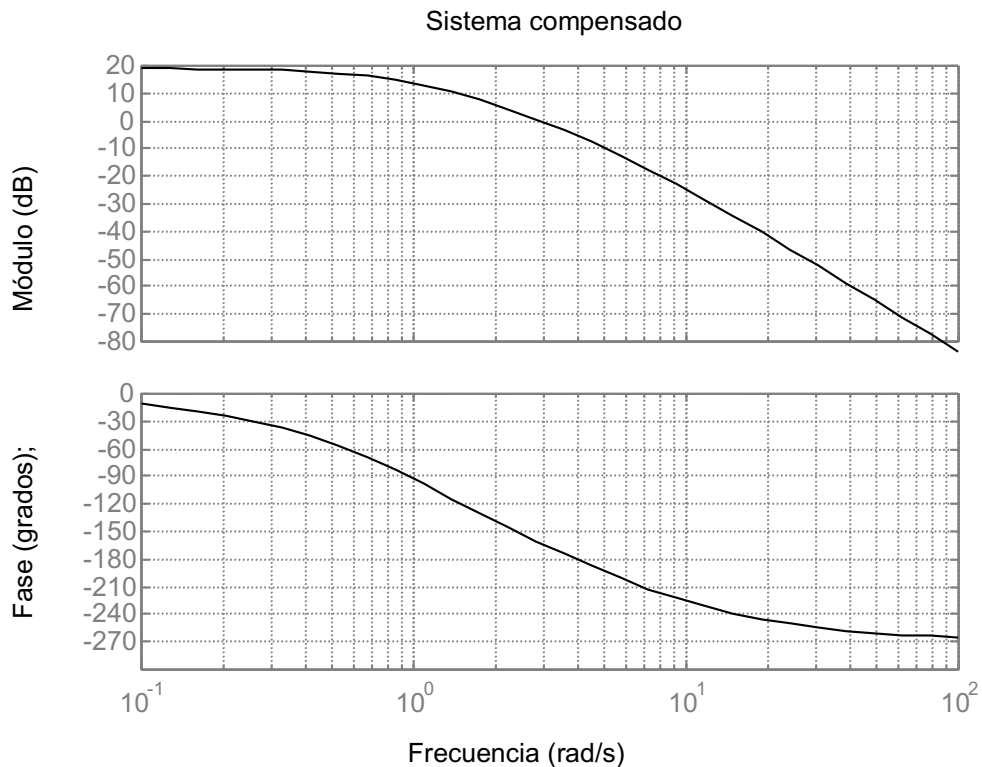
Entonces, la red de adelanto queda:

$$D(s) = \frac{1}{0.27} \frac{s + 1.56}{s + 5.78}$$

La figura muestra la respuesta frecuencial de la red de avance diseñada.



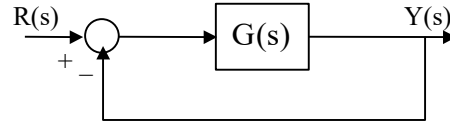
En la siguiente figura se puede ver la respuesta frecuencial del sistema compensado. En dicha respuesta puede comprobarse que las especificaciones pedidas no se cumplen, debido a que el movimiento de la frecuencia de amplitud crítica hacia la derecha hace que el valor del avance de fase utilizado sea insuficiente, debería haberse empleado un coeficiente de seguridad mayor.



EJERCICIO 3.3.

Para el sistema con realimentación unitaria dado por la función de transferencia de cadena directa:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 10}$$



Utilizando los diagramas de Bode reales diseñar una red de avance de fase para obtener un máximo sobreimpulso del 10% y un error de régimen permanente de 0.1.

Los parámetros de la respuesta del sistema inicial son:

Polos de la función de transferencia de cadena directa: $p_{1,2} = -2 \pm j2.45$

Función de transferencia de lazo cerrado:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{10}{s^2 + 4s + 20}$$

Comparando el denominador con la función de transferencia de un sistema de segundo orden se obtiene el valor de la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento:

$$M(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{20} = 4.47 \text{ rad/s}$$

$$2\delta\omega_n = 4 \quad \delta = \frac{4}{2\omega_n} = \frac{4}{2 \cdot 4.47} = 0.45$$

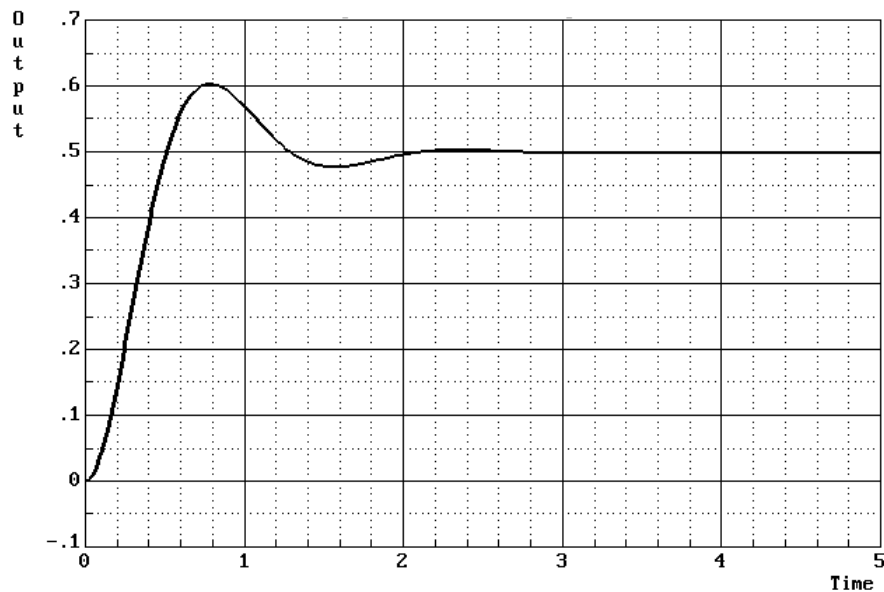
$$M_p = 100 \cdot e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 100 \cdot e^{-\frac{0.45\pi}{\sqrt{1-0.45^2}}} = 20.5\%$$

$$\delta = \cos \theta \quad \theta = \arccos \delta = \arccos 0.45 = 1.104 \text{ rad}$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{\pi - 1.104}{4.47 \sqrt{1 - 0.45^2}} = 0.51 \text{ s}$$

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_p} \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{s^2 + 4s + 10} = \frac{10}{10} = 1 \quad e_{rp} = \frac{1}{1 + 1} = 0.5$$

La gráfica muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado sin compensación ante una entrada escalón unitario, donde pueden comprobarse los resultados anteriores.



Diseño de la red de avance:

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.1 \quad \frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}} = 2.3 \quad \delta^2\pi^2 = 5.3(1-\delta^2)$$

$$\delta^2(\pi^2 + 5.3) = 5.3 \quad \delta = \sqrt{\frac{5.3}{\pi^2 + 5.3}} = 0.59$$

$$MF = 100 \cdot \delta = 59^\circ$$

$$e_{ip} = \frac{1}{1 + K_p} = 0.1 \quad K_p = 9 \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} k \cdot \frac{10}{s^2 + 4s + 10} = 9$$

$$k = 9$$

Una vez ajustada la ganancia para el error se dibuja el diagrama de Bode. La función $G(s)$ resultante una vez corregido el error es:

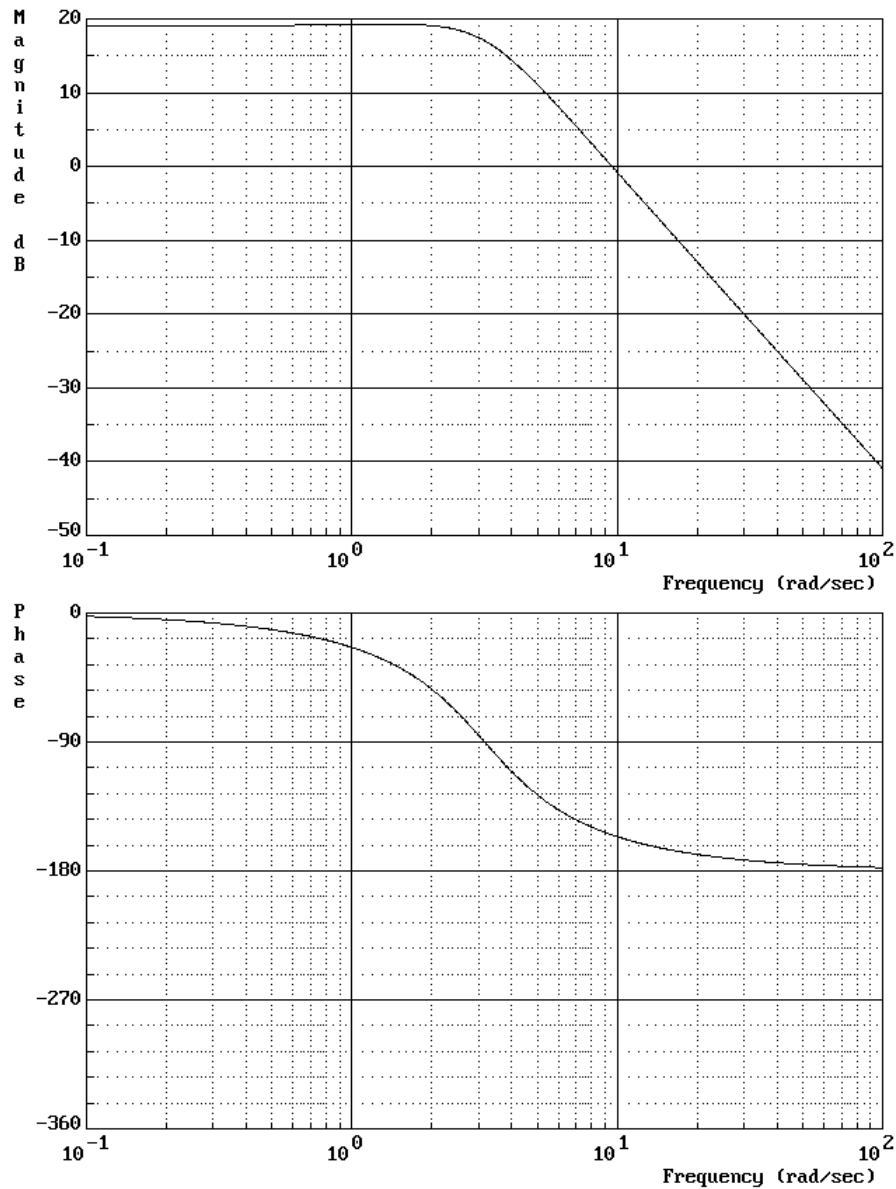
$$G(s) = \frac{90}{s^2 + 4s + 10}$$

$$G(j\omega) = \frac{90}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 10} = \frac{9}{\left(\frac{j\omega}{\sqrt{10}}\right)^2 + 0.4j\omega + 1}$$

$$\text{Ganancia de la función: } 20\log 9 = 19.08\text{dB}$$

$$\text{Frecuencia esquina del polo doble: } \sqrt{10} = 3.16\text{rad/s}$$

La gráfica muestra los diagramas de Bode con la respuesta en frecuencia del sistema inicial en lazo abierto con la ganancia $K=9$ necesaria para cumplir la condición de error en régimen permanente.



En el diagrama de Bode se puede ver la frecuencia crítica de ganancia y el margen de fase del sistema:

$$\omega_{cg} = 9.8 \text{ rad/s}$$

$$MF = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ$$

El ángulo que debe aportar la red utilizando un coeficiente de seguridad de 6° será:

$$\phi_m = 59^\circ - 25^\circ + 6^\circ = 40^\circ$$

$$\sin 40^\circ = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad 0.643 = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad 0.643 + 0.643\alpha = 1 - \alpha$$

Luego el valor del coeficiente α será:

$$\alpha = 0.217$$

La mitad de la ganancia aportada por la red será:

$$K_r = 10 \log \frac{1}{\alpha} = 6.63 \text{dB}$$

Para este valor de atenuación del sistema inicial (compensado el error) se tendrá la nueva frecuencia de ganancia crítica. De la gráfica se obtiene:

$$\omega'_{cg} = 14 \text{ rad/s}$$

Se sitúa el máximo avance de la red en la nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$\omega_n = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 14 \quad T = \frac{1}{14\sqrt{0.217}} = 0.153$$

$$\frac{1}{T} = 6.52$$

$$\frac{1}{\alpha T} = 30.05$$

La red será:

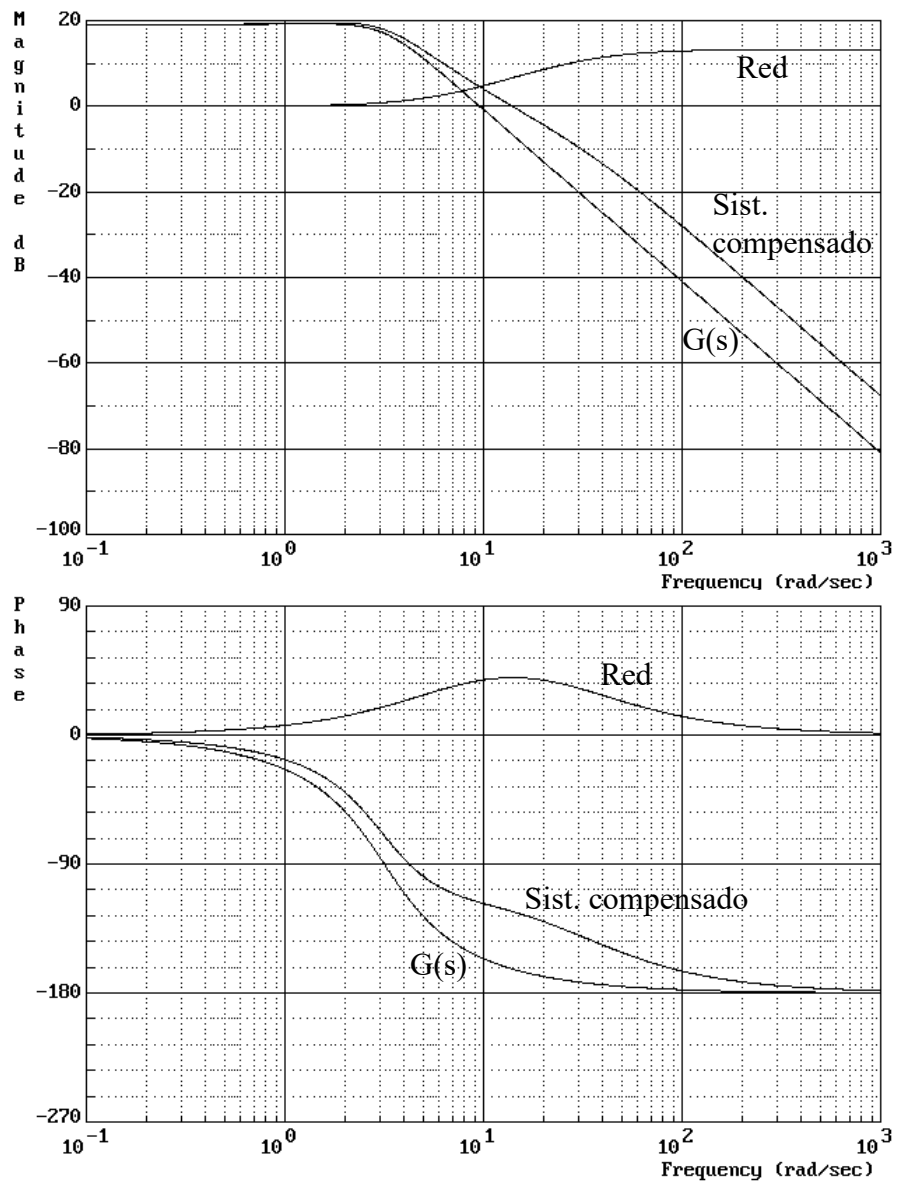
$$C(s) = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = \frac{s + 6.52}{s + 30.05}$$

Y el controlador total añadiendo la ganancia para corrección del error y añadiendo también la ganancia necesaria a la red para que su módulo a bajas frecuencias sea la unidad:

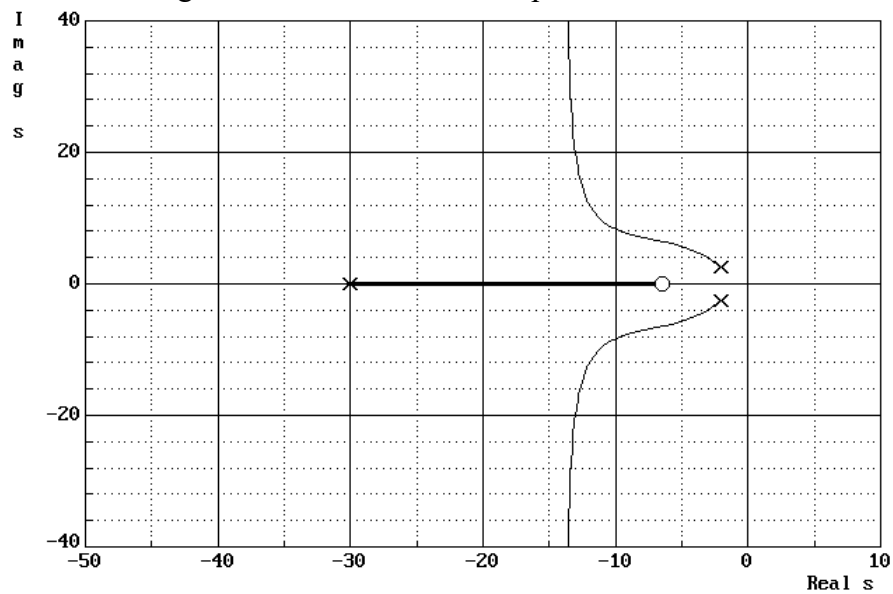
$$C_T(s) = 9 \cdot 4.61 \cdot \frac{s + 6.52}{s + 30.05}$$

En la siguiente gráfica puede verse la respuesta en frecuencia en lazo abierto:

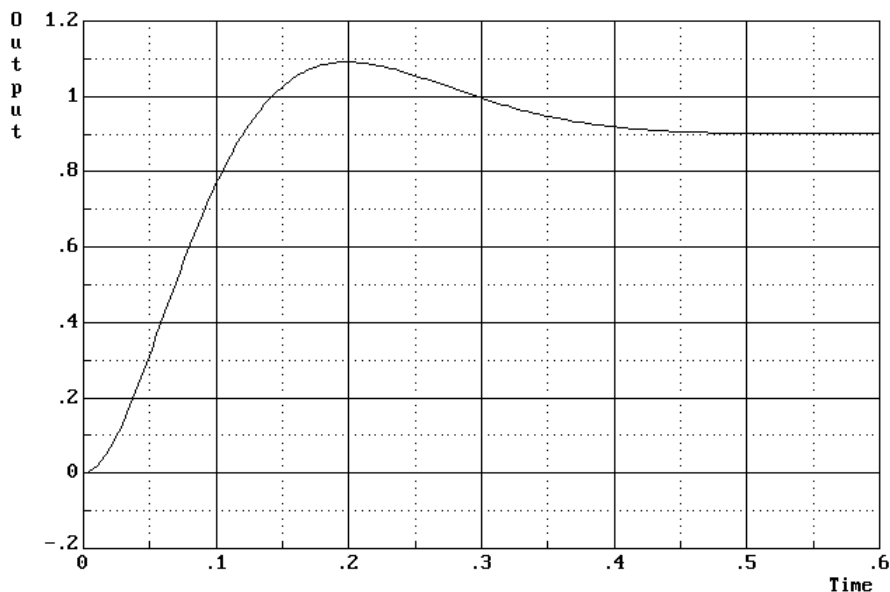
- de $G(s)$ con ganancia para cumplir la condición de error
- de la red
- y del sistema compensado.



La gráfica muestra el lugar de las raíces con el compensador.



Y la siguiente gráfica muestra la respuesta en lazo cerrado con el compensador:



Puede observarse que cumple las especificaciones de error en régimen permanente. Pero no cumple exactamente el máximo sobreimpulso pedido:

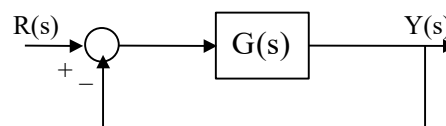
$$M_p = \frac{1.1 - 0.9}{0.9} \cdot 100 = 22\%$$

En el diagrama de Bode del sistema compensado puede verse que el nuevo margen de fase es de aproximadamente 54° que no se aleja demasiado de los 59° buscados, el problema es que para el valor de $\delta=0.59$ no se cumple exactamente la relación de que $MF=100 \cdot \delta$

EJERCICIO 3.4.

Para el sistema con realimentación unitaria dado por la función de transferencia de cadena directa:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 10}$$



Utilizando los diagramas de Bode reales diseñar una red de avance de fase para obtener un tiempo de subida de 0.01s y un máximo sobreimpulso del 30%.

El sistema inicial es el mismo que el utilizado en el ejercicio 3.3.

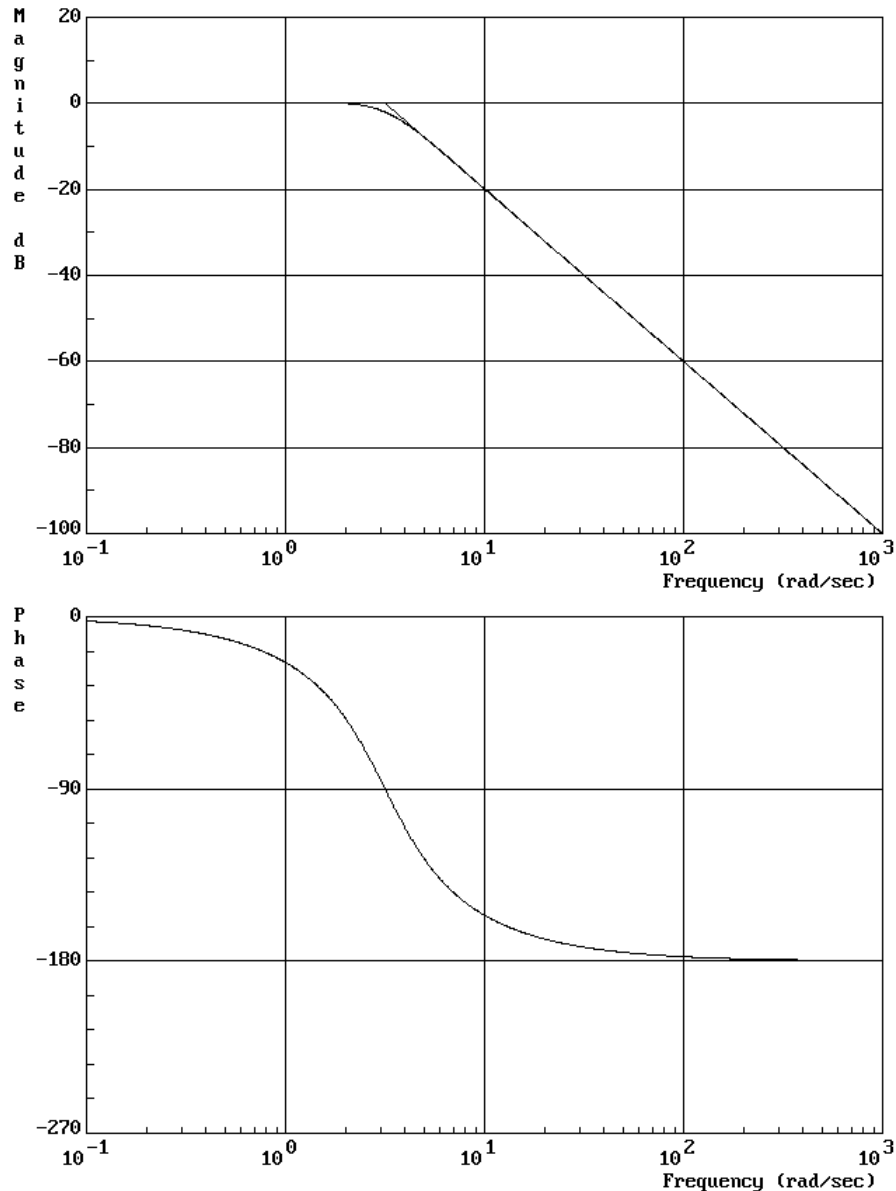
Los parámetros de la respuesta pedida serán:

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.3 \quad \delta = 0.36 \quad MF \approx 36^\circ$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} = 0.01 \quad \theta = \arccos 0.36 = 1.2 \text{ rad} \quad \omega_n = 207.84 \text{ rad/s}$$

Si el valor de δ es pequeño entonces en la relación $\omega_{cg} = \omega_n k$ el valor de k está muy próximo a 1, con lo que se puede aproximar $\omega_{cg} \approx \omega_n$.

Se representa en primer lugar el diagrama de Bode del lazo abierto del sistema inicial:

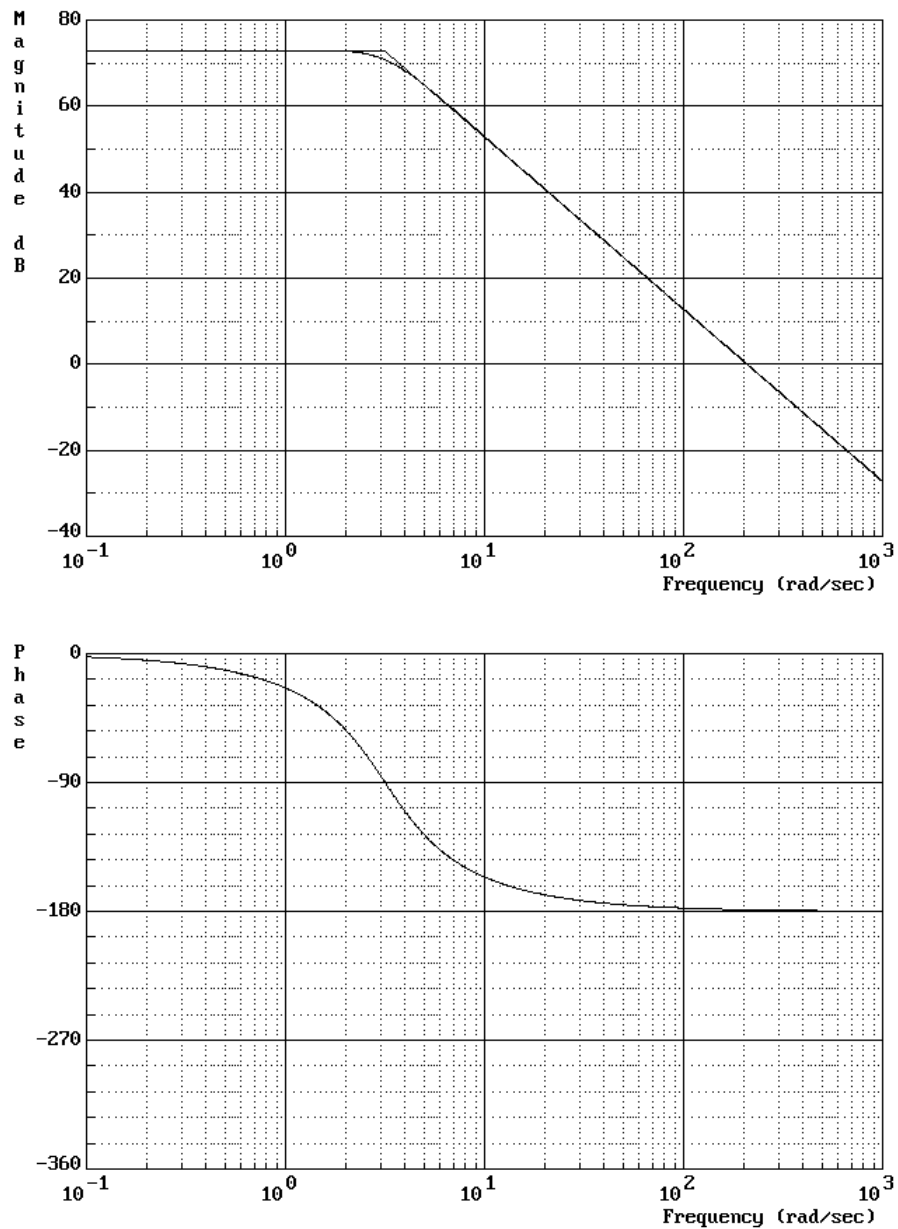


Para la frecuencia 208 rad hay -72.8 dB, por tanto se necesita un regulador proporcional para subir el módulo a esa frecuencia hasta los 0dB.

$$72.8 = 20 \log K$$

$$K = 10^{\frac{72.8}{20}} = 4365.15$$

Se redibuja el diagrama de Bode de lazo abierto incluyendo esta ganancia



Puede comprobarse que tiene la frecuencia de corte de ganancia requerida y que el margen de fase en estas condiciones es de aproximadamente 2° .

Se calcula ahora el regulador de avance de fase necesario:

El ángulo que debe aportar la red utilizando un coeficiente de seguridad de 12° será:

$$\phi_m = 36^\circ - 2^\circ + 12^\circ = 46^\circ$$

$$\operatorname{sen} 46^\circ = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad 0.719 = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$$0.719 + 0.719\alpha = 1 - \alpha$$

Luego el valor del coeficiente α será:

$$\alpha = 0.163$$

La mitad de la ganancia aportada por la red será:

$$K_r = 10 \log \frac{1}{\alpha} = 7.89 \text{dB}$$

Para este valor de atenuación del sistema inicial (compensado el error) se tendrá la nueva frecuencia de ganancia crítica. De la gráfica se obtiene:

$$\omega'_{cg} = 328 \text{ rad/s}$$

Se sitúa el máximo avance de la red en la nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$\omega_n = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 328 \quad T = \frac{1}{328\sqrt{0.163}} = 0.0075$$

$$\frac{1}{T} = 133.34$$

$$\frac{1}{\alpha T} = 818$$

La red será:

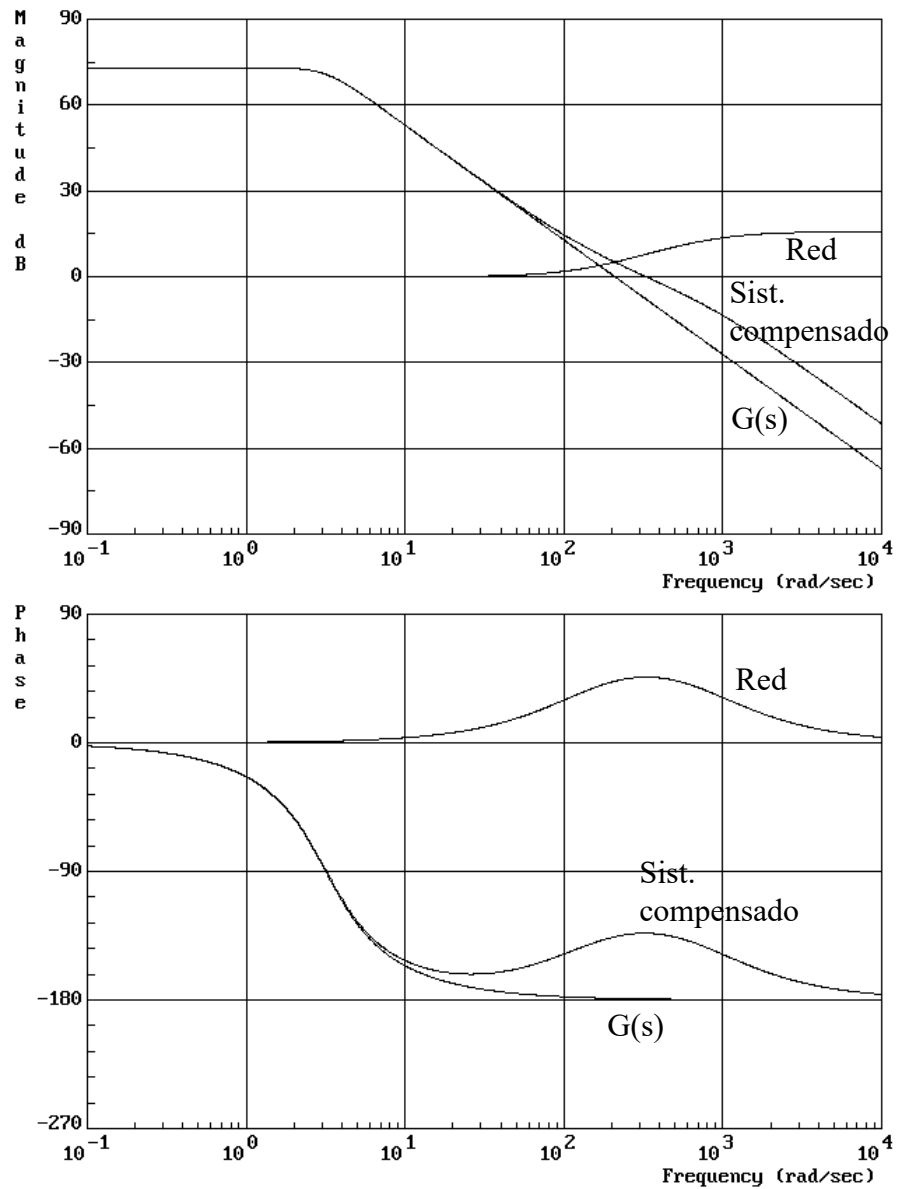
$$C(s) = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = \frac{s + 133.34}{s + 818}$$

Y el controlador total añadiendo la ganancia para corrección de la frecuencia ω_{cg} y añadiendo también la ganancia necesaria a la red para que su módulo a bajas frecuencias sea la unidad:

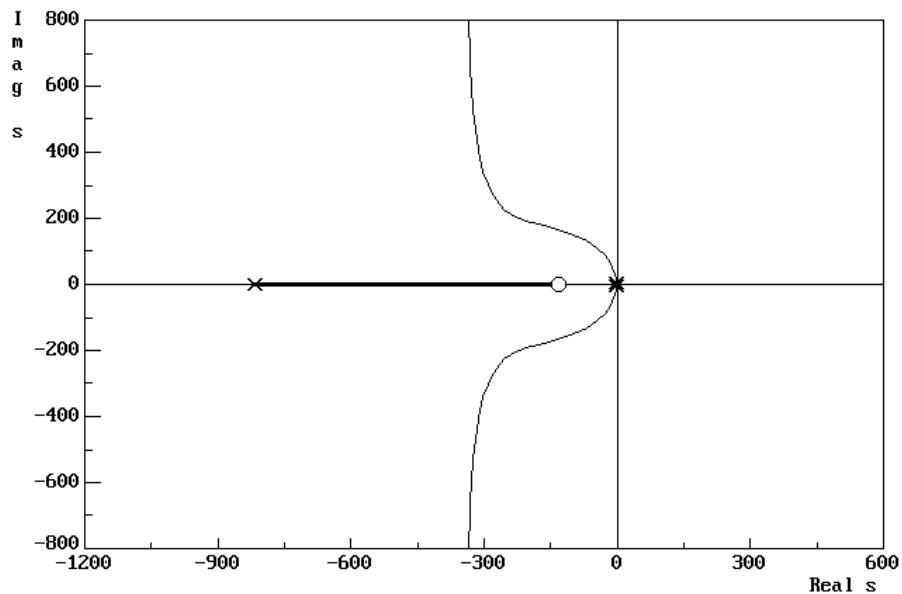
$$C_T(s) = 4365.15 \cdot 6.13 \cdot \frac{s + 133.34}{s + 818}$$

En la siguiente gráfica puede verse la respuesta en frecuencia en lazo abierto:

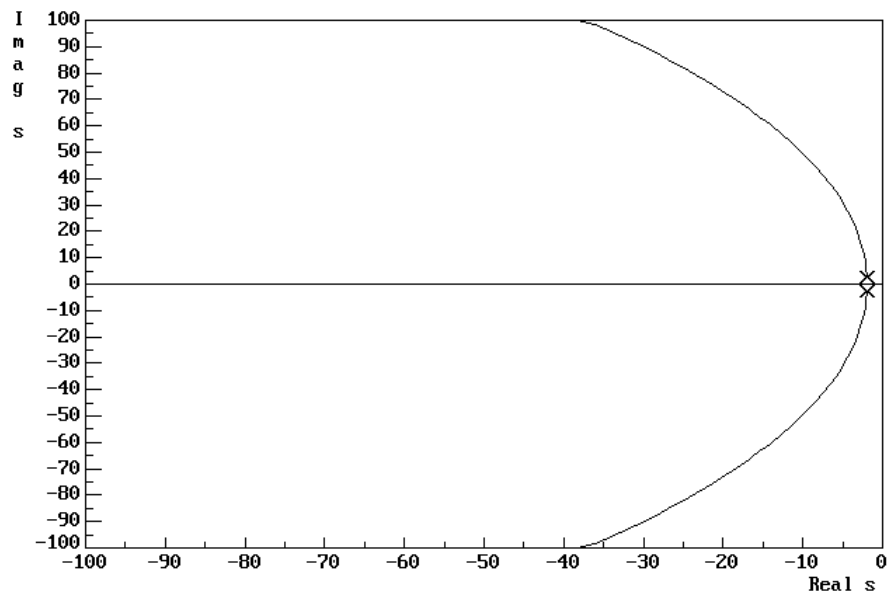
- de $G(s)$ con ganancia para obtener la frecuencia ω_{cg} deseada,
- de la red,
- y del sistema compensado.



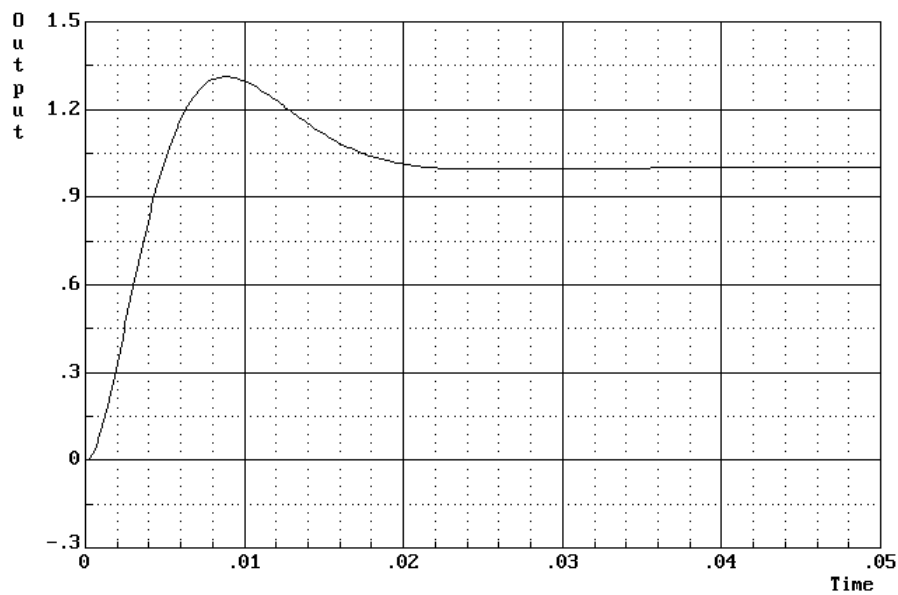
La siguiente figura muestra el lugar de las raíces del sistema compensado.



Y en la siguiente puede verse ampliación de la zona del lugar de las raíces donde va a funcionar el sistema.



La respuesta temporal del sistema ante entrada escalón es:



En la figura puede verse que tiene un sobreimpulso de:

$$M_p = \frac{1.32 - 1.005}{1.005} = 31\%$$

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.31 \quad \delta = 0.35$$

que se aproxima bastante a la especificación pedida.

Y tiene un tiempo de pico de 0.09s:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0.009 \text{ s} \quad \omega_d = \frac{\pi}{0.009} = 349 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \quad 349 = \omega_n \sqrt{1 - 0.35^2} \quad \omega_n = 372 \text{ rad/s}$$

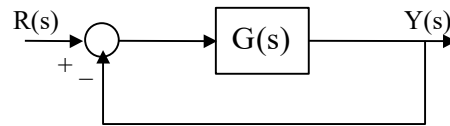
La frecuencia de corte de ganancia del sistema compensado obtenida fue de 328 rad/s y como para el valor de δ utilizado el valor de k es ligeramente inferior a 1 si que se cumplen las especificaciones de $\omega_{cg} \approx \omega_n$ una vez introducido el regulador.

No se cumplen en cambio las especificaciones iniciales debido al movimiento que se produce en la frecuencia de corte de ganancia al calcular el regulador de avance de fase.

EJERCICIO 3.5.

Para el sistema con realimentación unitaria dado por la función de transferencia de cadena directa:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 10}$$



Utilizando los diagramas de Bode reales diseñar una red de avance de fase para obtener una frecuencia de corte de ganancia de 100 rad/s y un error de 0.3.

El sistema inicial es el mismo que el utilizado en el ejercicio 3.3. y 3.4.

Cálculo de la K para el error:

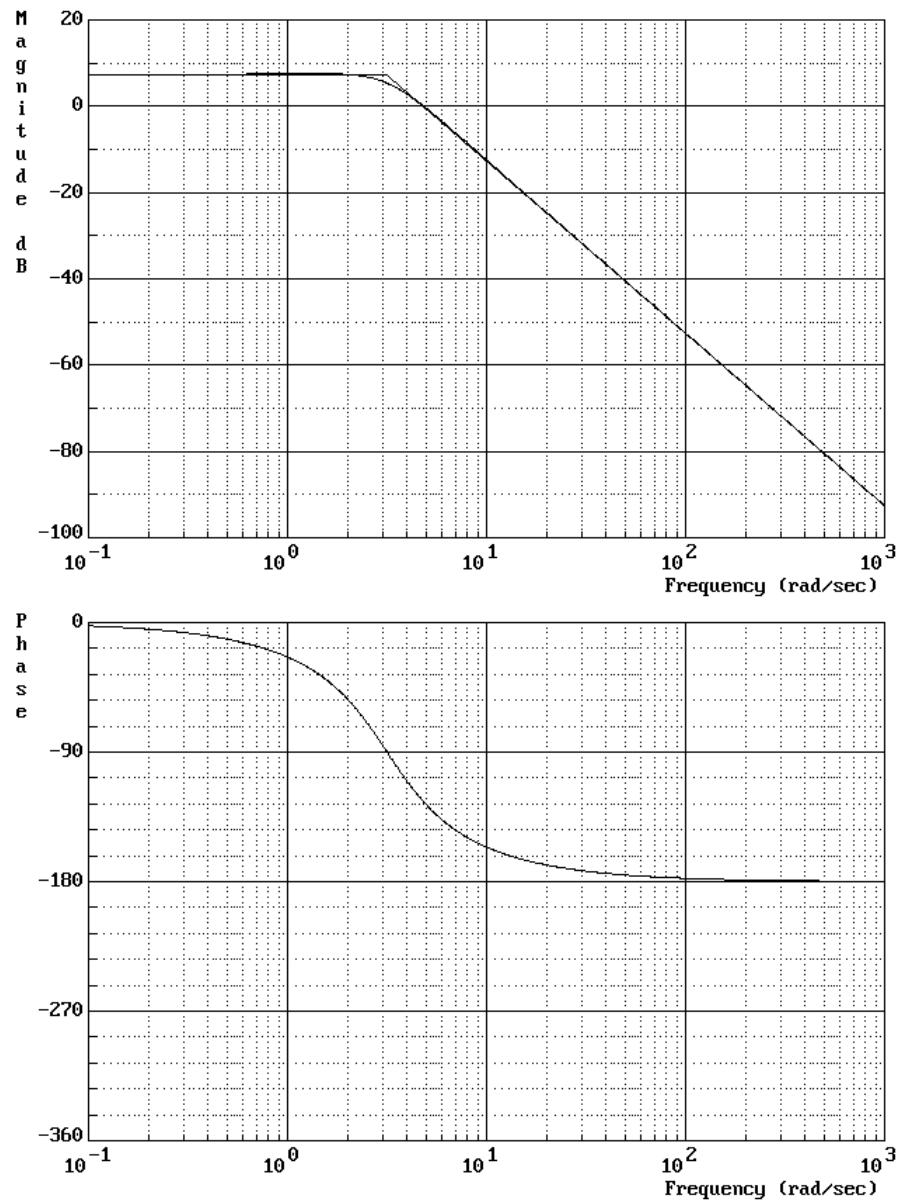
$$e_{rp} = \frac{1}{1 + k_p} = 0.3 \quad K_p = 2.34$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K \cdot \frac{10}{s^2 + 4s + 10} = K$$

$$K = 2.34$$

Se dibuja en primer lugar el diagrama de Bode para el sistema con la ganancia $K=2.34$ para cumplir las condiciones de error en régimen permanente.

$$G(s) = \frac{23.4}{s^2 + 4s + 10}$$



En este diagrama puede verse que la frecuencia de corte de ganancia es:

$$\omega_{cg} \approx 4.8 \text{ rad/s}$$

y el margen de fase:

$$MF \approx 55^\circ$$

Como se desea tener una frecuencia de corte de ganancia de 100 rad/s, introduciendo una red de avance habría dos posibilidades:

- Situar la red muy a la izquierda sin intentar mejorar el margen de fase del sistema inicial.
- Situar la red de forma que aumente la frecuencia de corte pero que también se aprovechen las ventajas del avance de fase.

En la representación del diagrama de Bode puede verse que a la frecuencia $\omega=100$ rad/s el módulo tiene un valor de -53 dB.

Para que esta frecuencia sea la ω_{cg} la red debe proporcionar los 53 dB a esa frecuencia. Por tanto, si ésta es la ganancia de la red se tiene:

$$20 \log \frac{1}{\alpha} = 53$$

$$\frac{1}{\alpha} = 10^{\frac{53}{20}}$$

$$\alpha = 0.00223$$

Se sitúa el cero antes de la ω_{cg} del sistema sin compensar. Para este caso un posible valor del cero para centrar la red en torno al nuevo valor de ω_{cg} podría ser:

$$\frac{1}{T} = 3$$

Con lo que el polo queda en:

$$\frac{1}{\alpha T} = 1345$$

Por tanto la red con ganancia unidad para bajas frecuencias quedará:

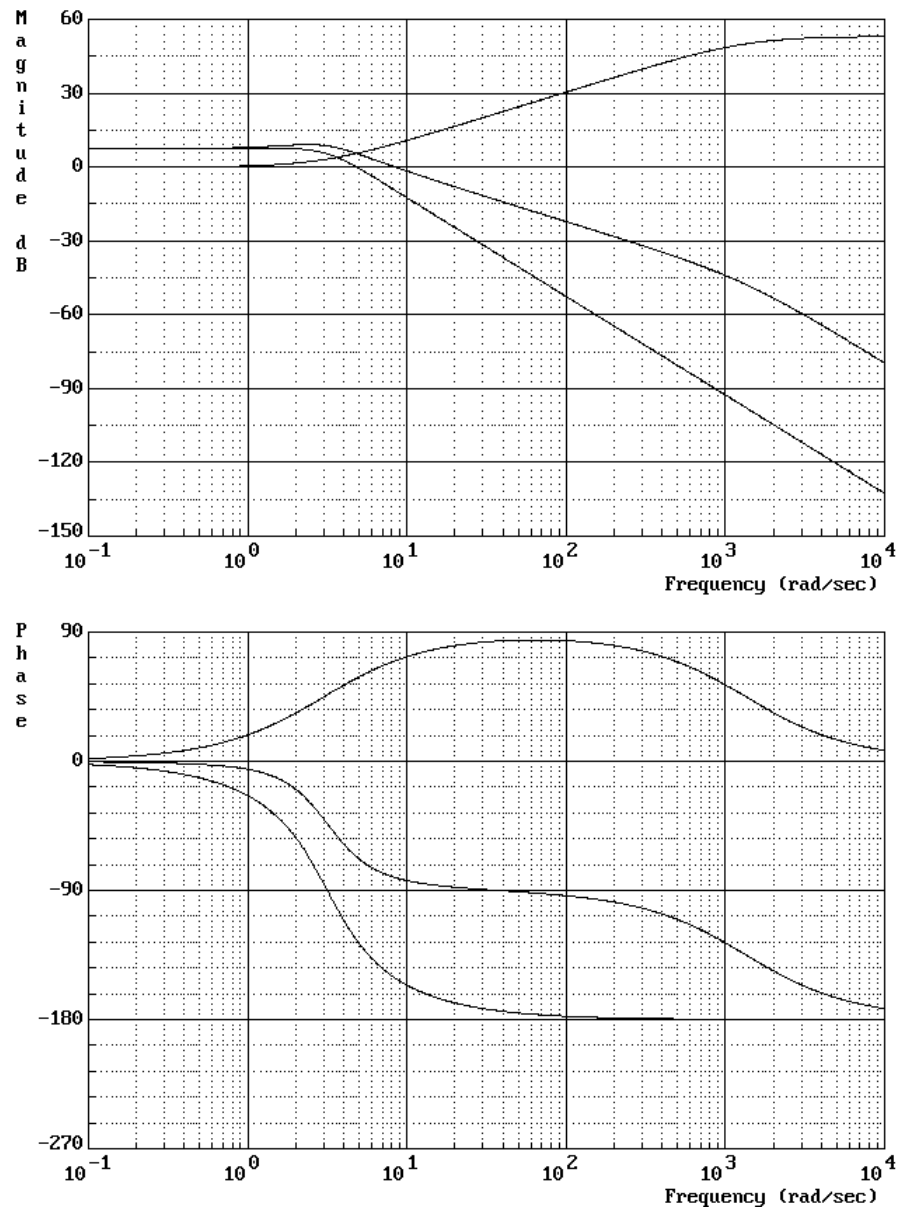
$$C(s) = 448.7 \frac{s + 3}{s + 1346}$$

Y el compensador total incluyendo la ganancia para el error de régimen permanente será:

$$C_T(s) = 2.34 \cdot 448.7 \cdot \frac{s + 3}{s + 1346}$$

Las siguientes gráficas muestran el sistema inicial compensado el error, la red empleada y el sistema con el compensador total.

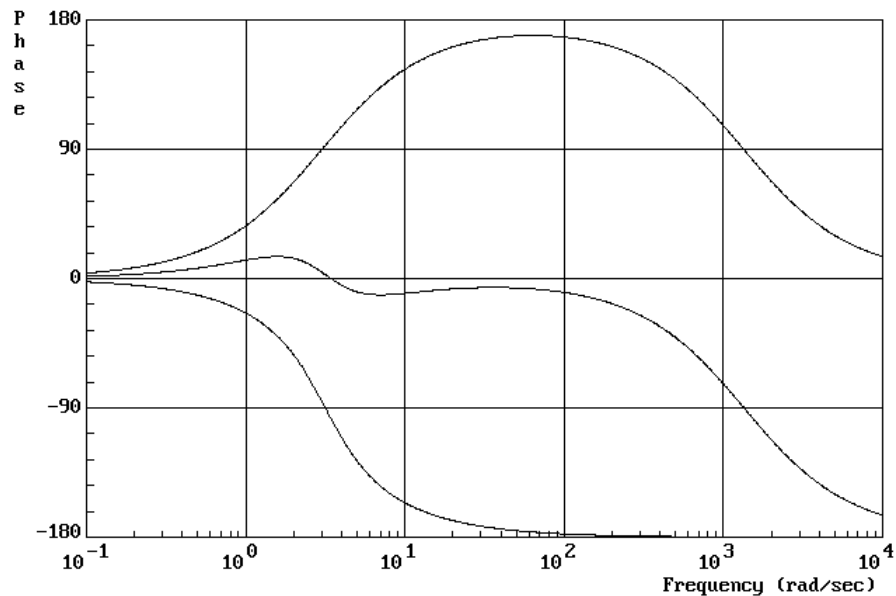
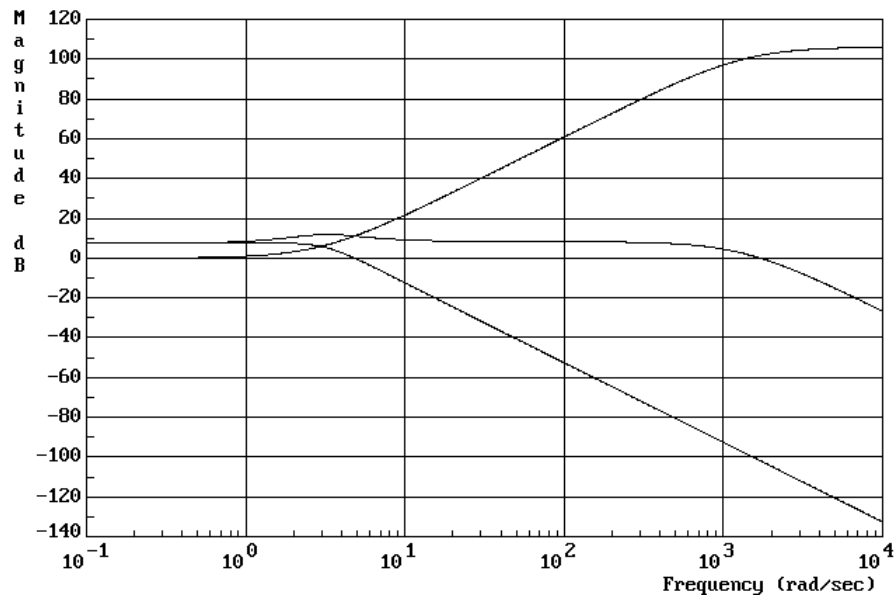
En ellas se comprueba que con una red de este tipo no es posible alcanzar las especificaciones.



Si en su lugar se utiliza un regulador formado por dos redes iguales a la anterior:

$$C_T(s) = 2.34 \cdot 448.7^2 \cdot \frac{(s + 3)^2}{(s + 1346)^2}$$

Los resultados obtenidos son los mostrados a continuación, donde puede observarse como la frecuencia ω_{cg} es aún mayor que la pedida y el margen de fase también elevado.



Se ajusta ahora el regulador anterior para realizarlo con dos redes idénticas cumpliendo las especificaciones deseadas:

Según se ha visto antes el regulador debe aportar 53 dB. Esto, si se utilizan dos redes idénticas, deberá ser aportado la mitad por cada red, por tanto:

$$26.5 = 20 \log \frac{1}{\alpha} \quad \alpha = \frac{1}{10^{\frac{26.5}{20}}} = 0.0473$$

Para este caso un posible valor del cero para centrar la red en torno al nuevo valor de ω_{cg} podría ser:

$$\frac{1}{T} = 3$$

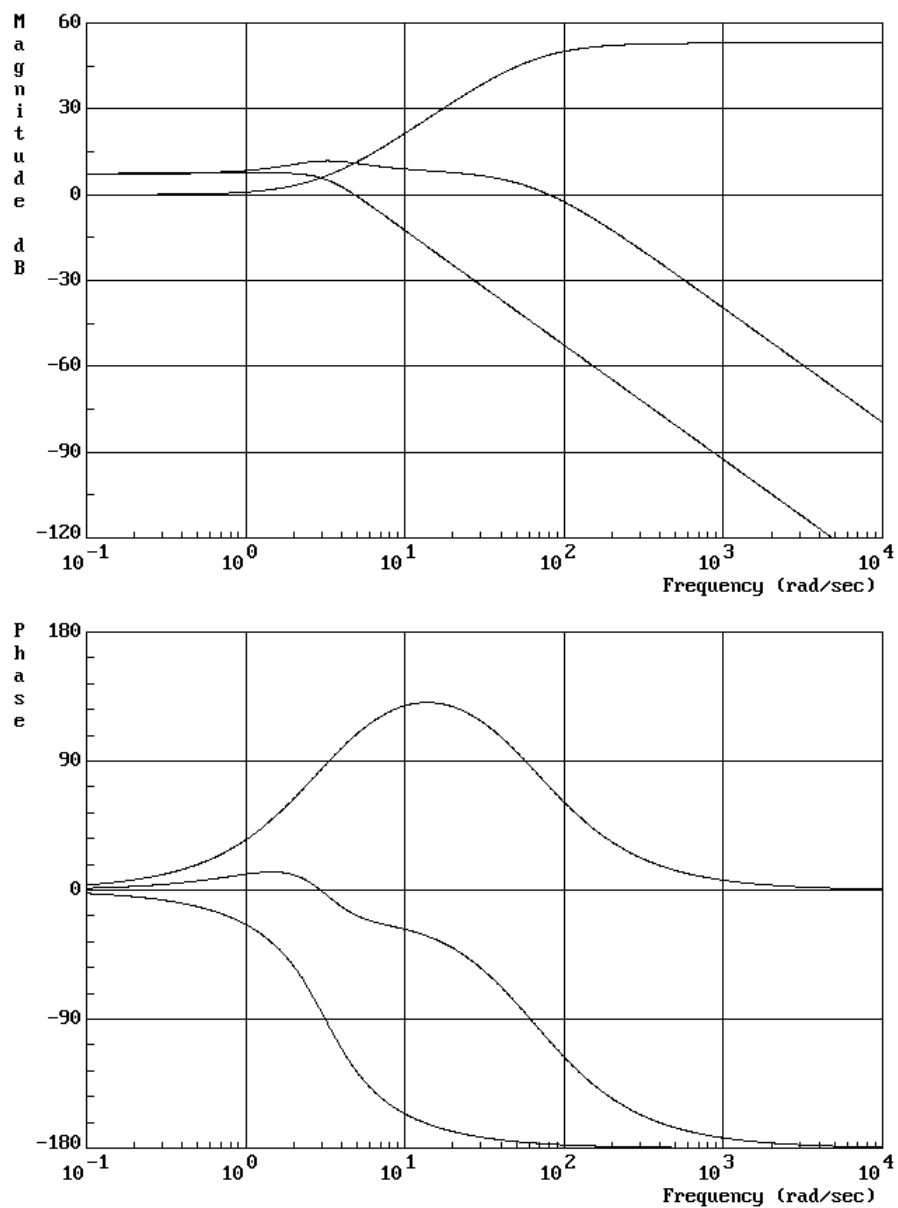
Con lo que el polo queda en:

$$\frac{1}{\alpha T} = 63.424$$

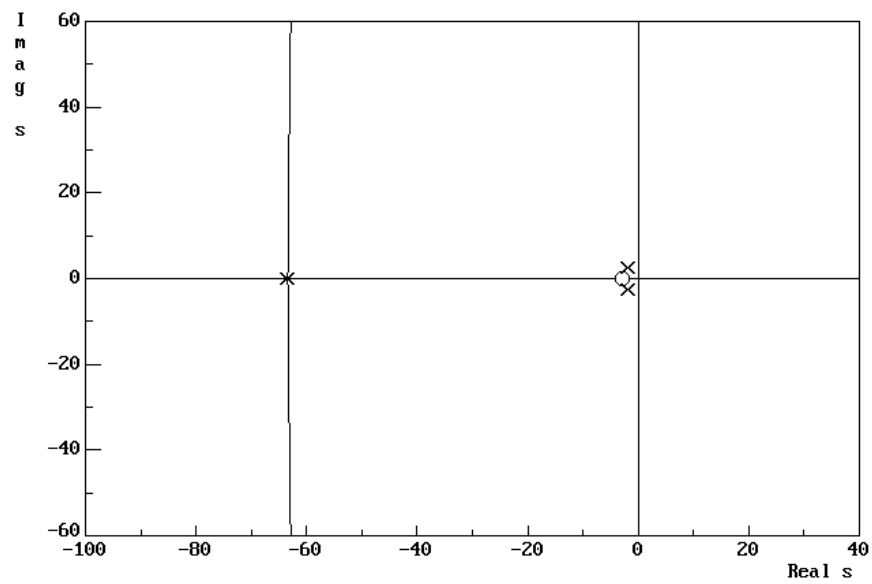
Y la red total:

$$C_T(s) = 2.34 \cdot 21.14^2 \cdot \frac{(s+3)^2}{(s+63.424)^2}$$

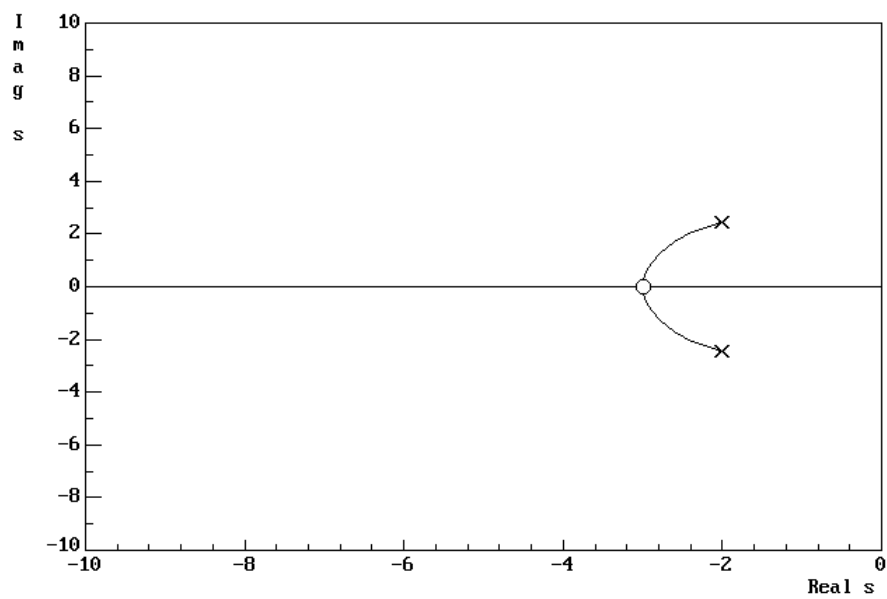
Las siguientes gráficas muestran el sistema inicial compensado el error, la red empleada y el sistema con el compensador total. En ellas se comprueba cómo ya se cumplen las especificaciones y además se ha mejorado el margen de fase.



La siguiente figura muestra la forma del lugar de las raíces con compensador:

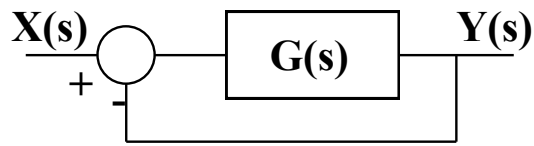


y una ampliación de la zona próxima al origen:



EJERCICIO 3.6.

Para el siguiente sistema:



$$G(s) = \frac{K}{(s+1)^3}$$

Utilizando los diagramas de Bode reales diseñar una red de retardo de fase tal que el error de posición en estado estacionario sea del 9%, y que el MF sea de 45° .

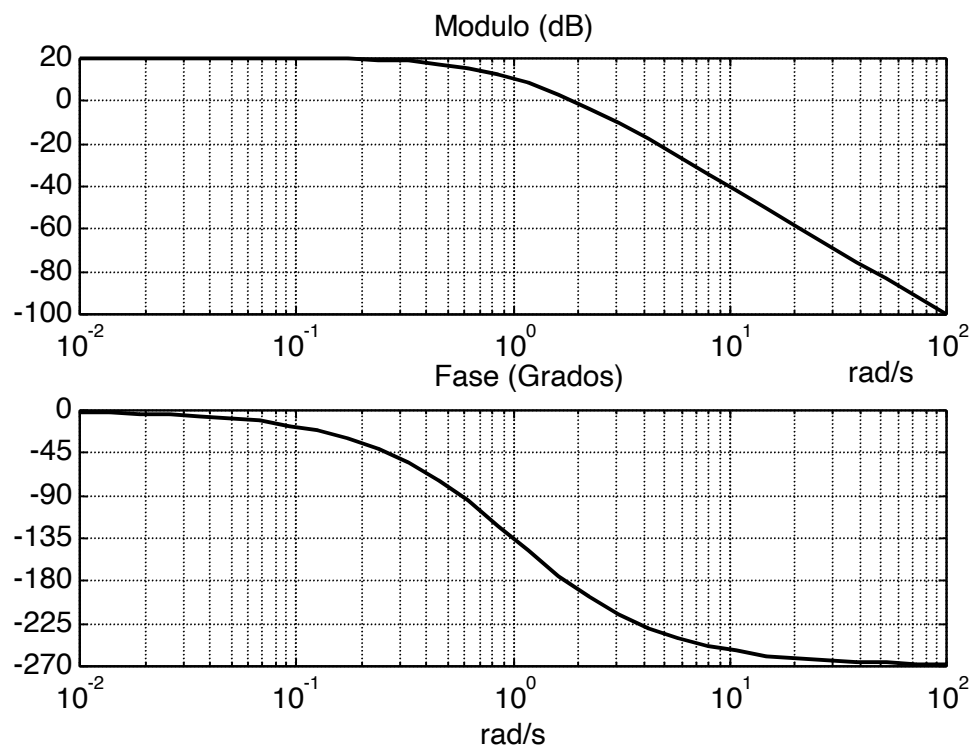
CONDICIONES:

$$e_p = \frac{1}{1+k_p} = 0.09 \rightarrow k_p = 10.11 \approx 10$$

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{(s+1)^3} = K \rightarrow K = 10$$

$$MF = 45^\circ$$

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)^3}$$



El margen de fase buscado:

$$MF = 45^\circ$$

Esto se produce a 1 rad/s (ω').

Es necesario que la red baje el Bode 20dB:

$$20 = 20 \log \beta \rightarrow \beta = 10$$

El cero una década por debajo de ω_a :

$$\frac{1}{T} = 0.1 \rightarrow T = 10$$

el polo:

$$\frac{1}{\beta T} = 0.01$$

Entonces, la red de retardo queda:

$$D(s) = \frac{1}{10} \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$

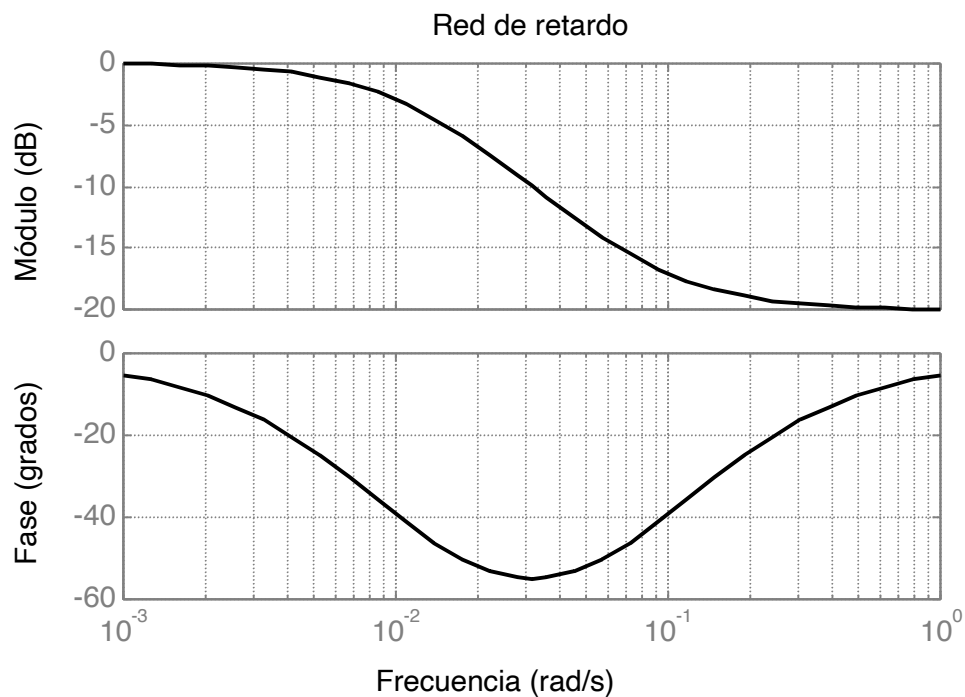
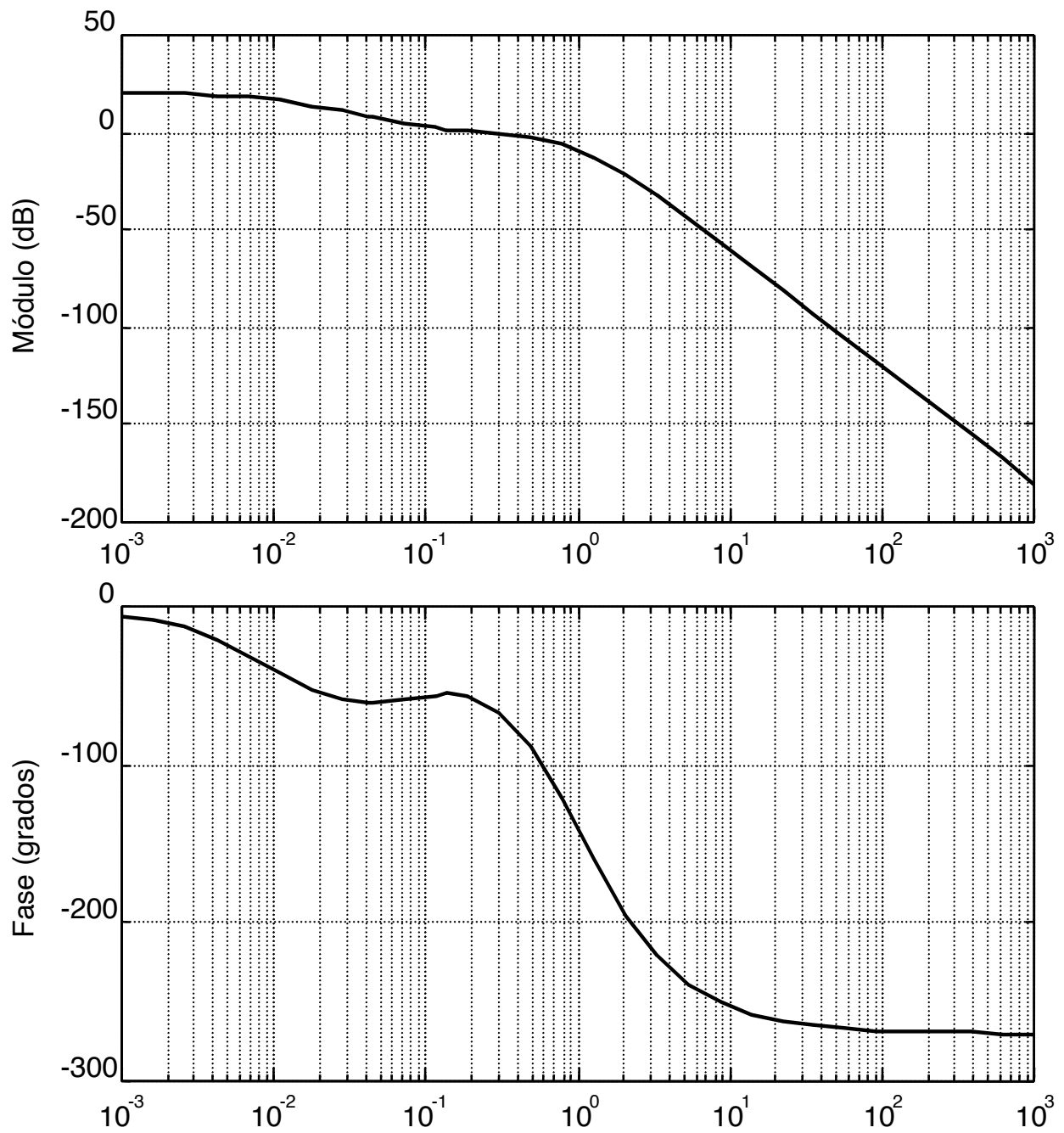
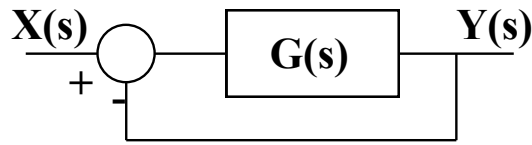


Diagrama de Bode del sistema compensado.



EJERCICIO 3.7.

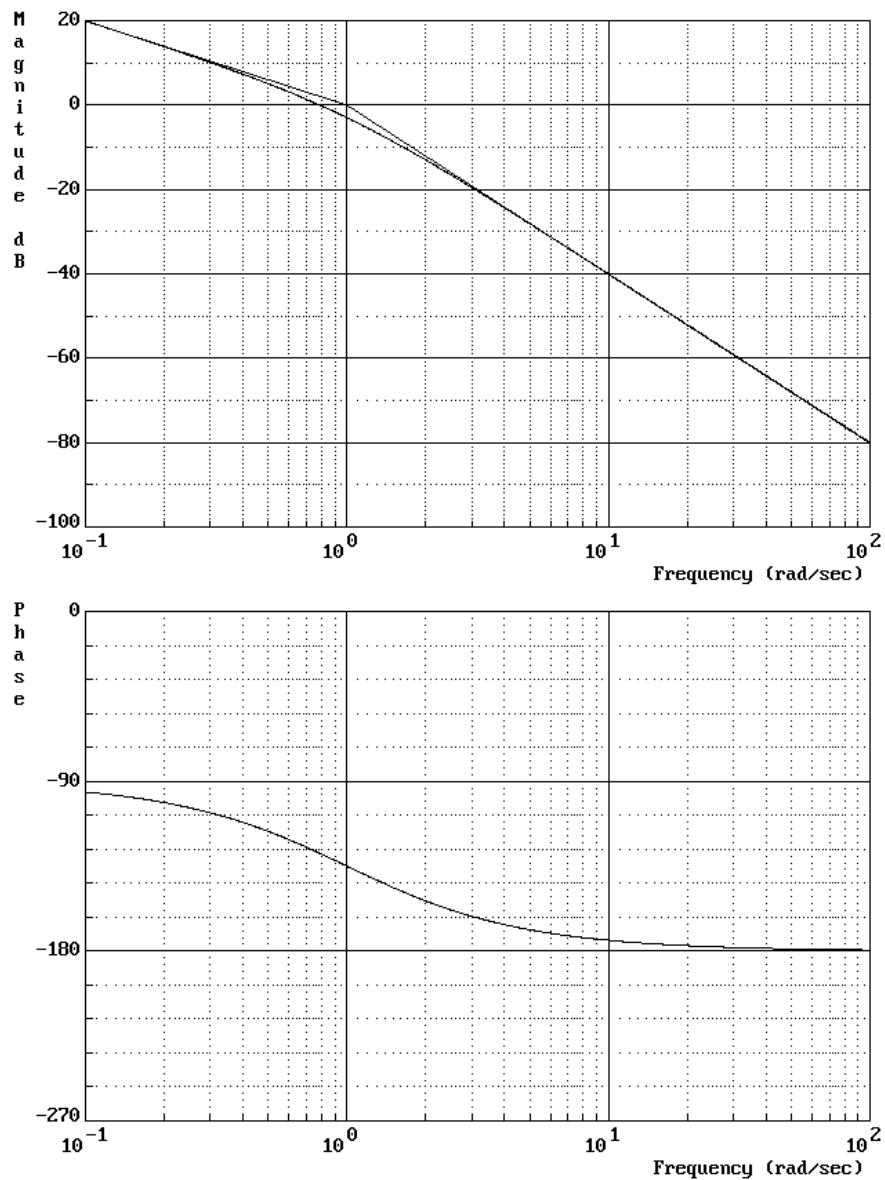
Para el siguiente sistema:



$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

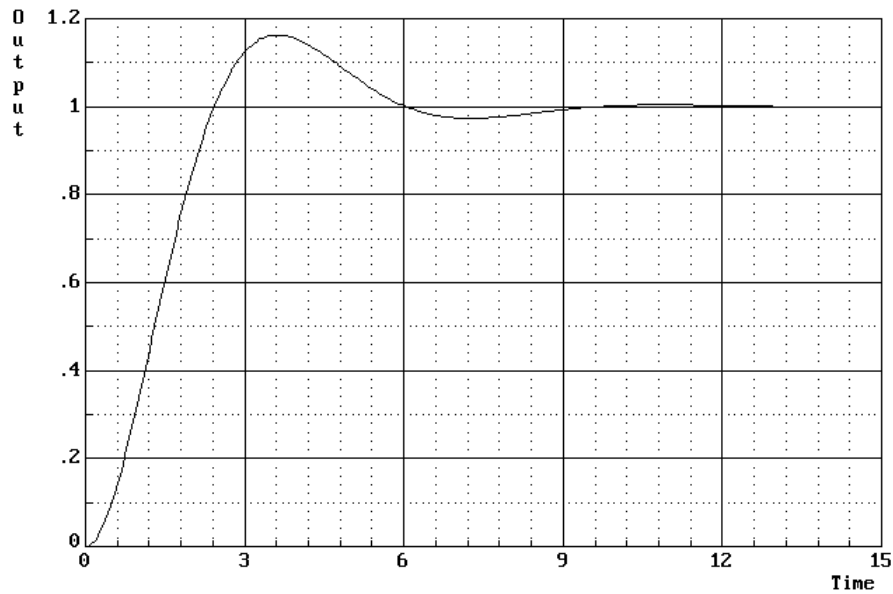
Utilizando los diagramas de Bode reales diseñar una red de retardo de fase tal que el error de velocidad en estado estacionario sea del 10%, y que el sobreimpulso sea del 25%.

Respuesta en frecuencia en lazo abierto de $G(s)$:



Para el sistema inicial sin compensador, sólo $G(s)$, la respuesta en lazo cerrado ante un

escalón unitario se muestra en la figura, donde puede comprobarse que no cumple las especificaciones pedidas.



La condición pedida para el error de velocidad en estado estacionario es:

$$e_v = \frac{1}{k_v} = 0.1 \rightarrow k_v = 10$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+1)} = K \rightarrow K = 10$$

Luego es necesario inicialmente incluir una ganancia de valor 10 para ajustar dicho error de régimen permanente.

Con la condición de máximo sobreimpulso, se obtiene el valor de δ .

$$M_p = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.25$$

$$\delta = 0.45$$

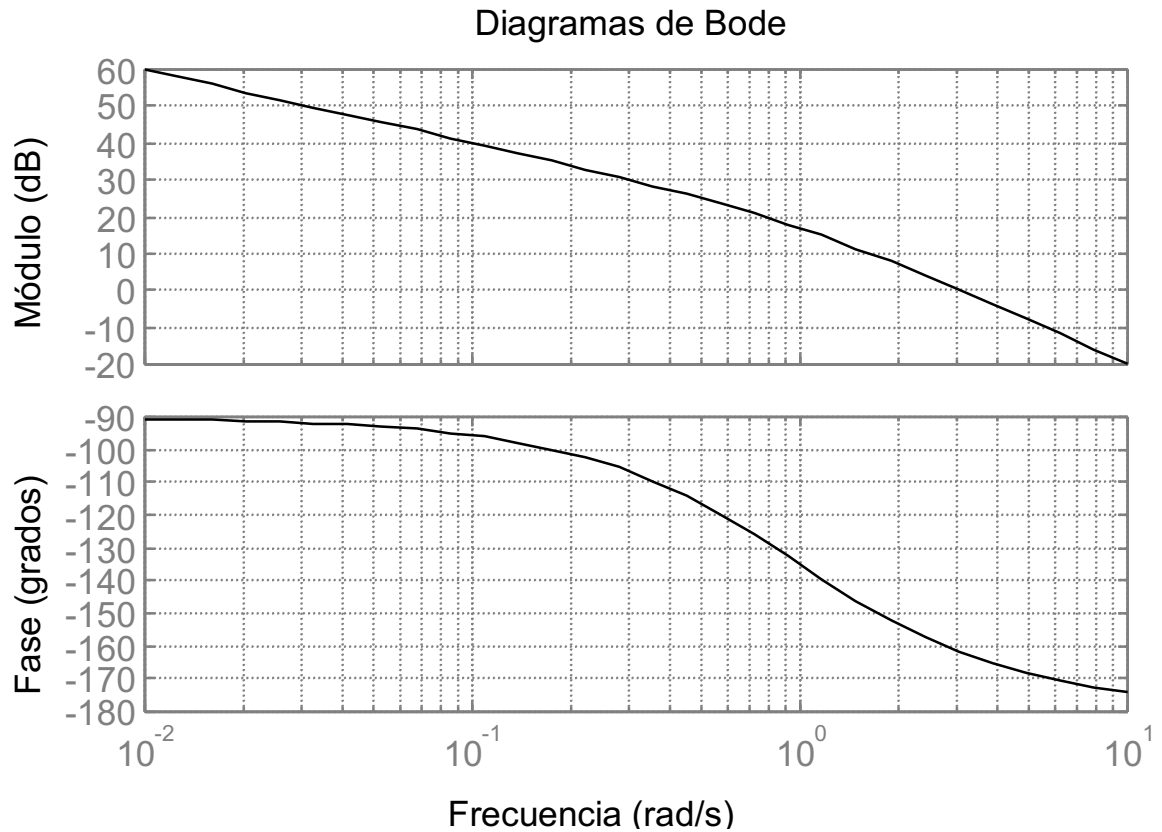
Para valores de δ pequeños se tiene la relación:

$$MF \approx 100 \cdot \delta = 45^\circ$$

Luego en principio añadiendo una ganancia de valor 10 para ajustar el error de régimen permanente, se tiene una función de transferencia:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Se representan nuevamente los diagramas de Bode del sistema incluyendo la ganancia $K=10$, y ahora en este diagrama se comprueba el margen de fase existente.



Se calcula el margen de fase que tiene el sistema inicialmente:

$$MF = 180 + \angle G(w_a)$$

La frecuencia crítica de ganancia ω_{cg} corresponde con aquella en la que el sistema presenta ganancia 1.

$$\left| \frac{10}{jw_a(jw_a + 1)} \right| = 1$$

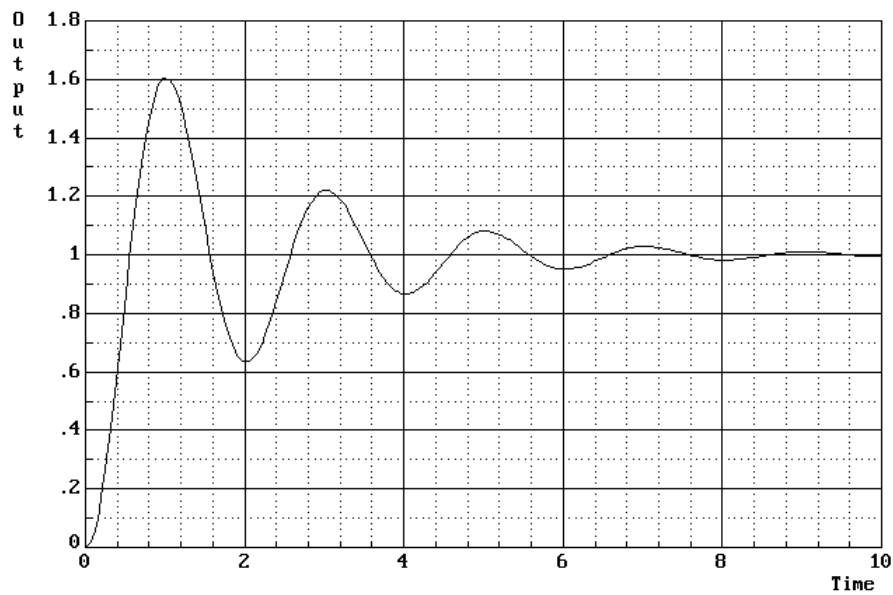
$$\frac{10}{\sqrt{w_a^4 + w_a^2}} = 1$$

$$w_a = 3 \text{ rad/s}$$

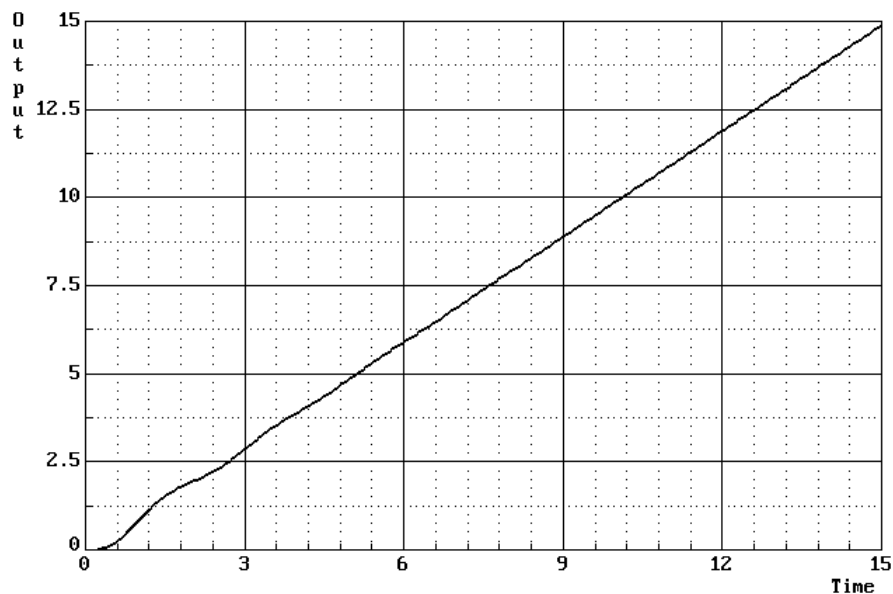
$$MF = 180 + [-90 - \arctg(3/1)] \approx 20^\circ$$

La respuesta en lazo cerrado ante un escalón unitario una vez corregido el error se muestra

en la figura, donde puede comprobarse que no cumple las especificaciones pedidas.



En la respuesta del sistema ante una rampa puede comprobarse como ya se cumple el error de régimen permanente.



El margen de fase buscado:

$$\Phi_m = 45 + 5 = 50^\circ$$

Esto se produce a 0.83 rad/sg (w').

A esa frecuencia el modulo tiene un valor de 20dB. Por tanto, esa debe ser la atenuación que debe producir la red de retardo.

Es necesario que la red baje el Bode 20dB:

$$20 = 20 \log \beta \rightarrow \beta = 10$$

Situando el cero una década por debajo de ω_a :

$$\frac{1}{T} = 0.083 \rightarrow T = 12.04$$

y el polo:

$$\frac{1}{\beta T} = 0.0083 \rightarrow T = 12.04$$

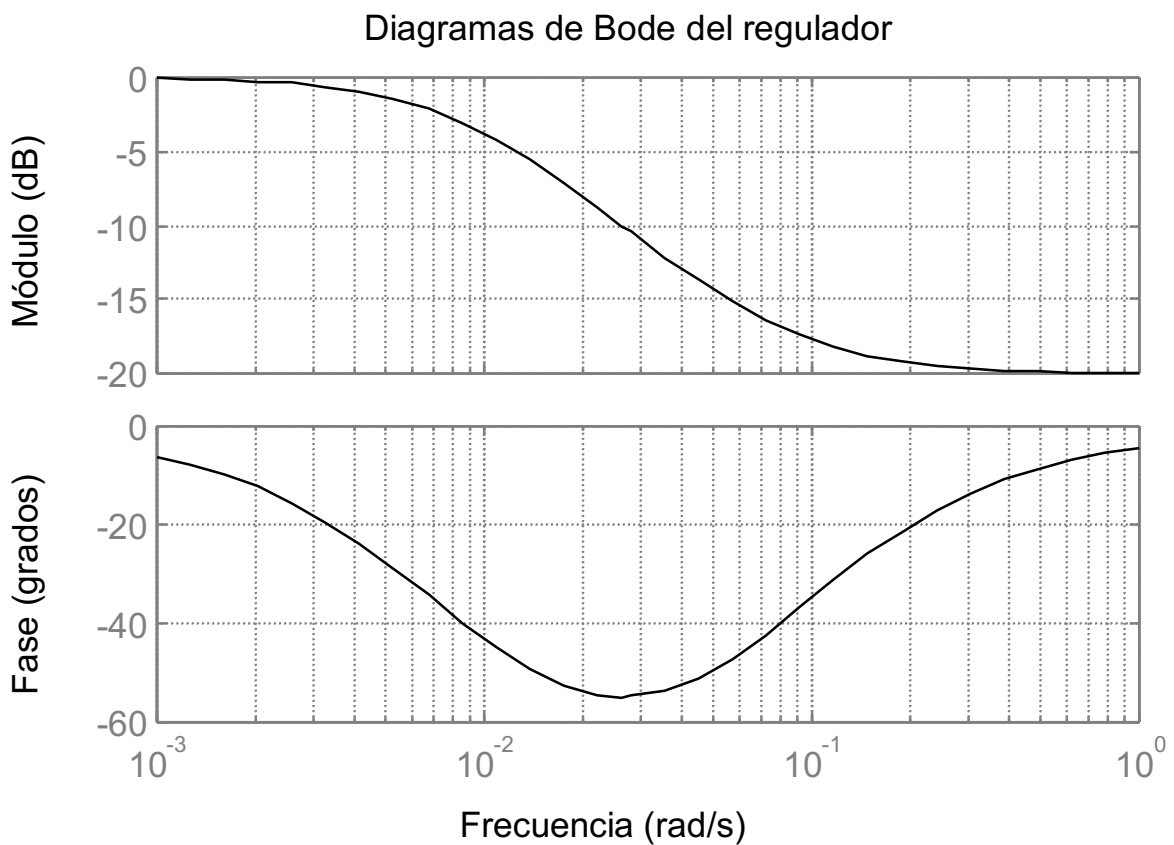
Entonces, la red de retardo queda:

$$D(s) = \frac{1}{10} \frac{s + 0.083}{s + 0.0083}$$

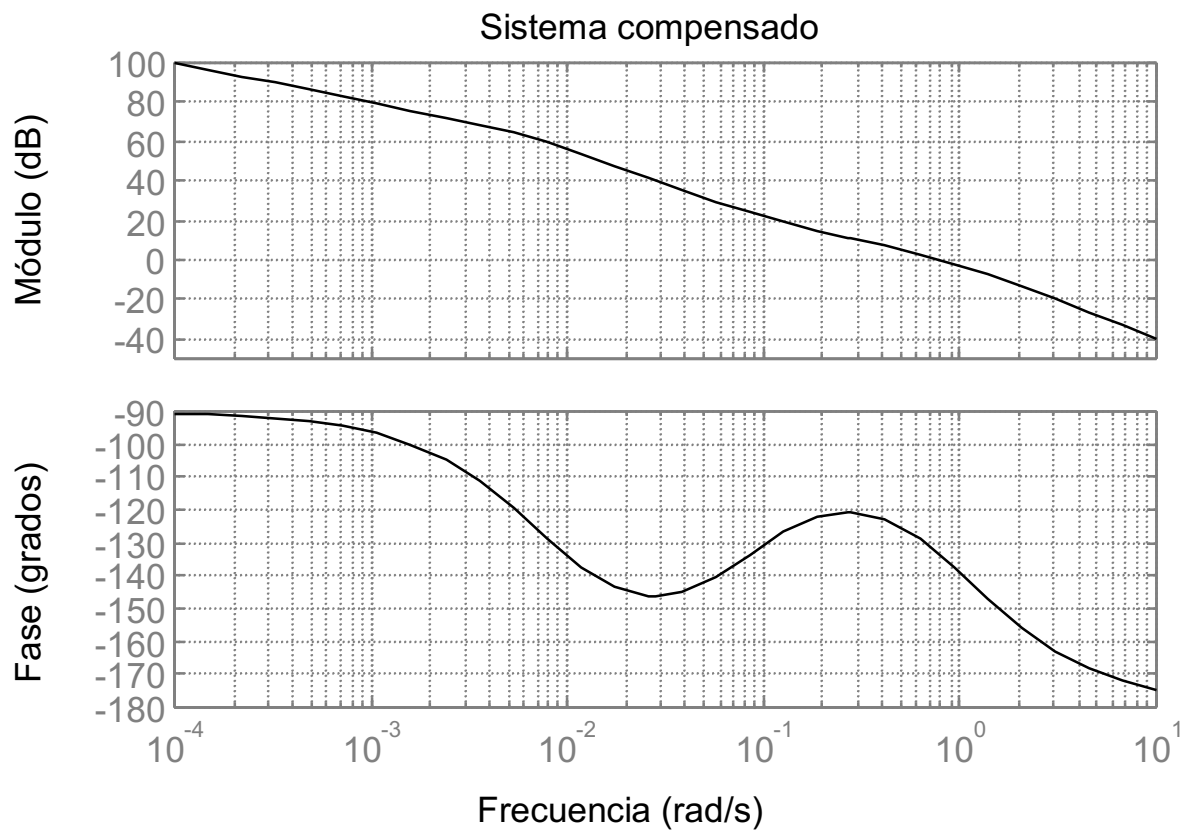
Y el regulador total:

$$D(s) = 10 \frac{1}{10} \frac{s + 0.083}{s + 0.0083}$$

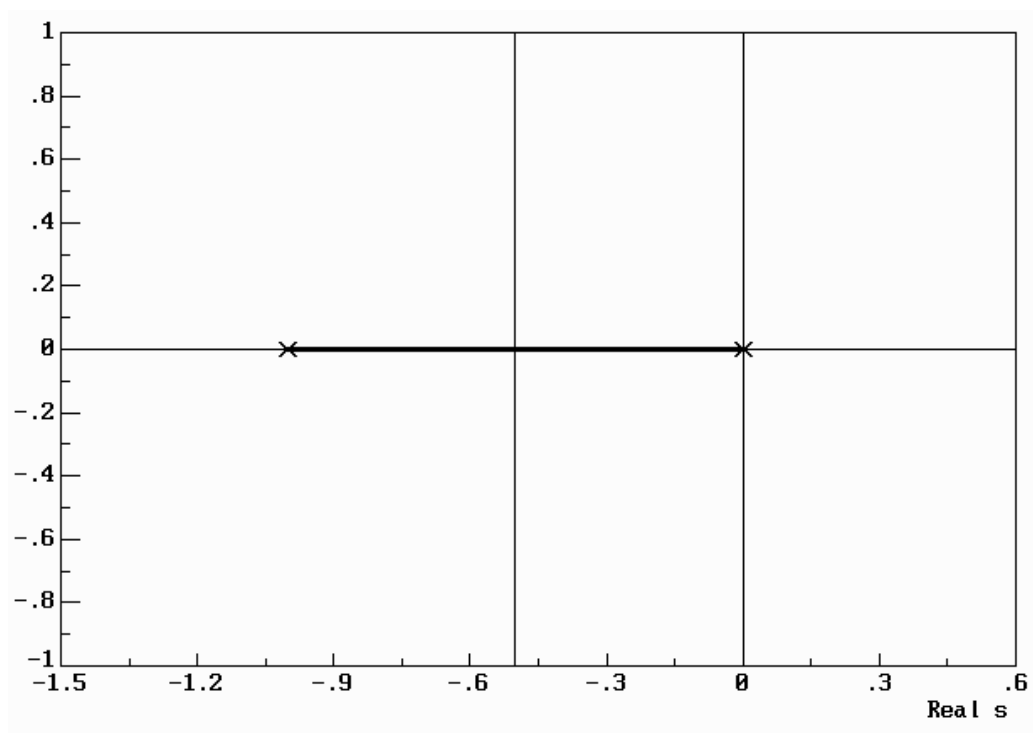
La figura muestra los diagramas de Bode de la red.

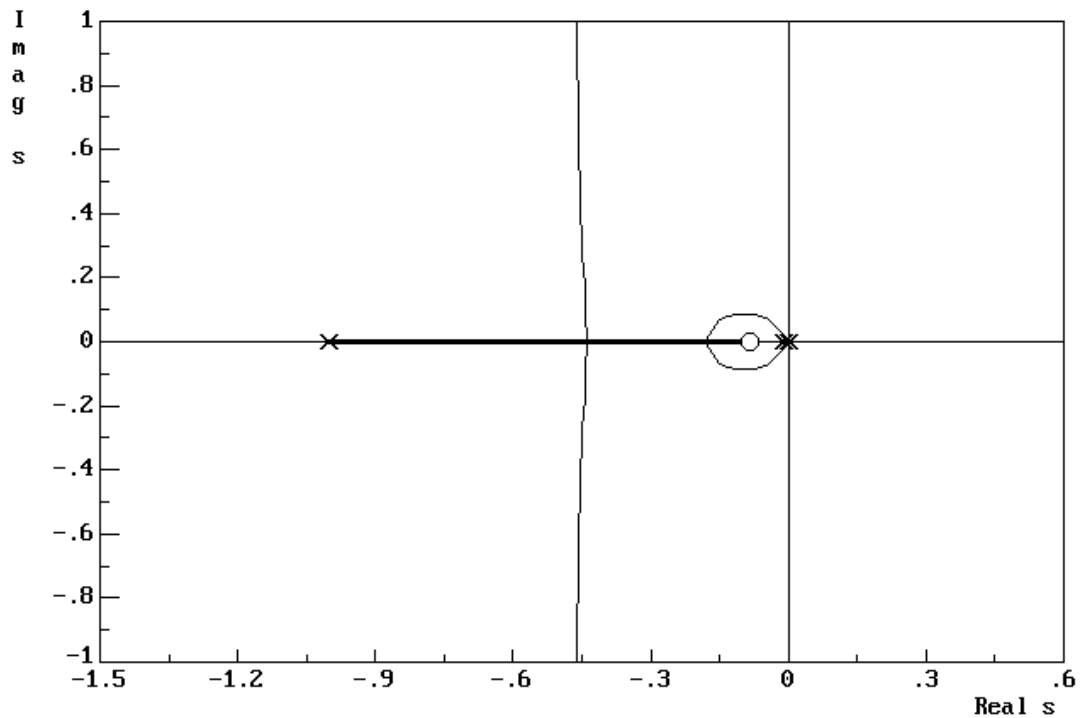


La figura muestra los diagramas de Bode del sistema totalmente compensado.

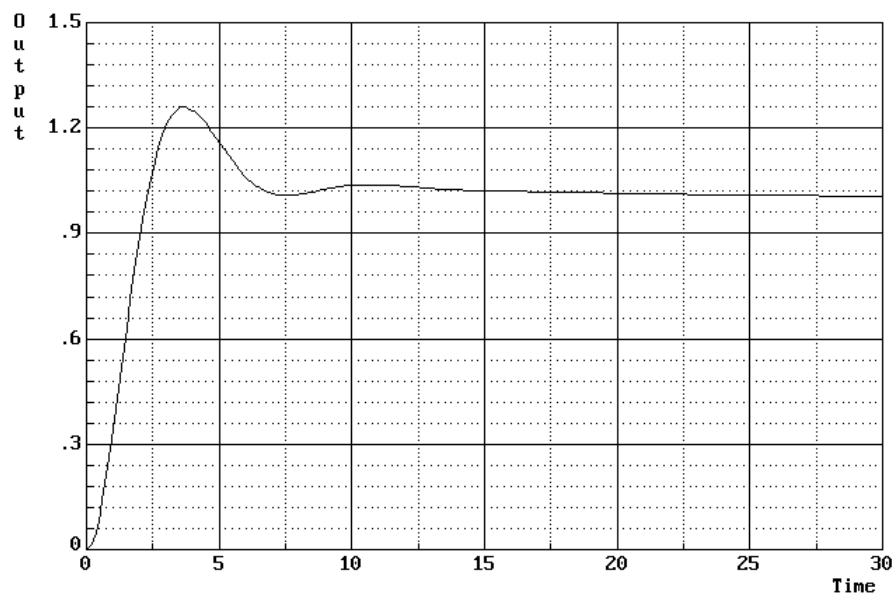


Comparando las dos figuras siguientes, que muestran respectivamente el lugar de las raíces del sistema inicial, y el lugar de las raíces al añadir el regulador, puede verse cómo el regulador deforma el lugar de las raíces inicial para cumplir las especificaciones.

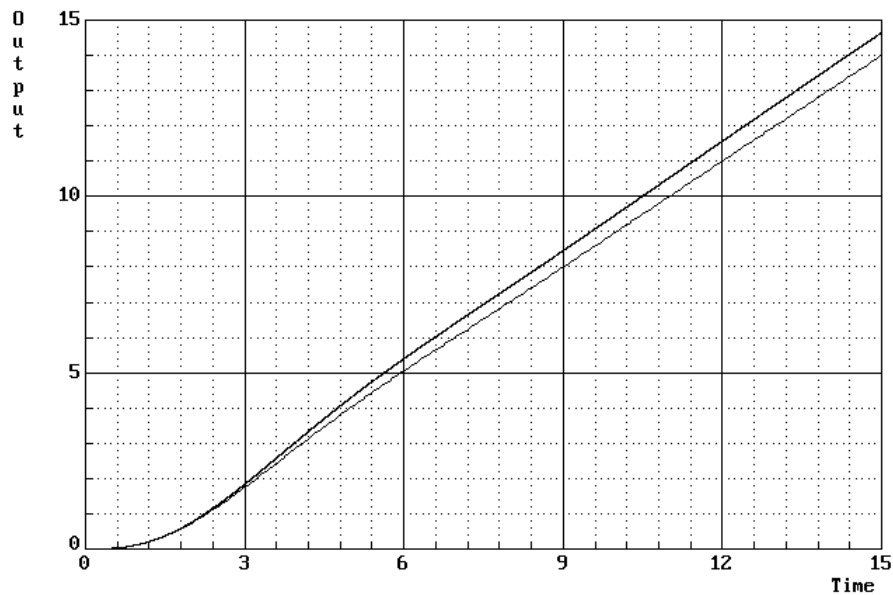




Y la siguiente muestra la respuesta temporal del sistema compensado ante una entrada escalón unidad, donde se puede ver cómo ya cumple las especificaciones de máximo sobreimpulso pedidas.

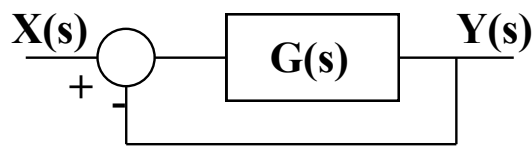


Introduciendo una entrada rampa unitaria se puede comprobar gráficamente las especificaciones de error de velocidad del sistema compensado. La siguiente figura muestra una comparativa entre la respuesta ante una entrada rampa unidad del sistema sin compensar y el sistema compensado.



EJERCICIO 3.8.

Para el siguiente sistema:



$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Diseñar una red de retardo de fase tal que el error de velocidad en estado estacionario sea del 10%, sin modificar la frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg} y el margen de fase.

Para el sistema inicial sin compensador, sólo $G(s)$, la respuesta en lazo cerrado ante un escalón unitario se muestra en el ejercicio 3.7., donde puede comprobarse que no cumple las especificaciones pedidas.

El sistema inicial es el mismo que el utilizado en el ejercicio 3.7. y se pide el mismo error en estado estacionario, luego la ganancia necesaria en estado estacionario será la obtenida en el ejercicio 3.7.

$$K = 10$$

Esto es lo que debe aportar ahora la red para bajas frecuencias.

Fijando el cero del regulador en 0.01 se busca ahora la separación del polo para que caiga:

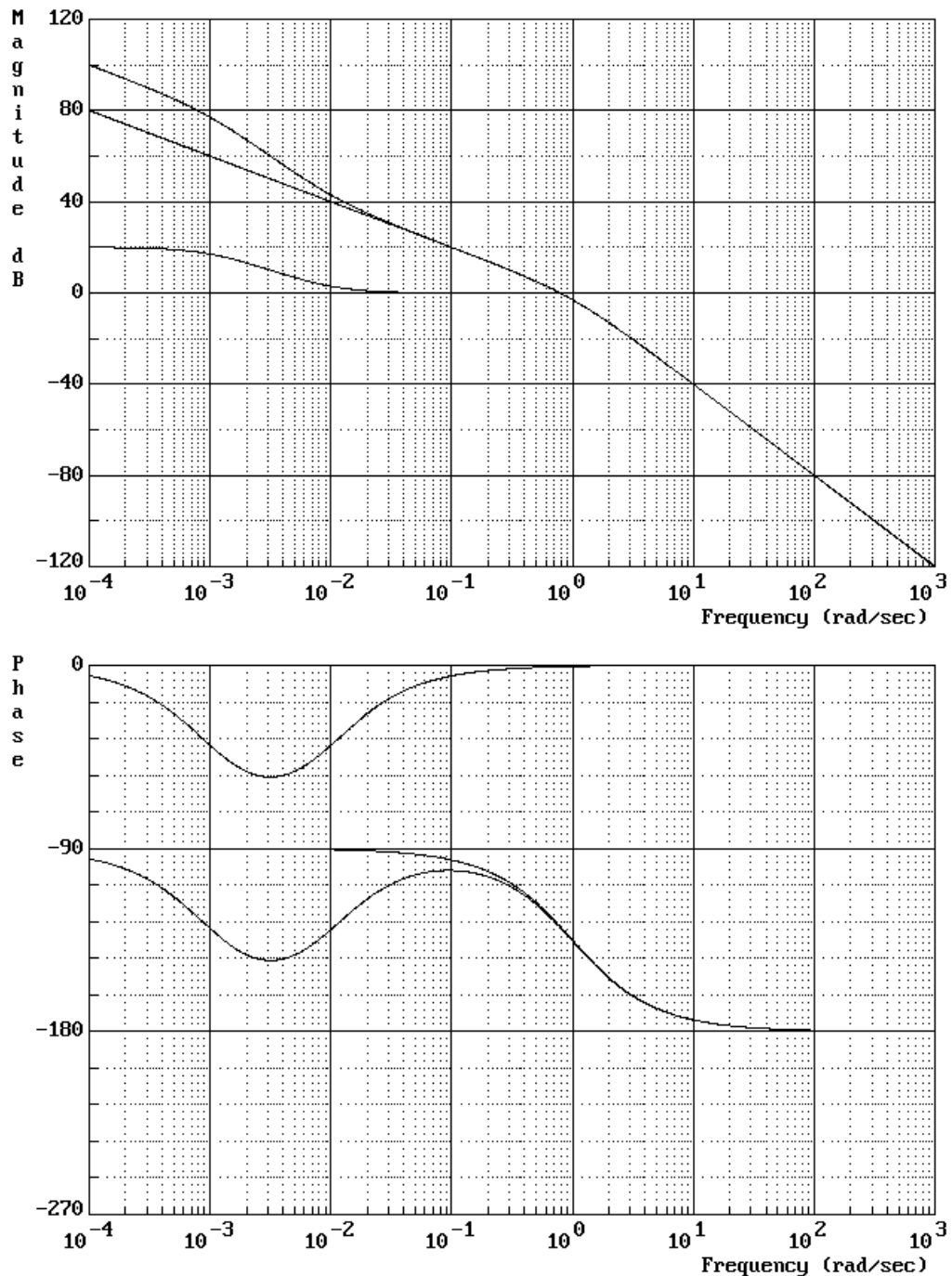
$$20 \log 10 = 20 \text{ dB}$$

Como el módulo de la red cae 20 dB/década, se coloca el polo una década antes.

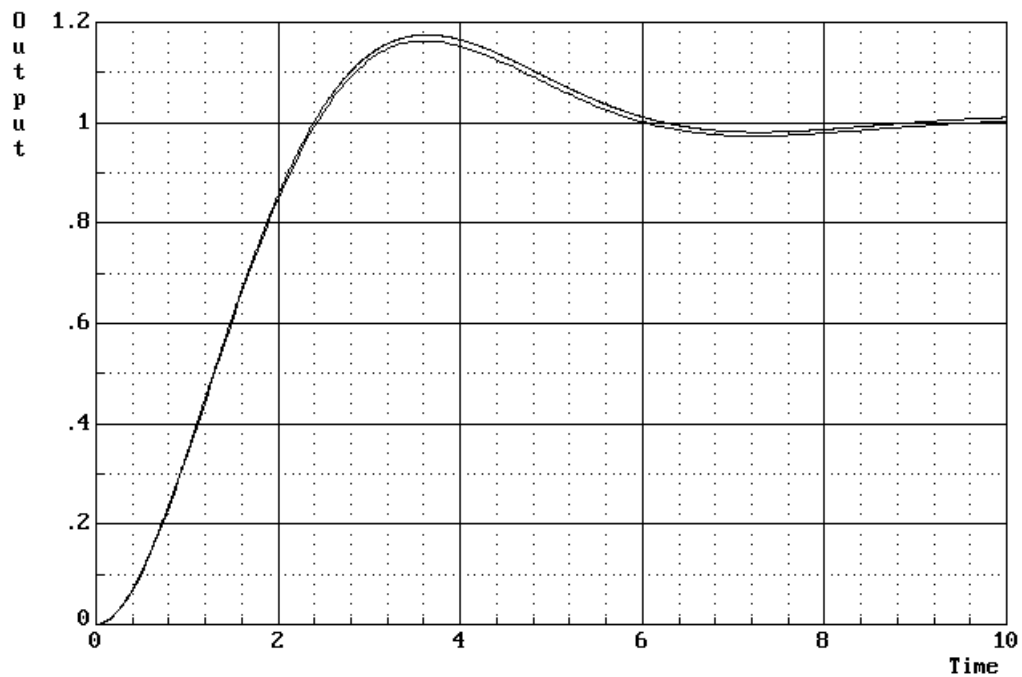
Por tanto el regulador será:

$$C(s) = 10 \cdot \frac{1}{10s + 0.001} \cdot \frac{s + 0.01}{s + 0.001}$$

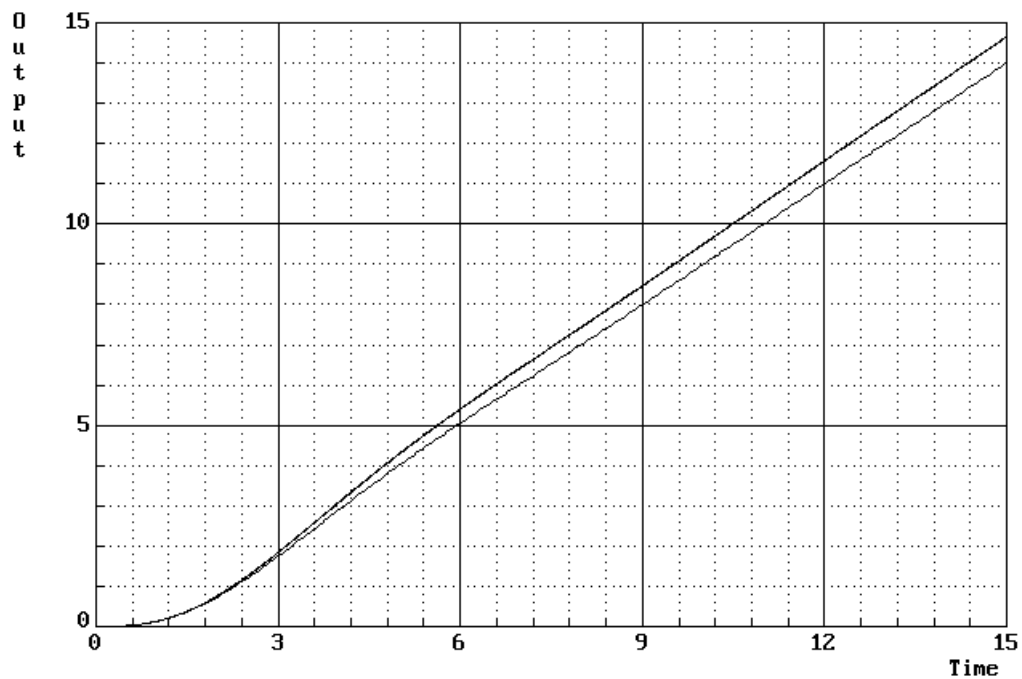
La siguiente figura representa la respuesta frecuencial en lazo abierto de $G(s)$, red, y $red \cdot G(s)$.



La siguiente figura muestra una comparación de respuesta temporal en lazo cerrado del sistema sin compensador y con compensador ante una entrada escalón unidad, donde se puede ver que apenas ha sufrido variación el régimen transitorio al introducir la red.

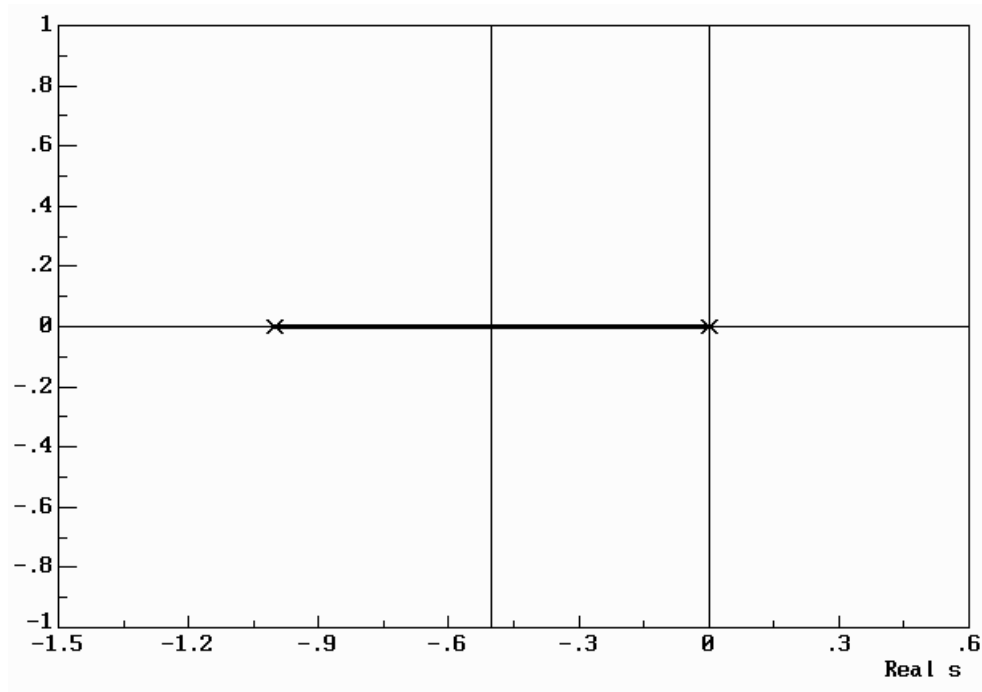


En cambio, si se compara la respuesta temporal en lazo cerrado del sistema sin compensador y con compensador ante una entrada rampa unidad, puede observarse que cómo se ha corregido el error.

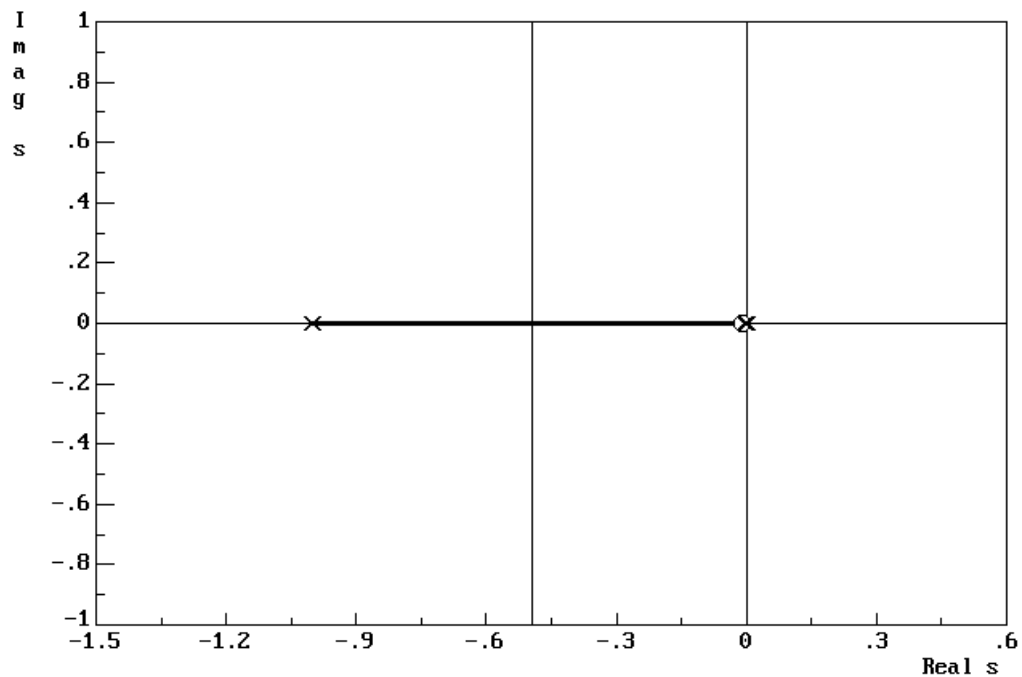


Esto también puede verse, en las modificaciones que ha sufrido el lugar de las raíces al introducir el regulador. Como puede verse comparando los dos siguientes gráficos, el añadir el regulador apenas modifica el lugar de las raíces.

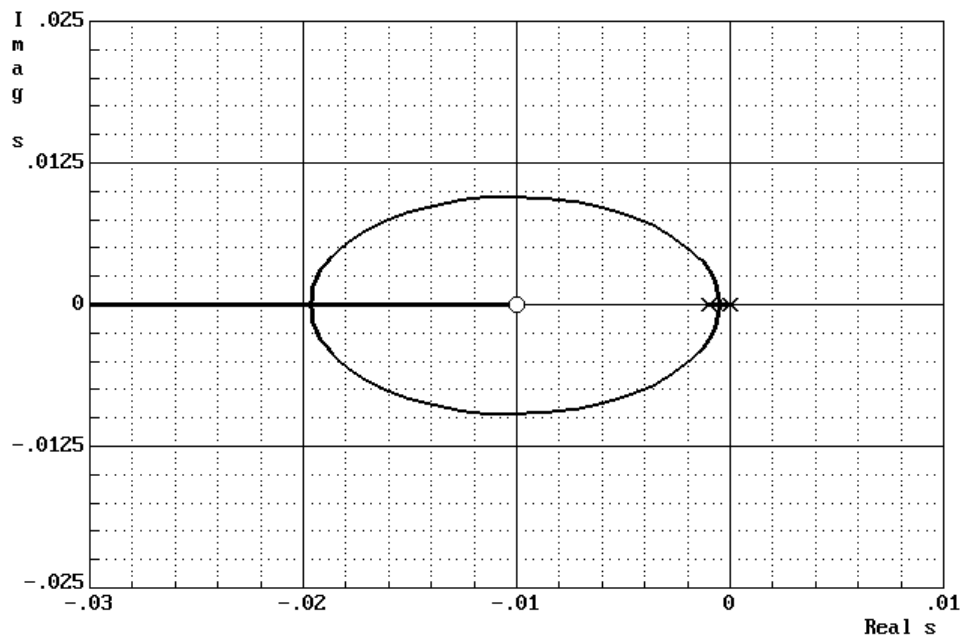
Lugar de las raíces del sistema sin compensar.



Lugar de las raíces del sistema compensado.

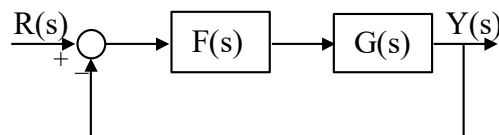


En la siguiente figura se muestra una ampliación de la zona donde afecta el regulador.



EJERCICIO 3.9.

Para el sistema mostrado en la figura:



donde:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

Utilizando diagramas de Bode asintóticos, diseñar una red de retardo de fase $F(s)$ de forma que:

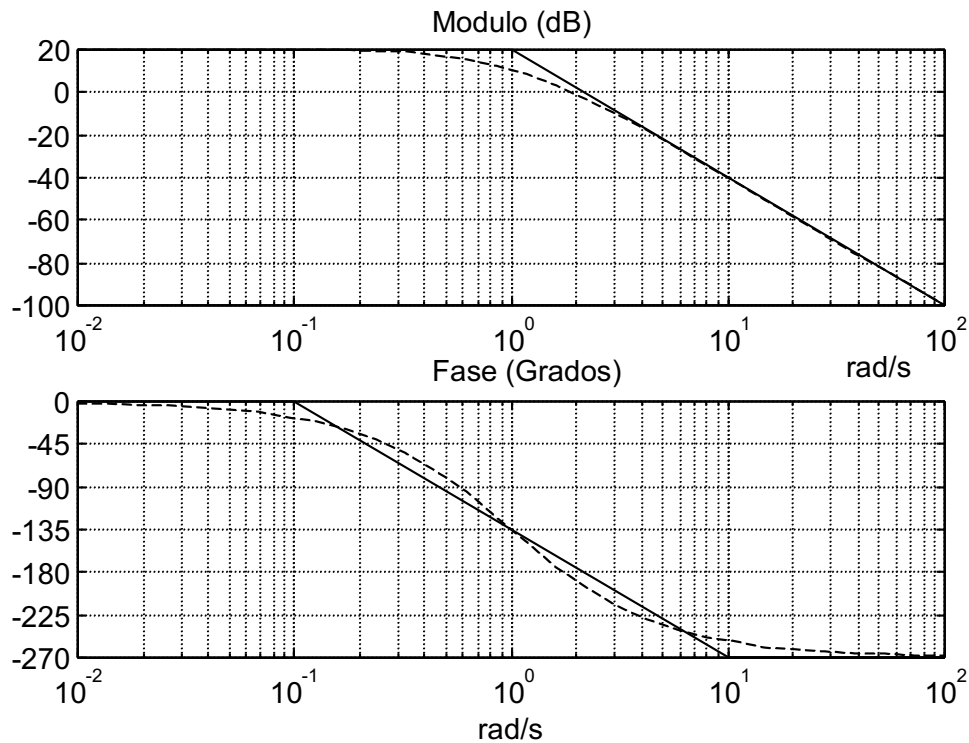
- el error de posición sea aproximadamente del 9%
- el margen de fase sea mayor o igual a 38° (7° de coeficiente de seguridad).

Para la condición de error de régimen permanente se tiene:

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = 0.09 \quad K_p = 10.11 \approx 10$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{(s+1)^3} = k \quad \boxed{k = 10}$$

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)^3}$$



El margen de fase pedido será: $38^\circ + 7^\circ = 45^\circ$. Vemos en Bode asintótico a la frecuencia a la que se tienen los 45° pedidos es $\omega = 1$ rad/s.

A esa frecuencia se tiene que conseguir que el módulo corte a los 0dB. Para el diagrama de Bode inicial se tiene que para esa frecuencia el módulo es de 20 dB. Entonces mediante la red de retardo se debe reducir esa amplitud hasta 0dB.

$$20 \log a = -20 \text{ dB} \quad a=10$$

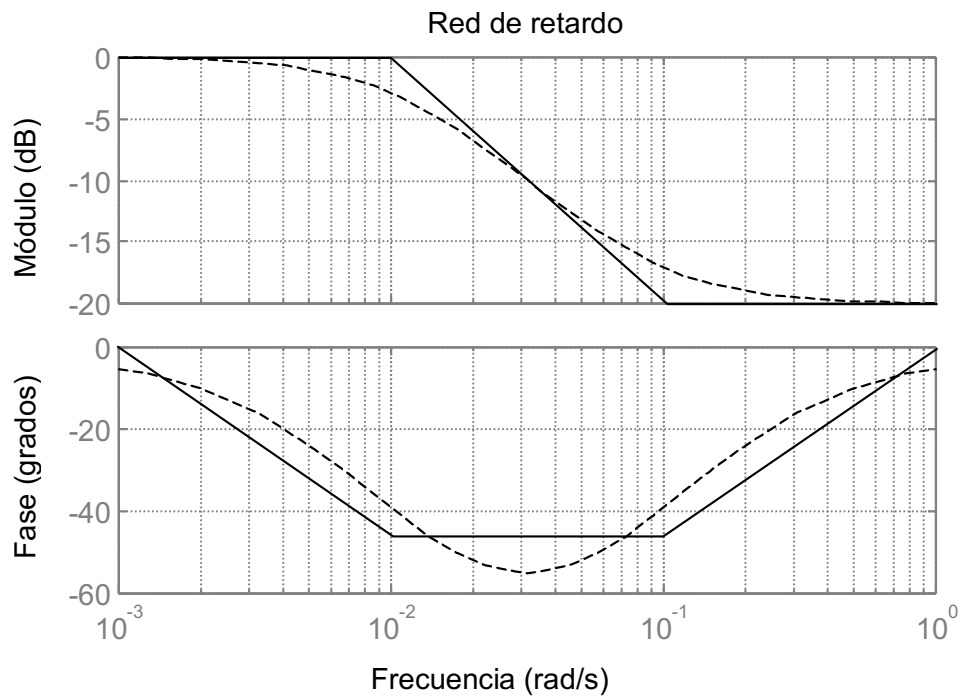
El cero debe estar una década por debajo de la frecuencia de corte de ganancia o frecuencia de amplitud crítica:

$$\frac{1}{T} = 0.1$$

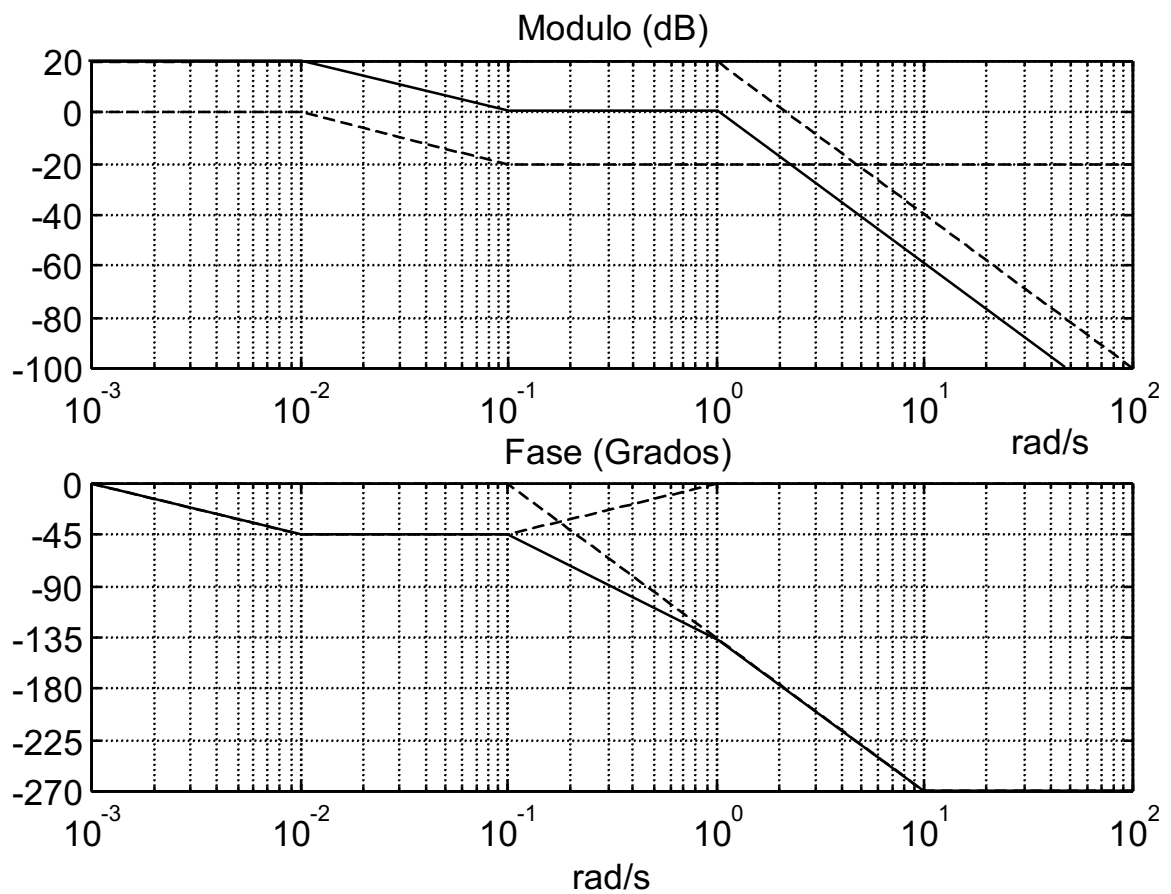
$$\frac{1}{aT} = 0.01$$

La red quedará:

$$F(s) = \frac{1+10s}{1+100s}$$

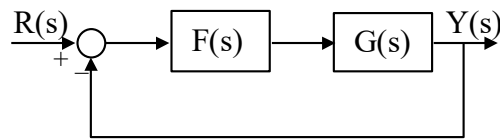


Sistema compensado:



EJERCICIO 3.10.

Para el sistema mostrado en la figura:



donde:

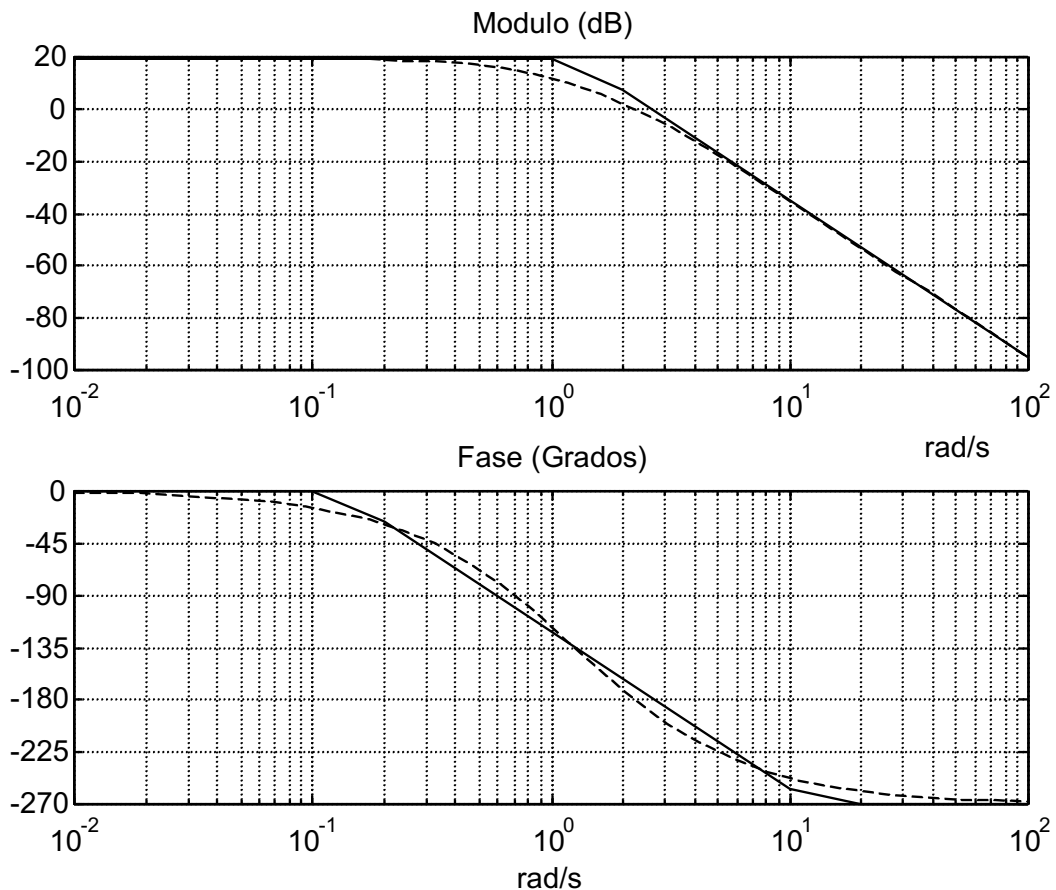
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$$

Utilizando diagramas de Bode asintótico, diseñar un compensador por avance de fase $F(s)$ tal que el error de posición en estado estacionario sea 0.1 y el margen de fase sea mayor o igual a 30° .

Este ejercicio es el mismo que el ejercicio 3.2 pero resuelto con diagramas de Bode asintóticos. Para la condición de error de régimen permanente se tiene:

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = 0.1 \quad K_p = 9 \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{k}{2} = 9 \quad \boxed{k = 18}$$

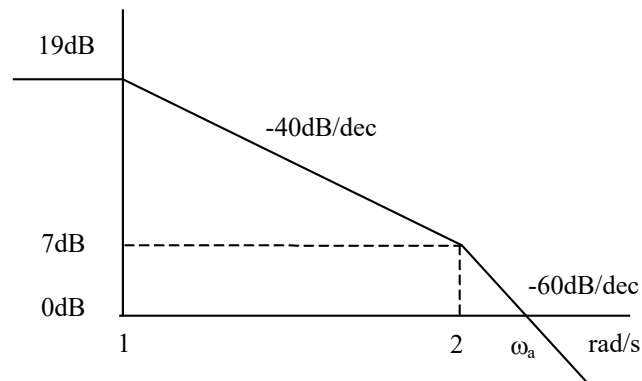
$$G(s) = \frac{18}{(s+1)^2(s+2)}$$



Se calcula en primer lugar el margen de fase inicial que posee el sistema:

$$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_{cg})$$

Para ello se ha de calcular la frecuencia crítica de ganancia ω_a :



De forma asintótica:

$$40 \text{ dB} \frac{\log 10}{\log 2 - \log 1}$$

$$x = 40 \cdot \frac{\log 2}{\log 10} = 12 \text{ dB}$$

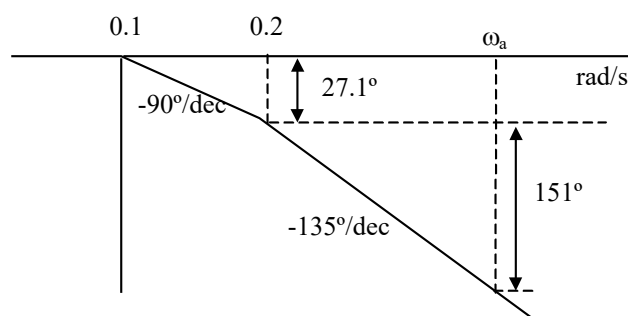
$$19 - 12 = 7 \text{ dB}$$

$$60 \text{ dB} \frac{\log 10}{\log \omega_a - \log 2}$$

$$\log \frac{\omega_a}{2} = \frac{7}{60} \cdot \log 10$$

$$\frac{\omega_a}{2} = 10^{7/60}$$

$$\omega_a = 2.6 \text{ rad/s}$$



$$x = \frac{90^\circ \log 10}{\log 0.2 - \log 0.1}$$

$$x = 27.1^\circ$$

$$x = \frac{135^\circ \log 10}{\log 2.6 - \log 0.2}$$

$$x = 151^\circ$$

Luego la fase para el punto ω_a es:

$$27.1^\circ + 151^\circ = 178.1^\circ$$

$$MF = 180^\circ - 178.1^\circ = 1.9^\circ \approx 2^\circ$$

La fase que debe aportar la red será:

$$\Phi_m = 30^\circ - 2^\circ + 10^\circ \approx 40^\circ$$

Cálculo de α al realizarse asintóticamente:

$$\Phi_m = 45^\circ \cdot \log \frac{1}{\alpha}$$

$$10^{40/45} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha = 0.13$$

La nueva frecuencia crítica de ganancia será aquella en la que el sistema inicial presenta una atenuación igual a la mitad de la ganancia de la red:

La mitad de la ganancia de la red es:

$$K_r = 10 \log \frac{1}{\alpha} = 8.88 \text{dB}$$

Se sitúa la nueva frecuencia de amplitud crítica donde el sistema inicial tiene una atenuación de 8.88dB. Para esta atenuación de la gráfica de Bode se obtiene una frecuencia $\omega_a = 3.6 \text{rad/s}$

Se hace coincidir ahora la frecuencia a la que se produce el máximo de fase en la red con la nueva frecuencia crítica de ganancia:

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 3.6 \quad T = 0.77 \text{s}$$

La frecuencia esquina del polo será:

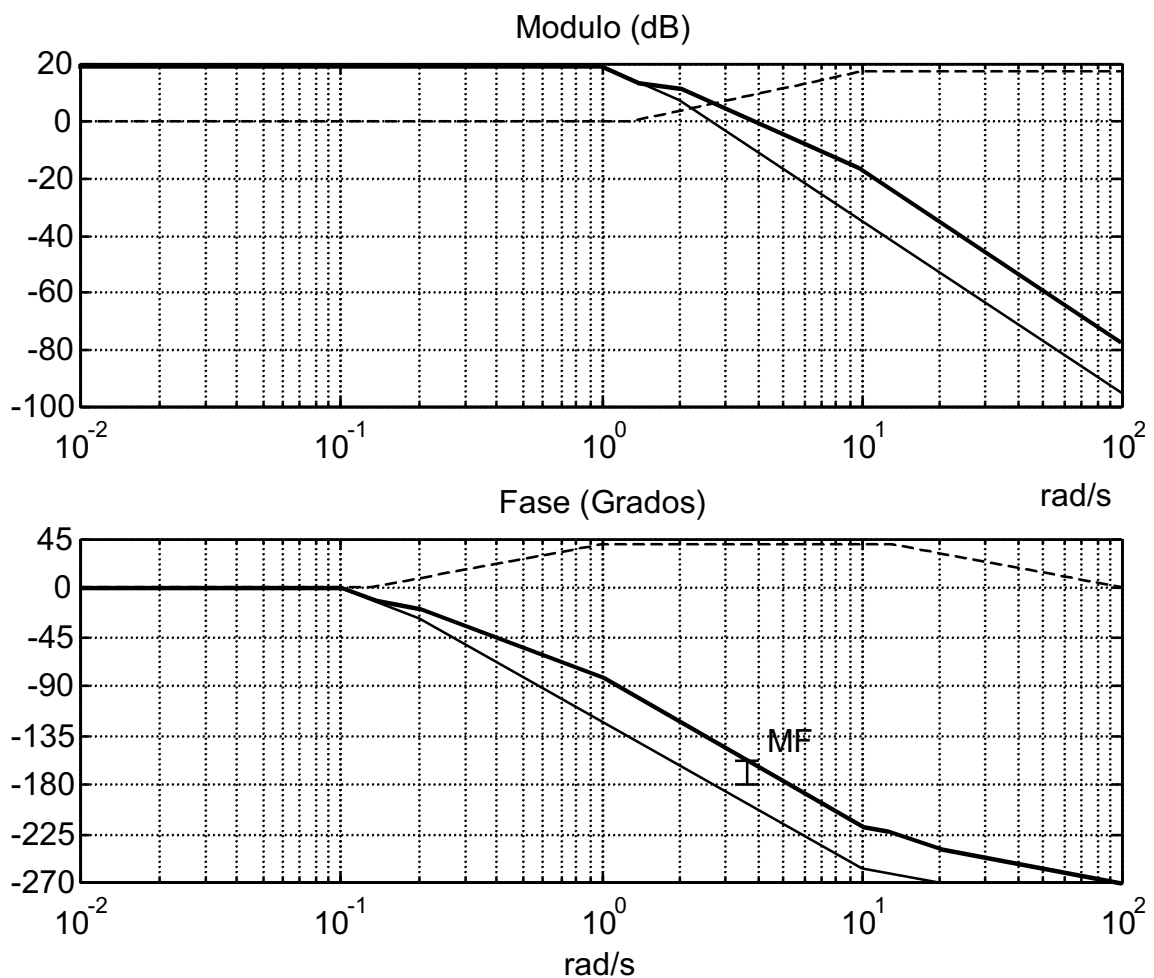
$$\omega_{\text{esq polo}} = \frac{1}{T} = 1.3 \text{ rad/s}$$

Y la frecuencia esquina del cero será:

$$\omega_{\text{esq cero}} = \frac{1}{\alpha T} = 10 \text{ rad/s}$$

El compensador por tanto queda:

$$D(s) = \frac{1}{0.13} \cdot \frac{s + 1.3}{s + 10}$$

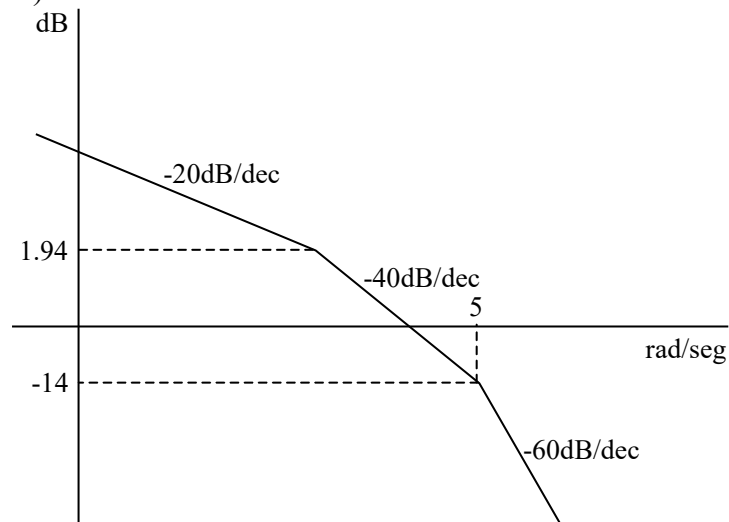


El valor de $\frac{1}{0.13}$ se añade a la red para que la ganancia en estado estacionario que proporciona el compensador sea 1.

La figura representa en línea discontinua la red de avance de fase, en línea continua fina el sistema inicial, y en línea continua gruesa el sistema compensado.

EJERCICIO 3.11.

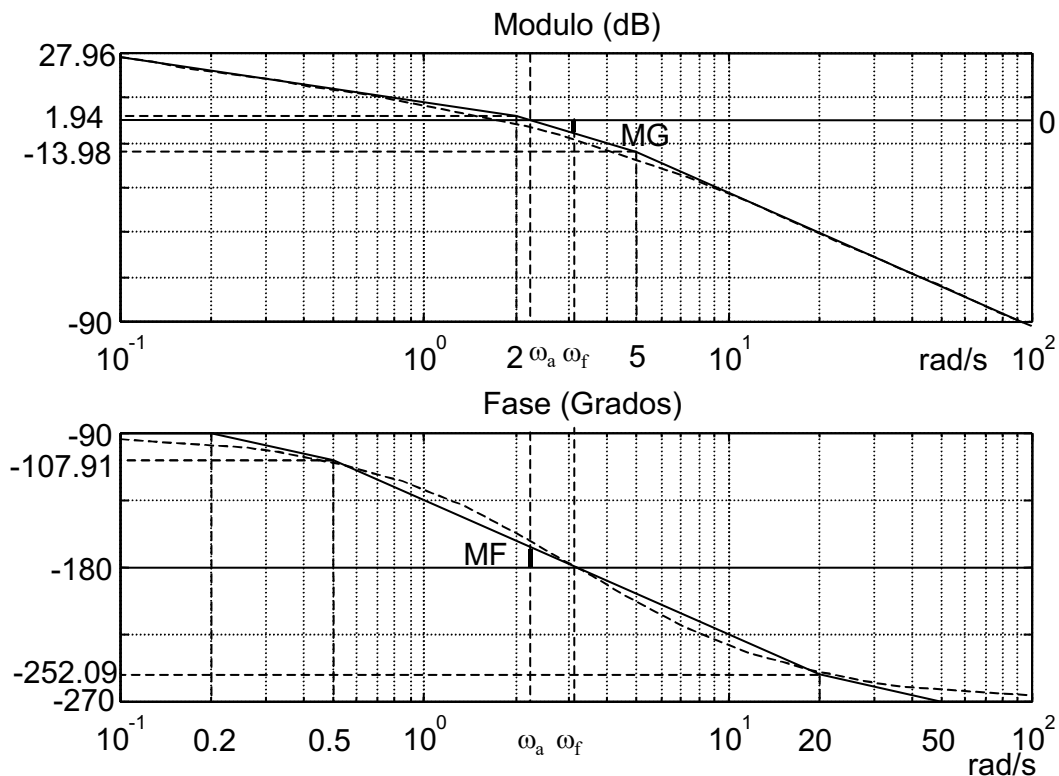
Dada la respuesta frecuencial de lazo abierto de un sistema indicada en el diagrama de Bode (para el módulo):



Calcular una red de retardo de fase para que el sistema compensado tenga un margen de fase de 45° . Dibujar el diagrama de Bode del sistema compensado.

La función de transferencia del sistema es (ver ref. 9, ej. 7.7): $G(s) = \frac{25}{s(s+5)(s+2)}$

Y los diagramas de Bode (ver ref. 9, ej. 7.7) para $G(j\omega) = \frac{2.5}{j\omega(1+j\omega 0.2)(1+j\omega 0.5)}$



La frecuencia de amplitud crítica:

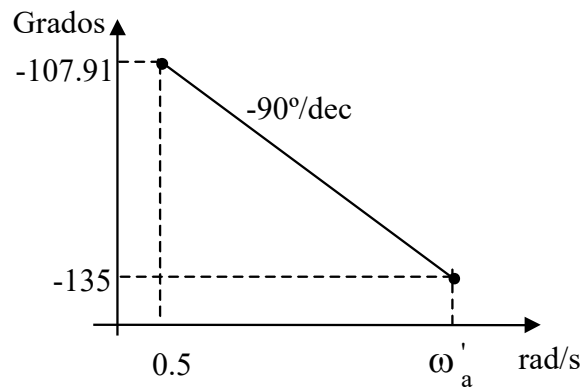
$$\omega_a = 2.24 \text{ rad/s}$$

Y el margen de fase inicial:

$$\text{MF} = 13.47^\circ$$

La frecuencia a la que el sistema presenta una fase de 135° será la nueva ω'_a :

$$\varphi(\omega = \omega'_a) = -135^\circ$$



$$-135^\circ = \varphi(\omega = 0.5 \text{ rad/seg}) - 90 \log \frac{\omega'_a}{0.5}$$

$$-135^\circ = -107.91^\circ - 90 \log \frac{\omega'_a}{0.5}$$

$$27.09^\circ = 90 \log \frac{\omega'_a}{0.5}$$

$$\omega'_a = 0.5 \cdot 10^{\frac{27.09}{90}} = 1 \text{ rad/s}$$

A esta nueva frecuencia de amplitud crítica le corresponde una amplitud de 7.96dB (ver ref. 9, ej. 10.7).

La red de retardo debe proporcionar una atenuación igual a la ganancia del sistema para la nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$7.96 = 20 \log \beta \quad \beta = 10^{\frac{7.96}{20}}$$

$$\boxed{\beta = 2.5}$$

Eligiendo el cero de la red de retardo una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia:

$$\frac{\omega'_a}{10} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\frac{1}{T} = 0.1$$

$$T = 10$$

$$\beta T = 2.5 \cdot 10 = 25$$

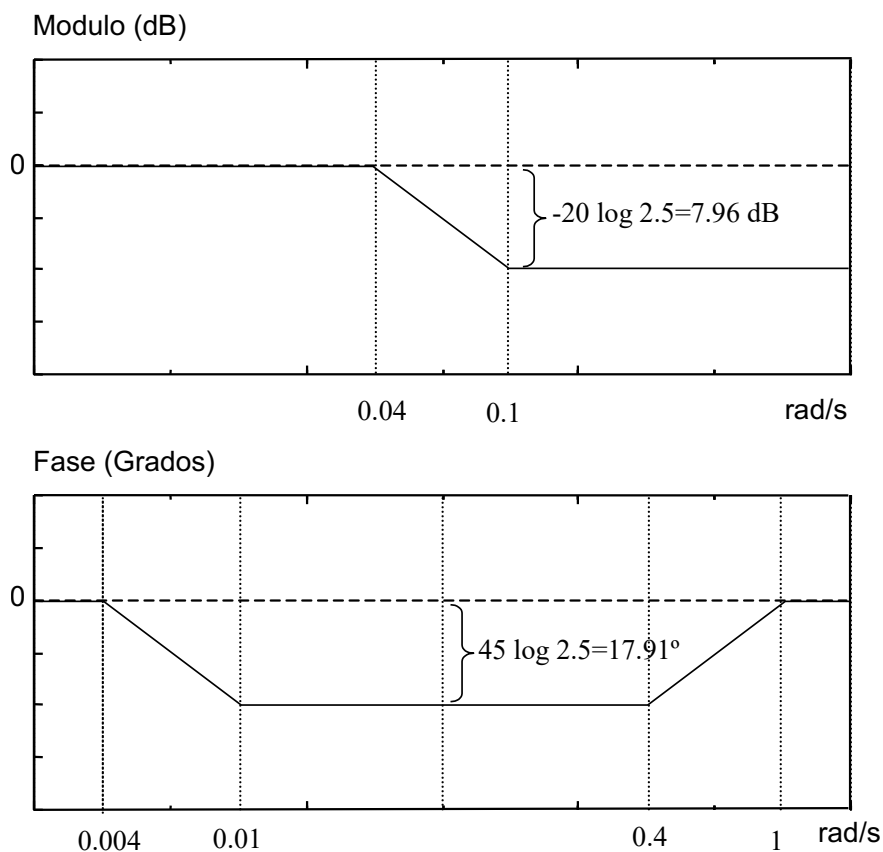
$$\beta T = 25$$

La red será:

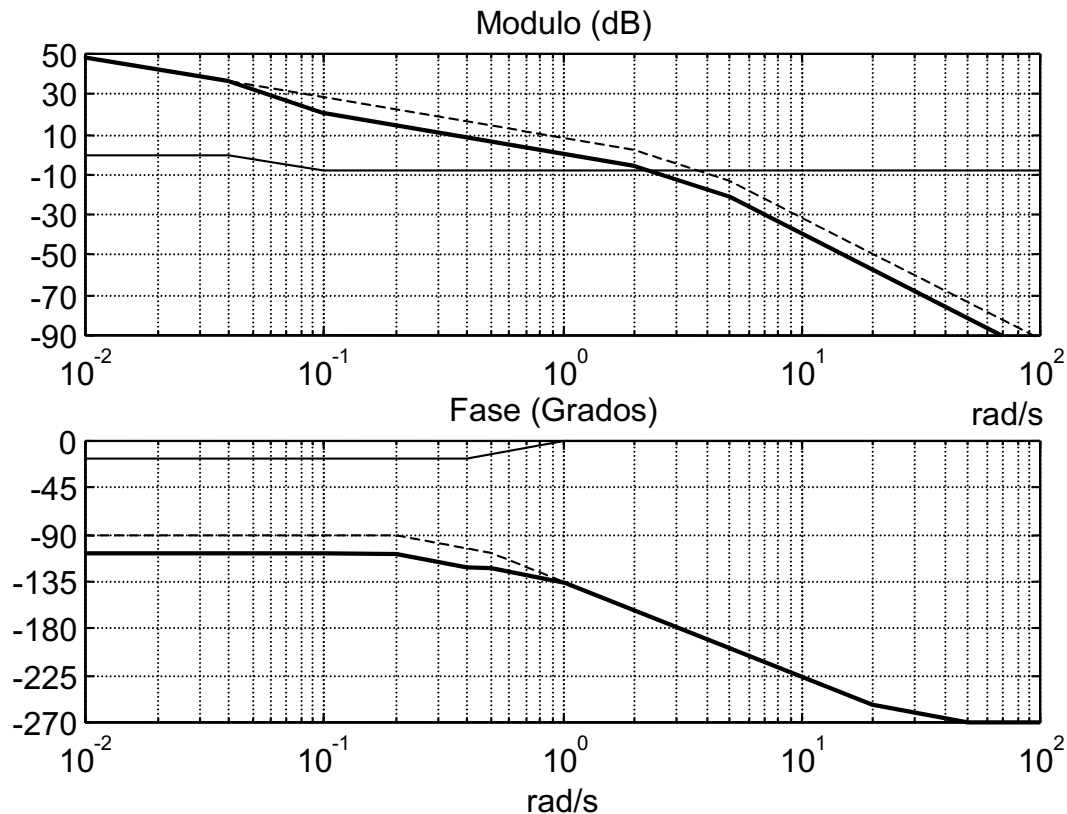
$$D(s) = \frac{1+sT}{1+s\beta T} = \frac{1+10s}{1+25s}$$

$$D(s) = 0.4 \frac{s+0.1}{s+0.04}$$

La representación asintótica de la red de retardo se muestra en la siguiente figura.



La siguiente figura muestra en línea gruesa continua la representación asintótica del sistema compensado, en línea fina continua la red de retardo y en línea discontinua el sistema original.



EJERCICIO 3.12.

Dado un sistema con realimentación unitaria que tiene como función de transferencia en lazo abierto.

$$G(s) = \frac{7,5}{s^2(s+5)}$$

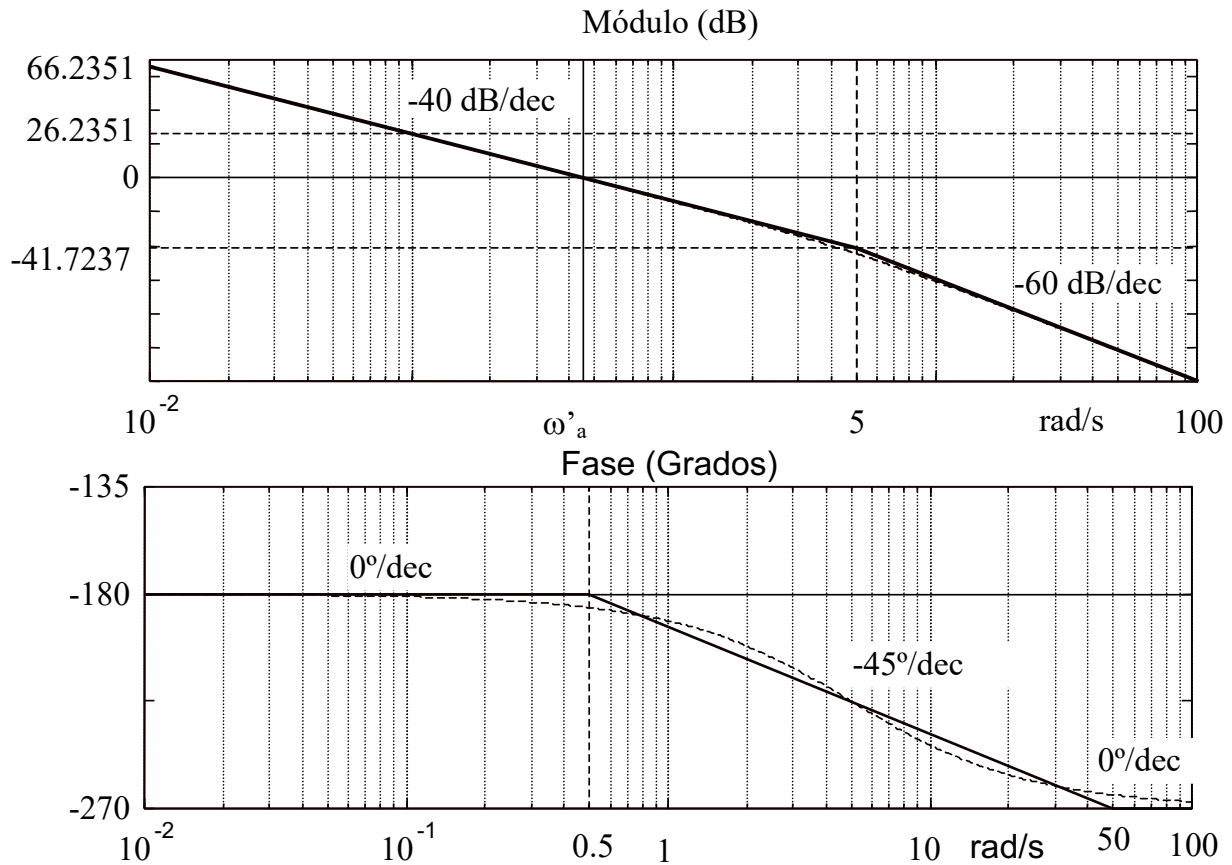
Y como regulador en la cadena directa:

$$R(s) = 0.1367$$

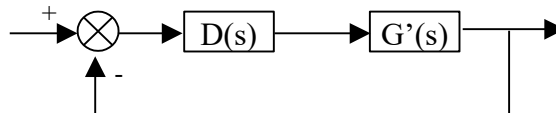
Se requiere que el sistema presente un margen de fase de 39°, para lo cual se insertará en la cadena una red de compensación de avance $D(s)$. Calcular dicha red y representar el sistema compensado. Verificar si el margen de fase del sistema compensado coincide con el que se ha especificado.

Los diagramas de Bode del sistema inicial pueden verse en la siguiente figura (ver ref. 9, ej. 7.10).

$$G'(s) = K' \cdot G(s) = 0.1367 \frac{7.5}{s^2(s+5)} \rightarrow G'(j\omega) = \frac{0.205}{(j\omega)^2 \left(\frac{j\omega}{5} + 1 \right)}$$



Introduciendo en la cadena directa la red de compensación:



Se desea que el sistema presente un margen de fase: $MF = 39^\circ$

Luego el ángulo que debe aportar el compensador será:

$$\varphi_c = 39^\circ - 0^\circ + 6^\circ = 45^\circ$$

Y por tanto el coeficiente α de la red:

$$\varphi_c = 45^\circ = 45 \log \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 0.1$$

Y la atenuación producida por la red de avance:

$$A = 20 \log \frac{1}{\alpha} = 20 \log \frac{1}{0.1} = 20 \text{ dB}$$

La frecuencia a la cual la curva de amplitud de $G'(s)$ es igual a la mitad de la atenuación introducida por la red de avance es:

$$-\frac{A}{2} = -\frac{20}{2} = -10 \text{ dB} = -40 \log \frac{\omega_a''}{\omega_a'}$$

$$\log \frac{\omega_a''}{\omega_a'} = \frac{1}{4}$$

$$\omega_a'' = \omega_a' \cdot 10^{0.25} = 0.4528 \cdot 10^{0.25} = 0.8052 \text{ rad/seg}$$

Si se hace $\omega_a'' = \omega_m$ (media geométrica de las dos frecuencias de esquina) se tendrá:

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 0.8052 \text{ rad/seg}$$

Y las frecuencias esquina quedarán:

$$\frac{1}{T} = 0.8052\sqrt{\alpha} = 0.2546 \text{ rad/seg}$$

$$\frac{1}{\alpha T} = 2.5463 \text{ rad/seg}$$

La función de transferencia de la red compensadora será:

$$G_{ra}(j\omega) = \alpha \frac{1 + T j\omega}{1 + \alpha T j\omega} = 0.1 \frac{1 + 3.9273 j\omega}{1 + 0.3927 j\omega}$$

$$G_{ra}(j\omega) = 0.1 \frac{1 + \frac{j\omega}{0.2546}}{1 + \frac{j\omega}{2.5463}}$$

Para que el compensador no aporte ganancia ($\alpha = 0.1$), se introduce un amplificador de ganancia ($\frac{1}{\alpha} = 10 \text{ dB}$), luego la red compensadora quedará:

$$D(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{0.2546}}{1 + \frac{j\omega}{2.5463}}$$

Y el sistema total compensado:

$$G_t(j\omega) = D(j\omega) \cdot G'(j\omega)$$

$$G_t(j\omega) = \frac{0.205 \left(1 + \frac{j\omega}{0.2546}\right)}{(j\omega)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{5}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{2.5463}\right)}$$

Se dibujan a continuación las trazas de Bode para este sistema.

Para ello de la función de transferencia se obtiene:

$$K'_{\text{Bode}} = 0.205$$

Frecuencias de corte:

$$0.2546 \text{ rad/seg}$$

$$2.5463 \text{ rad/seg}$$

$$5 \text{ rad/seg}.$$

Se calculan a continuación las tablas de pendientes para los diagramas de Bode.

DIAGRAMA DE AMPLITUD

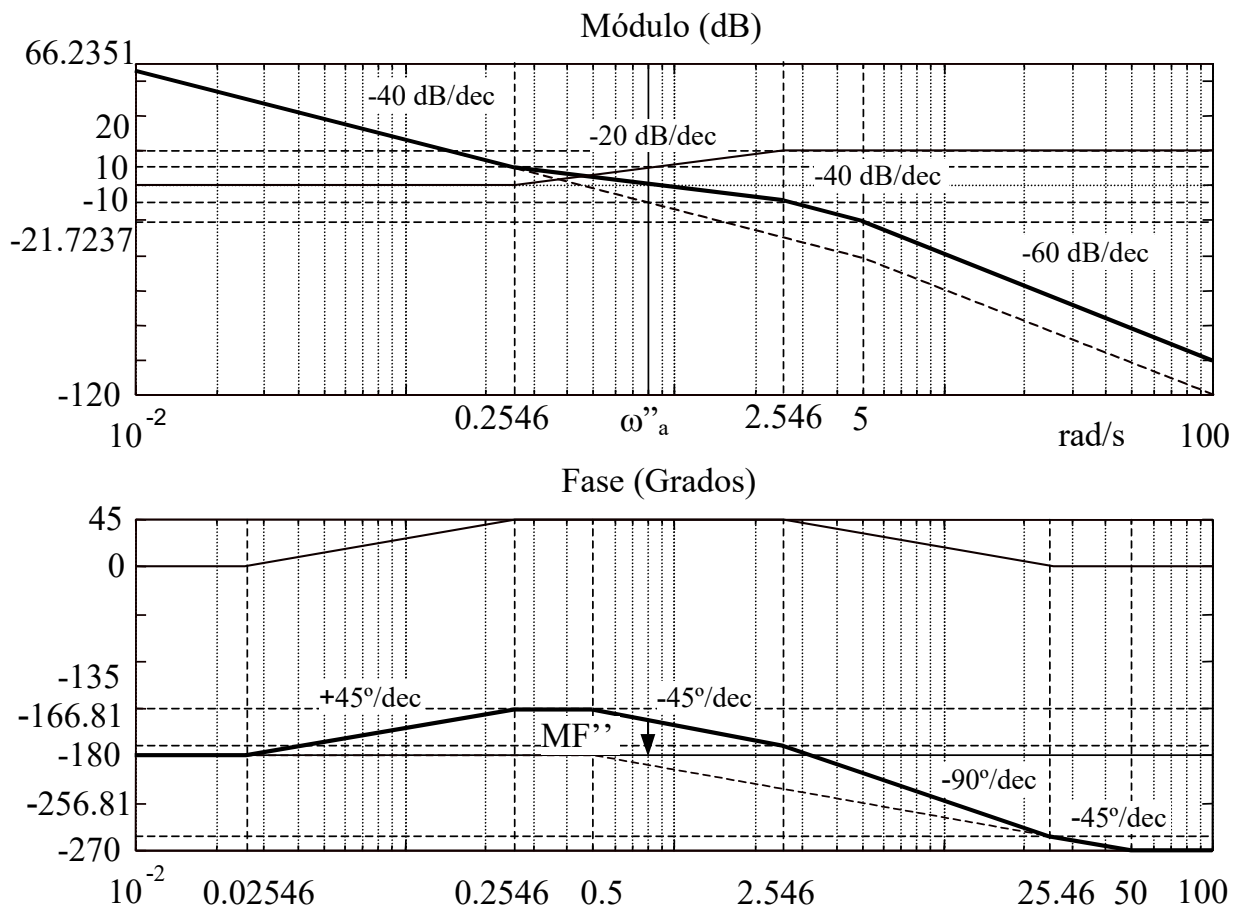
Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (dB)	Pendiente (dB/dec)
$\frac{0.205}{(j\omega)^2}$	(0.1, 0.2546]	★	-20 * tipo = -40
$\frac{0.205 \left(\frac{j\omega}{0.2546} + 1 \right)}{(j\omega)^2}$	[0.2546, 2.5463]	+20	-20
$\frac{0.205 \left(\frac{j\omega}{0.2546} + 1 \right)}{(j\omega)^2 \left(\frac{j\omega}{2.5463} + 1 \right)}$	[2.5463, 5]	-20	-40
$\frac{0.205 \left(\frac{j\omega}{0.2546} + 1 \right)}{(j\omega)^2 \left(\frac{j\omega}{2.5463} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{5} + 1 \right)}$	[5, 100)	-20	-60

$$H: \text{Aportación} = 20 \cdot [\log K'_{\text{Bode}} - \text{tipo} \cdot \log \omega_i] = 20 \cdot [\log 0.205 - 2 \log 0.01] = 66.2351 \text{ dB}$$

DIAGRAMA DE FASE

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (°)	Pendiente (°/dec)
$\frac{0.205}{(j\omega)^2}$	(0.01, 0.02546]	-90° * tipo = -90° * 2 = -180°	0°
$\frac{0.205\left(\frac{j\omega}{0.2546} + 1\right)}{(j\omega)^2}$	[0.02546, 0.2546]	+45°	+45°
$\frac{0.205\left(\frac{j\omega}{0.2546} + 1\right)}{(j\omega)^2\left(\frac{j\omega}{2.5463} + 1\right)}$	[0.2546, 0.5]	-45°	0°
$\frac{0.205\left(\frac{j\omega}{0.2546} + 1\right)}{(j\omega)^2\left(\frac{j\omega}{2.5463} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{5} + 1\right)}$	[0.5, 2.546]	-45°	-45°
$\frac{0.205}{(j\omega)^2\left(\frac{j\omega}{2.5463} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{5} + 1\right)}$	[2.546, 25.463]	-45°	-90°
$\frac{0.205}{(j\omega)^2\left(\frac{j\omega}{5} + 1\right)}$	[25.463, 50]	+45°	-45°
$\frac{0.205}{(j\omega)^2}$	[50, 100)	+45°	0°

En la siguiente figura pueden verse los diagramas de Bode del sistema compensado.



Se verifica a continuación si el sistema con regulador cumple las especificaciones solicitadas.

$$66.2351 \text{ dB} - 40 \log \frac{0.2546}{0.01} = 66.2351 - 56.2343 = 10.0008 \text{ dB}$$

$$10 \text{ dB} = 20 \log \frac{\omega_m}{0.2546} \Rightarrow \omega_m = 0.2546 \cdot 10^{\frac{10}{20}} = 0.8051 \text{ rad/seg}$$

con este valor en el diagrama de fase:

$$-45 \log \frac{\omega_m}{0.5} = -45 \log \frac{0.8051}{0.5} = -9.3096^\circ$$

Luego en ω_m la fase vale:

$$-135^\circ - 9.3096^\circ = -144.3096^\circ$$

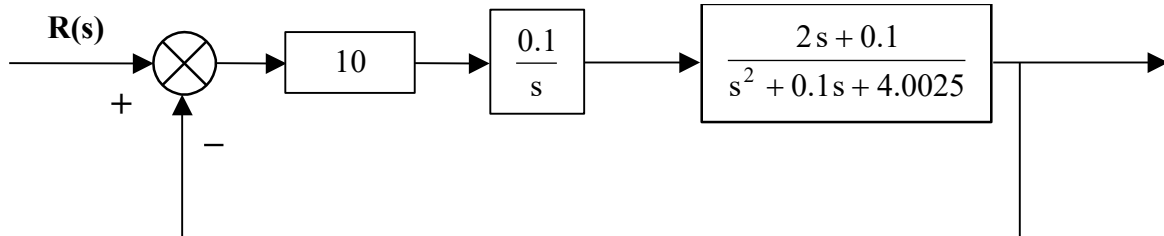
luego

$$MF = 180^\circ - 144.3096^\circ = 35.6904^\circ$$

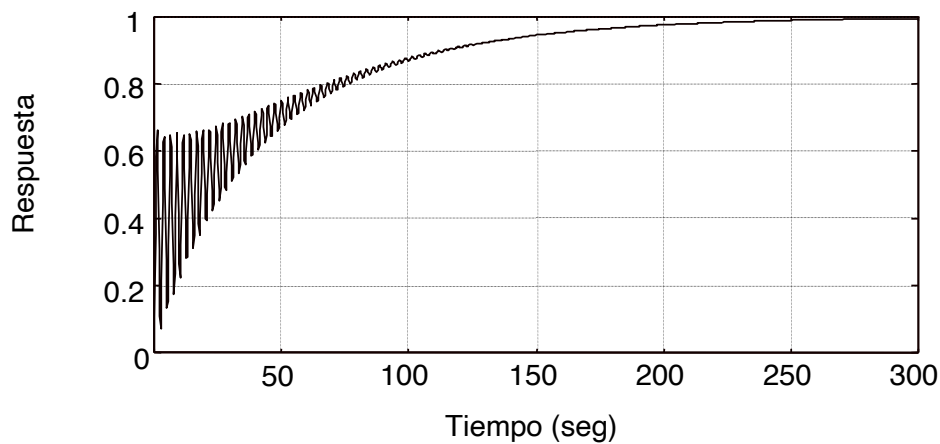
Se pedían 39° , luego se obtiene una diferencia de 3.31° que se aproxima bastante al valor pedido. Ajustando el coeficiente de seguridad se podría llegar a obtener exactamente el valor de margen de fase pedido.

EJERCICIO 3.13.

En la figura se representa el diagrama de bloques de un modelo para un sistema de control de cambio de posición:



Al aplicarle una entrada escalón unitario, se obtiene una respuesta como se muestra en la figura:



Se desea acelerar la respuesta y mejorar el régimen transitorio, para ello, diseñese un compensador $G_c(s)$, a incluir en la cadena directa, tal que los polos dominantes en lazo cerrado estén en: $s_{1,2} = -\sqrt{0.8} \pm 2\sqrt{3}j$. (coeficiente de seguridad: 6.5°).

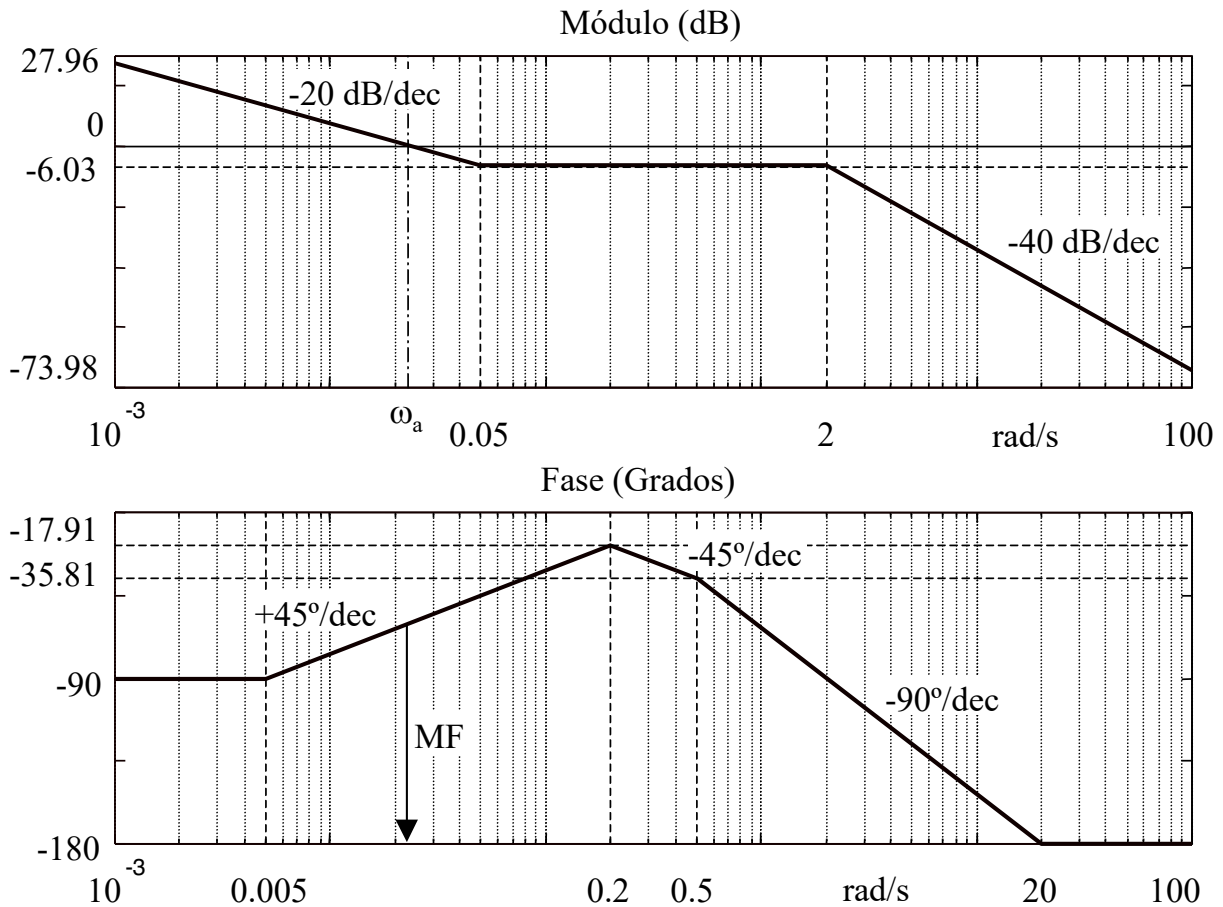
La función de transferencia de cadena abierta y los diagramas de Bode asintóticos del sistema inicial pueden verse a continuación (ver ref. 9, ej. 7.11).

$$G(s)H(s) = \frac{2s + 0.1}{s(s^2 + 0.1s + 4.0025)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{2j\omega + 0.1}{(j\omega)((j\omega)^2 + 0.1j\omega + 4.0025)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{0.025 \left(\frac{j\omega}{0.05} + 1 \right)}{j\omega \left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{4.0025}} \right)^2 + \frac{0.1j\omega}{4.0025} + 1 \right]}$$

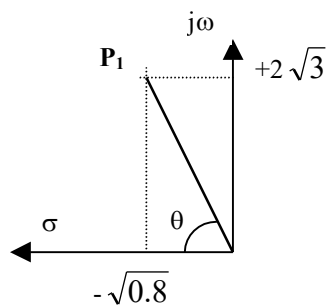
Esta respuesta es:



El punto de funcionamiento que se desea es:

$$s_{1,2} = -\sqrt{0.8} \pm 2\sqrt{3}j.$$

Gráficamente se tiene que:



$$\theta = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{0.8}} = 75.5225^\circ$$

$$\delta = \cos \theta = 0.25$$

Aplicando la aproximación:

$$\delta = \frac{MF'}{100}$$

se obtiene que el nuevo margen de fase del sistema compensado debe ser:

$$MF' = 0.25 \cdot 100 = 25^\circ.$$

Se halla en primer lugar, el margen de fase del sistema inicial. Del diagrama de amplitud, se tiene:

$$27.9588 \text{ dB} = 20 \log \frac{\omega_a}{0.001}$$

$$\omega_a = 0.025 \text{ rad/seg}$$

Con este valor de frecuencia de cruce de ganancia, se entra en el diagrama de fase obteniéndose:

$$-90^\circ + 45 \log \frac{0.025}{0.005} = -90^\circ + 31.4537^\circ = -58.5463^\circ$$

$$\text{MF} = 180^\circ - 58.5463^\circ = 121.45^\circ$$

Se desea que el sistema presente un margen de fase: $\text{MF}' = 25^\circ$

$$\varphi_c = 25^\circ - 121.45^\circ + 6.5^\circ = 89.95^\circ$$

Éste es el ángulo que se aportará. Se considerará a efectos de cálculos que el ángulo es de 90° . Como el ángulo necesario es demasiado grande para poder ser aportado por una única red de avance, se utilizarán dos redes de avance idénticas, donde cada una de ellas aportará la mitad de la fase necesaria:

$$\varphi_c = 45^\circ = 45 \log \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 0.1$$

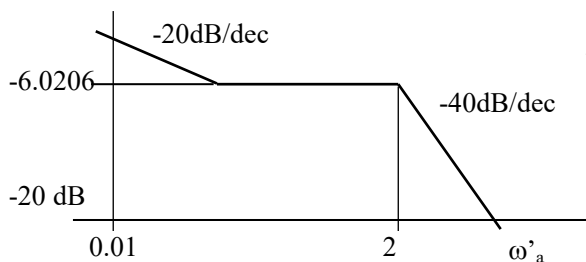
y la atenuación producida:

$$A = 20 \log \alpha = -20 \text{ dB}$$

La mitad de la atenuación será -10 dB , pero como se introducen dos redes, se tendrá que considerar el doble de atenuación: -20 dB .

Se busca por tanto en el diagrama de amplitud el punto de frecuencia para la que se produce este valor de atenuación, y éste será el nuevo valor de la frecuencia de cruce de ganancia:

La frecuencia de cruce de ganancia: ω'_a se obtiene de:



$$-20 - (-6.0206) = -40 \log \frac{\omega'_a}{2}$$

$$\omega'_a = 4.4721 \text{ rad/seg}$$

Las frecuencias esquina se obtienen de:

$$\omega'_a = 4.4721 = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{T} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\alpha T} = 10\sqrt{2}$$

La función de transferencia de la red compensadora será:

$$G_{ra}(s) = 0.1 \frac{1 + \frac{s}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{s}{10\sqrt{2}}}$$

Para eliminar la ganancia introducida por la red, se inserta un amplificador de valor

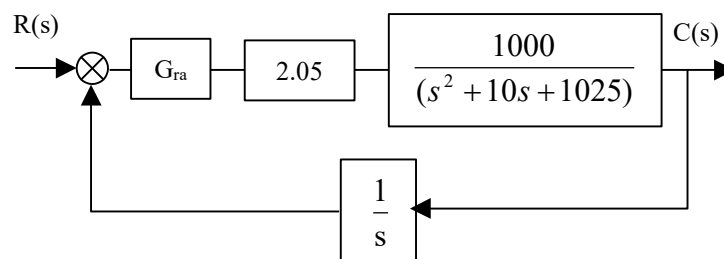
$$\frac{1}{0.1} = 10$$

quedando entonces, al tener en cuenta que la red es doble:

$$G'_{ra}(s) = \left[\frac{10(s + \sqrt{2})}{s + 10\sqrt{2}} \right]^2$$

EJERCICIO 3.14.

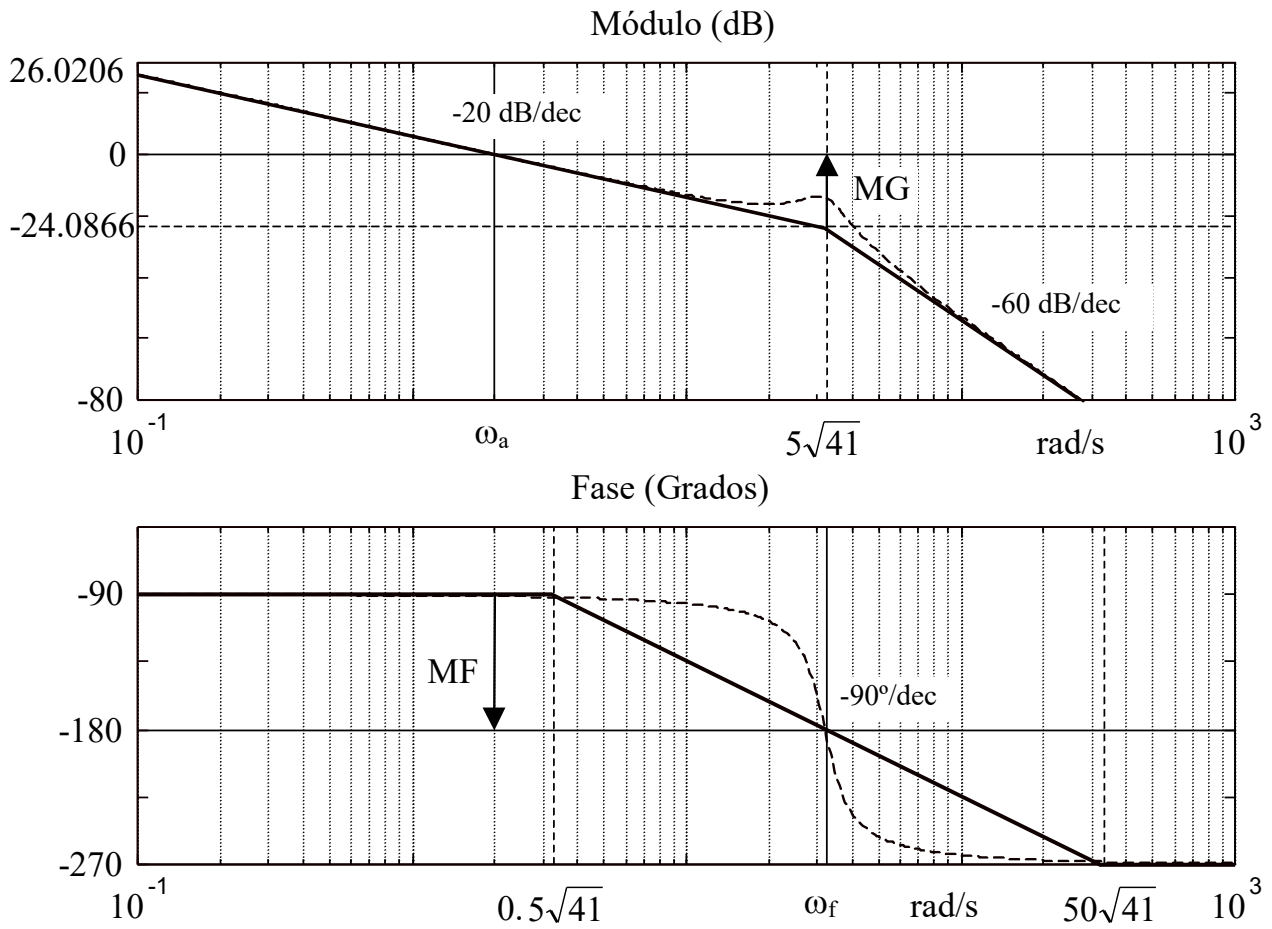
Diseñar una red de compensación G_{ra} para que el sistema de la figura presente un margen de fase de 120° (coeficiente de seguridad: 5°). Representar la respuesta en frecuencia del nuevo sistema compensado. Comprobar si se cumple la especificación indicada.



Los diagramas de Bode de la función de transferencia de lazo abierto se representan a continuación (ver ref. 9, ej. 7.12):

$$GH(s) = \frac{1000 \cdot 2.05}{s(s^2 + 10s + 1025)} = \frac{2050}{s(s^2 + 10s + 1025)}$$

$$GH(j\omega) = \frac{2050}{j\omega((j\omega)^2 + 10j\omega + 1025)}$$



$$GH(j\omega) = \frac{\frac{2050}{1025}}{j\omega \left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{1025}} \right)^2 + \frac{10j\omega}{1025} + 1 \right]} = \frac{2}{j\omega \left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{1025}} \right)^2 + \frac{10j\omega}{1025} + 1 \right]}$$

Ahora el nuevo margen de fase (MF'), debe ser 120° . Esto puede hacerse mediante una red de avance de fase, donde el ángulo de avance ϕ_c será:

$$\phi_c = MF' - MF + \text{coef. seguridad} = 120^\circ - 90^\circ + 5^\circ = 35^\circ$$

$$\phi_c = 45 \log \frac{1}{\alpha} = 35^\circ$$

$$\alpha = 0.1668$$

El valor que corresponde a la mitad de la atenuación que introduce la red es:

$$\frac{A}{2} = \frac{20 \log \alpha}{2} = -\frac{15.5561}{2} = -7.7780 \text{ dB}$$

Se calcula la frecuencia a la que se produce esta atenuación en el sistema $G_4(s)$, y se toma esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de fase: ω'_a

$$-7.7780 = -20 \log \frac{\omega'_a}{\omega_a}$$

$$\omega'_a = \omega_a \cdot 10^{\frac{7.7780}{20}} = 2 \cdot 2.4485 = 4.8970 \text{ rad/seg}$$

Se determinan ahora las frecuencias esquina a partir de:

$$\omega'_a = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 4.8970$$

Luego:

$$\frac{1}{T} = 2$$

y:

$$\frac{1}{\alpha T} = 11.9904 \cong 12$$

Quedando dicha red:

$$G_{ra}(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{2}}{1 + \frac{j\omega}{12}} = \alpha \frac{j\omega + 2}{j\omega + 12}$$

$$G_{ra}(j\omega) = 0.1668 \frac{j\omega + 2}{j\omega + 12}$$

El nuevo sistema compensado será:

$$G'(j\omega) = G_{ra}(j\omega) \cdot GH(j\omega)$$

$$G'(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{2}}{1 + \frac{j\omega}{12}} \cdot \frac{2}{j\omega \left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{1025}} \right)^2 + \frac{10j\omega}{1025} + 1 \right]}$$

$$G'(j\omega) = \frac{2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{12}\right) \left[\left(\frac{j\omega}{\sqrt{1025}}\right)^2 + \frac{10j\omega}{1025} + 1 \right]}$$

Para representar la respuesta en frecuencia del nuevo sistema compensado, se hacen las tablas de los diagramas de Amplitud y de Fase.

DIAGRAMA DE AMPLITUD

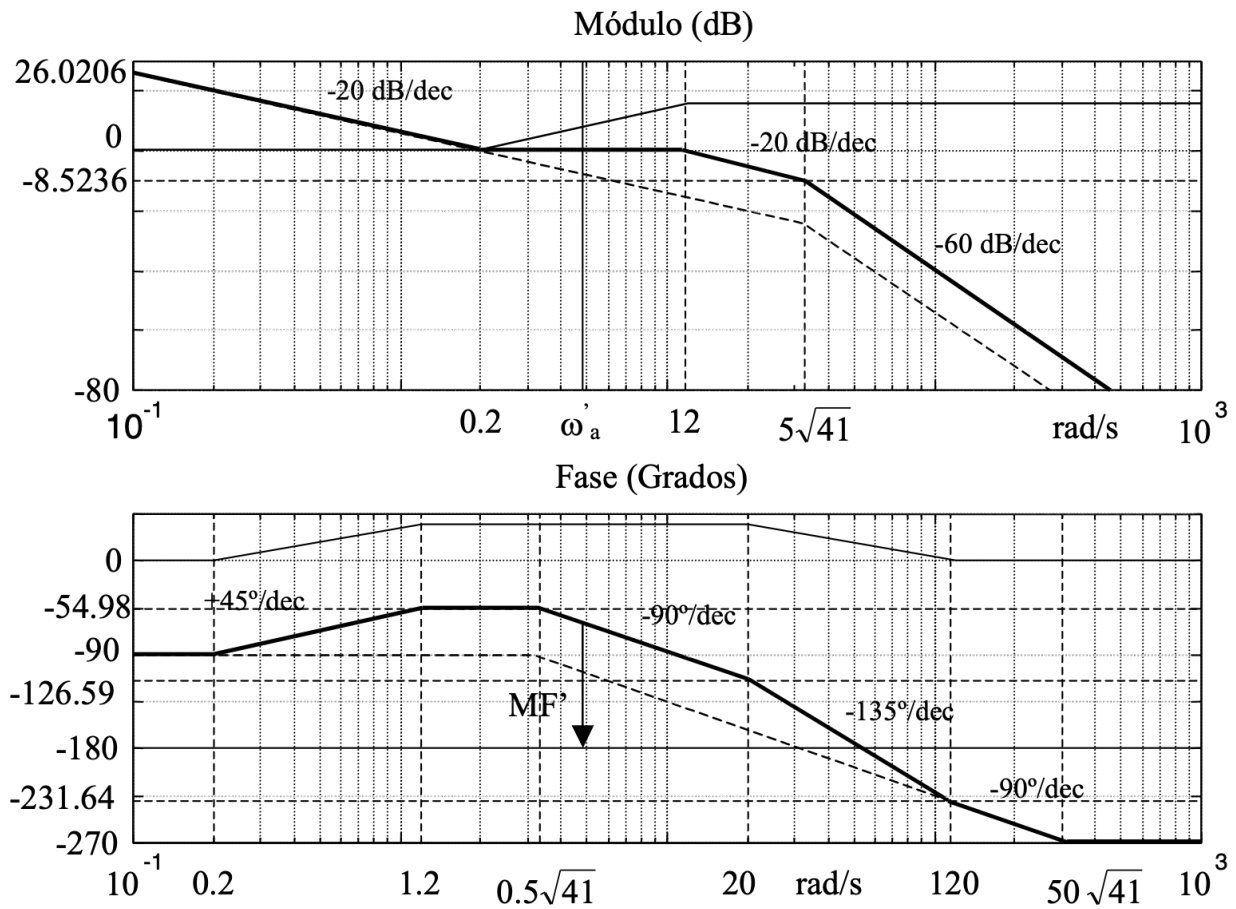
Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (dB)	Pendiente (dB/déc.)
$\frac{2}{j\omega}$	(0.1, 2]	★	-20 * tipo = = -20 dB/déc.
$\frac{2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}{j\omega}$	[2, 12]	+20	0
$\frac{2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{12}\right)}$	[12, $5\sqrt{41}$]	-20	-20 dB/déc.
$\frac{2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{12}\right) \left[\left(\frac{j\omega}{5\sqrt{41}}\right)^2 + \frac{10j\omega}{1025} + 1 \right]}$	[$5\sqrt{41}$, 1000)	-20 (2) = -40	-60 dB/déc.

★ Amplitud en la frecuencia inicial: 26.0206 dB

DIAGRAMA DE FASE

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (°)	Pendiente (°/déc.)
$\frac{2}{j\omega}$	(0.1, 0.2]	-90°	0
$\frac{2\left(1 + j\omega/2\right)}{j\omega}$	[0.2, 1.2]	+45°	+45°/déc.
$\frac{2\left(1 + j\omega/2\right)}{j\omega\left(1 + j\omega/12\right)}$	[1.2, 0.5\sqrt{41}]	-45°	0
$\frac{2\left(1 + j\omega/2\right)}{j\omega\left(1 + j\omega/12\right)\left[\left(\frac{j\omega}{5\sqrt{41}}\right)^2 + \frac{10j\omega}{1025} + 1\right]}$	[0.5\sqrt{41}, 20]	-45 (2) = -90°	-90°/déc.
$\frac{2}{j\omega\left(1 + j\omega/12\right)\left[\left(\frac{j\omega}{5\sqrt{41}}\right)^2 + \frac{10j\omega}{1025} + 1\right]}$	[20, 120]	-45	-135°/déc.
$\frac{2}{j\omega\left[\left(\frac{j\omega}{5\sqrt{41}}\right)^2 + \frac{10j\omega}{1025} + 1\right]}$	[120, 50\sqrt{41}]	+45°	-90°/déc.
$\frac{2}{j\omega}$	[50\sqrt{41}, 1000)	+45 (2) = +90°	0

La siguiente figura muestra la representación de los diagramas de Bode a partir de la información de las tablas.



Comprobación:

La nueva frecuencia de cruce de ganancia es: $\omega_a' = 4.8970 \text{ rad/seg}$

La fase del sistema compensado para este valor de la frecuencia, vale:

$$45 \log \frac{1.2}{0.2} = 35.0168^\circ$$

$$-90^\circ + 35.0168^\circ = -54.9832^\circ$$

$$-90 \log \frac{\omega_a'}{0.5\sqrt{41}} = -90 \log \frac{4.8970}{0.5\sqrt{41}} = -16.6111^\circ$$

$$\text{Fase} = -54.9832^\circ - 16.6111^\circ = -71.5943^\circ$$

$$\text{MF}' = -180^\circ - (-71.5943^\circ) = -108.4057^\circ$$

Error cometido:
$$\frac{\text{MF}_{\text{pedido}} - \text{MF}_{\text{hallado}}}{\text{MF}_{\text{pedido}}} * 100\% = 9.66\%$$

EJERCICIO 3.15.

Dado un sistema con realimentación unitaria que tiene como función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{s}{(s+1)^2(s+2)}$$

Diseñar un compensador en avance de fase para satisfacer:

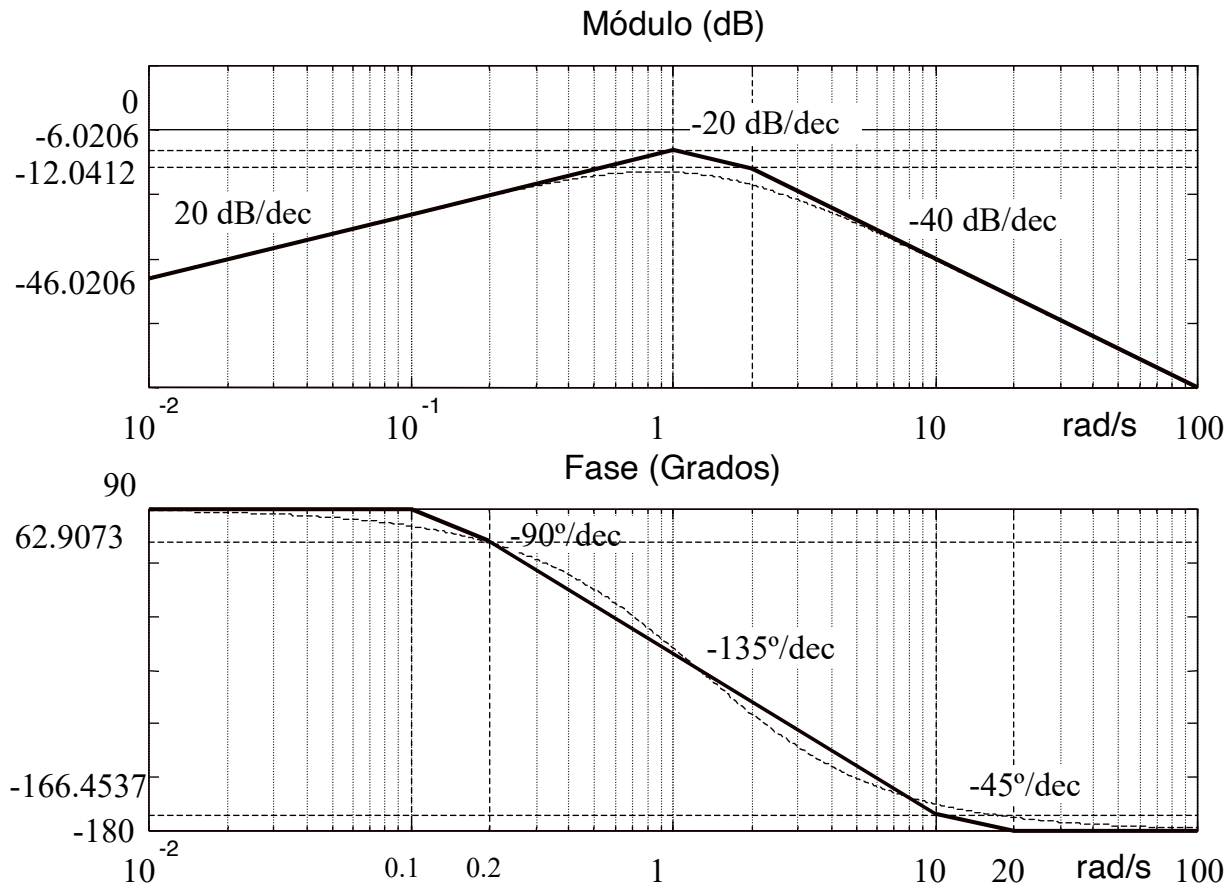
- Valor del módulo de la función de transferencia de cadena directa, para una frecuencia de 0.1 rad/s, de 10.
- Margen de fase de 38°.

Comprobar gráficamente el funcionamiento de la red de compensación.

Nota: El margen de seguridad se tomará en torno a los 4°.

La respuesta en frecuencia mediante los diagramas de Bode del sistema inicial puede verse en la siguiente figura (ver ref. 9, ej. 7.13).

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{(j\omega)}{(1+j\omega)^2(j\omega+2)} = \frac{0.5(j\omega)}{(1+j\omega)^2\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)}$$



Para este sistema también puede verse que:

El margen de fase es de $MF = 180^\circ$.

Y el margen de ganancia, $MG = \infty$

Una de las especificaciones que se pide es que el módulo para una frecuencia de 0.1 rad/seg sea de 10, lo que quiere decir:

$$20 \log 10 = 20 \text{ dB}$$

luego el sistema compensado en este punto de frecuencia debe tener un módulo de 20 dB, luego de acuerdo con el diagrama, es necesario subir la curva de amplitud, un valor de:

$$20 - (-26.0206) \text{ dB} = 46.0206 \text{ dB}$$

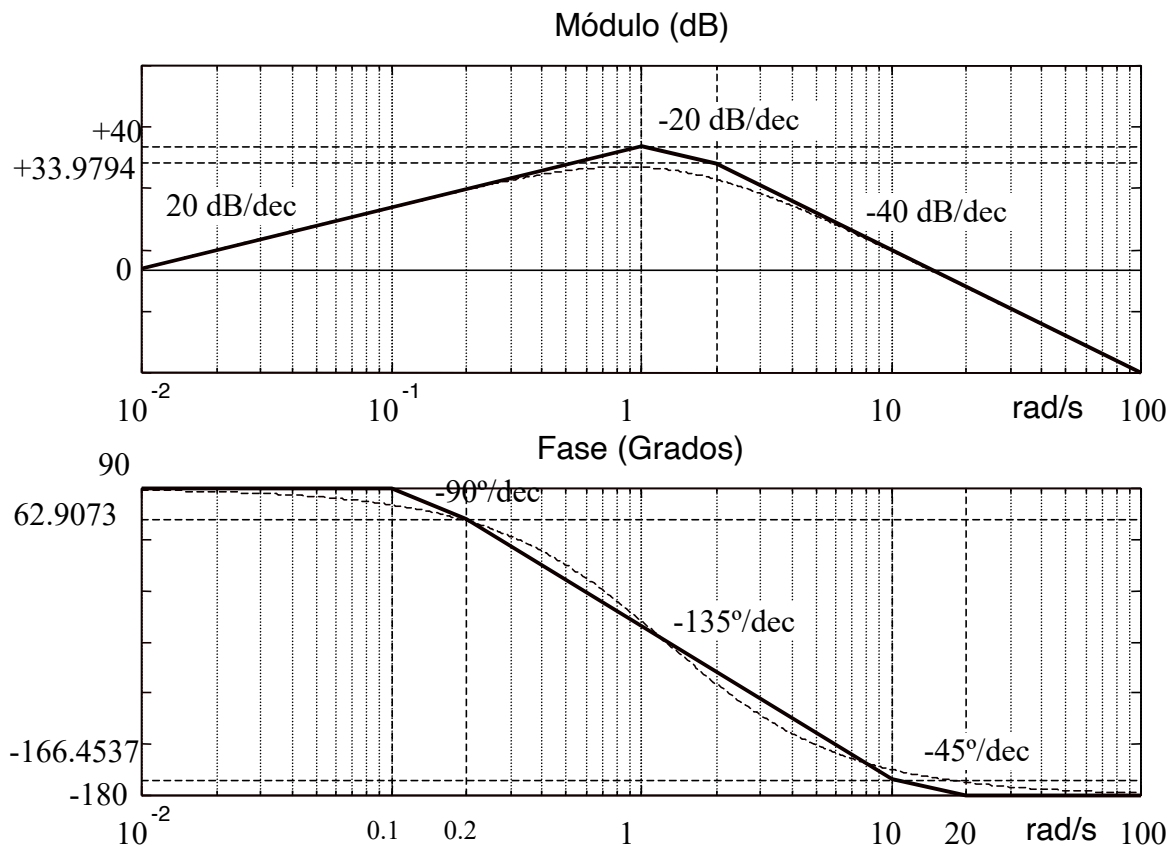
Lo que corresponde a un valor de ganancia:

$$20 \log K' = 46.0206 \text{ dB} \Rightarrow K' = 10^{\frac{46.0206}{20}} = 200$$

Luego la nueva función compensada en ganancia será:

$$G'(s) = \frac{200 \cdot 0.5(j\omega)}{(1+j\omega)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)} = \frac{100(j\omega)}{(1+j\omega)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}$$

Se representan a continuación los diagramas para el sistema compensado en ganancia.



Puede observarse que el diagrama de fase no se modifica y el de amplitud se desplaza hacia arriba: 46.0206 dB.

Se calcula ahora el nuevo margen de fase:

$$20 \log \frac{2}{1} = 6.0206 \text{ dB}$$

Luego en $\omega = 2 \text{ rad/s}$ se tendrá una amplitud de:

$$+ 40 - 6.0206 = +33.9794 \text{ dB}$$

$$33.9794 \text{ dB} = 40 \log \frac{\omega_a}{2}$$

$$\omega_a = 2 \cdot 10^{\frac{33.9794}{40}} = 14.1421 \text{ rad/s}$$

Con este valor de frecuencia de cruce de ganancia, entramos en el diagrama de fase para obtener el margen de fase:

$$MF' = 180^\circ - \left(90 \log \frac{0.2}{0.1} + 135 \log \frac{10}{0.2} + 45 \log \frac{14.1421}{10} \right) + 90^\circ = 180^\circ - 263.2268^\circ + 90^\circ$$

$$MF' = 6.7732^\circ$$

Se desea que el sistema presente un margen de fase: $MF = 38^\circ$

$$\varphi_c = 38^\circ - 6.7732^\circ + 4^\circ = 35.2268^\circ \cong 35^\circ$$

El ángulo que debe aportar la red es:

$$\varphi_c = 35^\circ = 45 \log \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 0.167$$

y la atenuación producida:

$$A = 20 \log \frac{1}{\alpha} = 20 \log \frac{1}{0.167} = 15.5457 \text{ dB}$$

Se busca, en el diagrama del sistema sin compensar, la frecuencia a la cual se produce la mitad de la atenuación introducida por la red:

$$\frac{-15.5457}{2} = -7.7728 \text{ dB} = -40 \log \frac{\omega_a}{\omega'_a} = -40 \log \frac{14.1421}{\omega'_a}$$

$$\omega_a' = 14.1421 \cdot 10^{\frac{7.7728}{40}} = 22.1225 \text{ rad/s}$$

$$\omega_a' = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{T\sqrt{0.167}} = 22.1225$$

$$\frac{1}{T} = 22.1225\sqrt{0.167} = 9.0405$$

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{9.0405}{0.167} = 54.1347$$

Luego la red quedará:

$$G_{ra}(j\omega) = \alpha \frac{1 + \frac{j\omega}{T}}{1 + \frac{j\omega}{\alpha T}}$$

$$G_{ra}(j\omega) = 0.167 \frac{1 + \frac{j\omega}{9.0405}}{1 + \frac{j\omega}{54.1347}}$$

Y para que la red no modifique el valor de la ganancia del sistema, se debe introducir un amplificador de ganancia “1/α”, por lo que la red quedará:

$$G_{ra}(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{9.0405}}{1 + \frac{j\omega}{54.1347}}$$

$$G_{ra}(j\omega) = \frac{1 + 0.1106 j\omega}{1 + 0.0185 j\omega}$$

Luego el sistema compensado será:

$$G_t(j\omega) = G_{ra}(j\omega) \cdot G'(j\omega)$$

$$G_t(j\omega) = \frac{100 j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{9.0405}\right)}{(1 + j\omega)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{54.1347}\right)}$$

De esta función se obtiene que:

$$K_{\text{Bode}} = 100$$

Frecuencias de corte: 1 rad/s

2 rad/s

9.0405 rad/s

54.1347 rad/s

Tablas de pendientes:

DIAGRAMA DE AMPLITUD

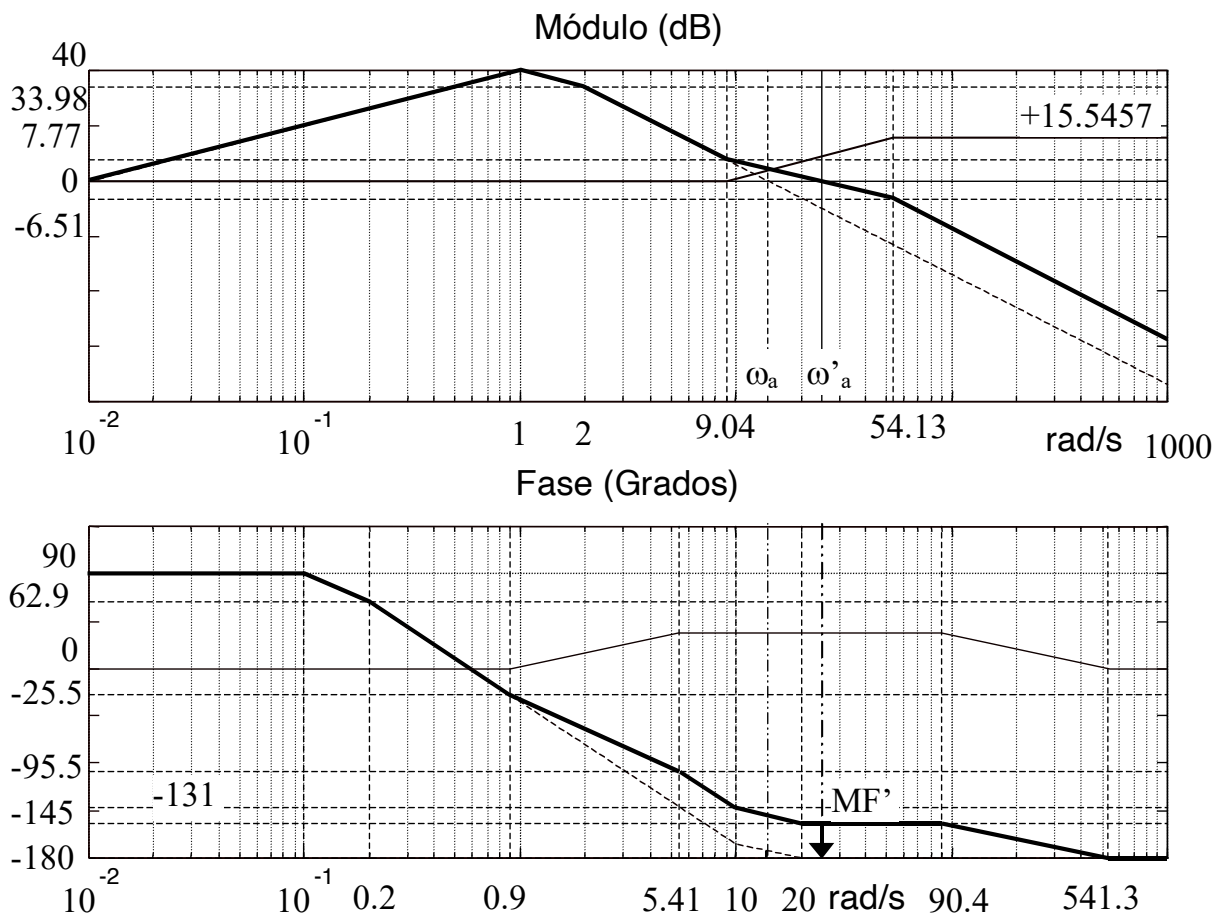
Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (dB)	Pendiente (dB/dec)
$100 j\omega$	(0.01, 1]	★	+20 * n = +20
$\frac{100 j\omega}{(1 + j\omega)^2}$	[1, 2]	-2 * 20 = -40	-20
$\frac{100 j\omega}{(1 + j\omega)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}$	[2, 9.0405]	-20	-40
$\frac{100 j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{9.0405}\right)}{(1 + j\omega)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}$	[9.0405, 54.1347]	+20	-20
$\frac{100 j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{9.0405}\right)}{(1 + j\omega)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{54.1347}\right)}$	[54.1347, 1000)	-20	-40

$$\star \text{ Aportación} = 20 \cdot [\log K_{\text{Bode}} - n \cdot \log \omega_i] = 20 \cdot [\log 100 + 1 \cdot \log 0.01] = 0 \text{ dB}$$

DIAGRAMA DE FASE:

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (°)	Pendiente (°/déc)
$100 j\omega$	$(0.01, 0.1]$	$90^\circ * n = +90^\circ$	0°
$\frac{100 j\omega}{(1 + j\omega)^2}$	$[0.1, 0.2]$	$-45^\circ * 2 = -90^\circ$	-90°
$\frac{100 j\omega}{(1 + j\omega)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}$	$[0.2, 0.90405]$	-45°	-135°
$\frac{100 j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{9.0405}\right)}{(1 + j\omega)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}$	$[0.90405, 5.41347]$	$+45^\circ$	-90°
$\frac{100 j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{9.0405}\right)}{(1 + j\omega)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{54.1347}\right)}$	$[5.41347, 10]$	-45°	-135°
$\frac{100 j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{9.0405}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{54.1347}\right)}$	$[10, 20]$	$+45^\circ * 2 = +90^\circ$	-45°
$\frac{100 j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{9.0405}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{54.1347}\right)}$	$[20, 90.405]$	$+45^\circ$	0°
$\frac{100 j\omega}{\left(1 + \frac{j\omega}{54.1347}\right)}$	$[90.405, 541.347]$	-45°	-45°
$100 j\omega$	$[541.347, 1000)$	$+45^\circ$	0°

Con estos datos se dibujan los diagramas asintóticos del sistema compensado.



Y comprobando a partir de los diagramas de Bode del sistema compensado:

Se calcula la fase en el punto de frecuencia:

$$\omega'_a = 22.1225 \text{ rad/s.}$$

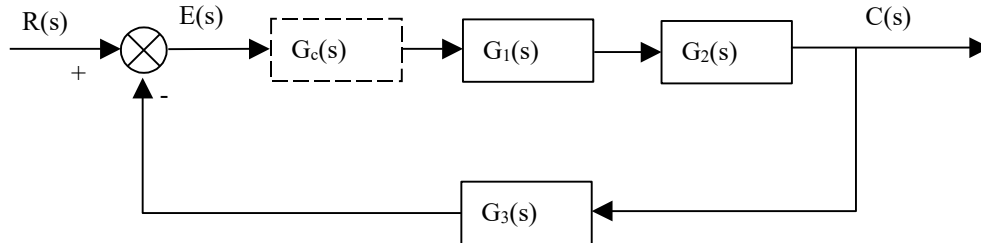
$$+ 90 - 90 \log \frac{0.2}{0.1} - 135 \log \frac{0.90405}{0.2} - 90 \log \frac{5.41347}{0.90405} - 135 \log \frac{10}{5.41347} - 45 \log \frac{20}{10} = -145.0222^\circ$$

Luego:

$$MF' = 180^\circ - 145.0222^\circ = 34.9778^\circ$$

EJERCICIO 3.16.

Dado un sistema de control representado por el siguiente diagrama de bloques:



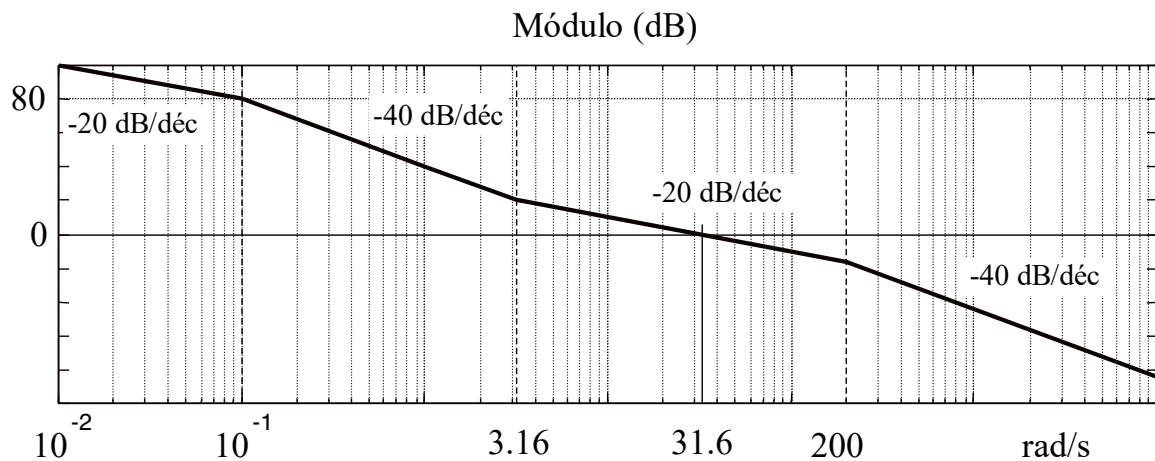
Con

$$G_1(s) = 10$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s}$$

Añadir al sistema un compensador $G_c(s)$, en cascada, para que el sistema tenga el mismo comportamiento en régimen permanente y tenga el mismo margen de fase que el sistema cuya respuesta en frecuencia (Bode: Amplitud), se muestra en la figura:



Se comienza analizando el sistema de referencia:

- La pendiente del primer tramo es de -20 dB/déc:

Luego el sistema es de tipo 1.

- Las frecuencias de corte son: 0.1
 3.16

200

- La pendiente del intervalo $[0.1, 3.16]$ ha aumentado en -20 dB/déc:

Luego 0.1 es un polo de la función de transferencia en lazo abierto.

- La pendiente del intervalo $[3.16, 200]$ ha disminuido en -20 dB/déc:

Luego 3.16 es un cero de la función de transferencia en lazo abierto.

- La pendiente del último tramo es -40 dB/déc:

Luego 200 es un polo de la función de transferencia en lazo abierto.

- La aportación del primer tramo en $\omega = 0.1$ rad/seg es de 80 dB:

Luego se puede escribir:

$$80 \text{ dB} = 20 (\log K_{\text{Bode}} - 1 \cdot \log 0.1) = 20 (\log K_{\text{Bode}} + 1)$$

luego:

$$4 = \log K_{\text{Bode}} - 1 \Rightarrow K_{\text{Bode}} = 1000$$

Quedando entonces la función de transferencia en lazo abierto del sistema de referencia:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1000 \left(\frac{j\omega}{3.16} + 1 \right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{0.1} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{200} + 1 \right)}$$

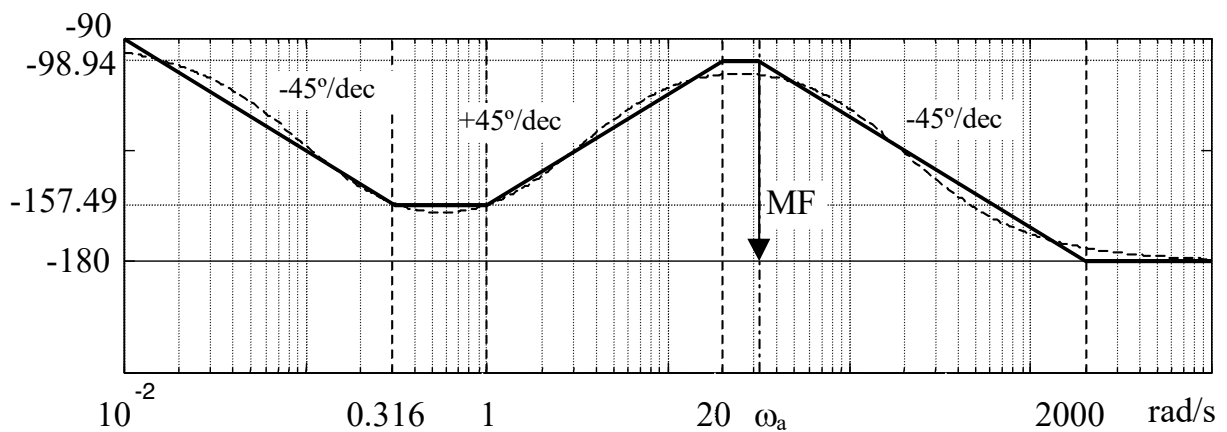
Para calcular el margen de fase de este sistema se hallan ahora los diagramas asintóticos de fase.

DIAGRAMA DE FASE

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (°)	Pendiente (° / déc.)
$\frac{1000}{j\omega}$	$(-\infty, 0.01]$	- 90°	0°
$\frac{1000}{j\omega \left(\frac{j\omega}{0.1} + 1 \right)}$	$[0.01, 0.316]$	- 45°	- 45°

$\frac{1000\left(\frac{j\omega}{3.16}+1\right)}{j\omega\left(\frac{j\omega}{0.1}+1\right)}$	[0.316, 1]	+ 45°	0°
$\frac{1000\left(\frac{j\omega}{3.16}+1\right)}{j\omega}$	[1, 20]	+ 45°	+ 45°
$\frac{1000\left(\frac{j\omega}{3.16}+1\right)}{j\omega\left(\frac{j\omega}{200}+1\right)}$	[20, 31.6]	- 45°	0°
$\frac{1000}{j\omega\left(\frac{j\omega}{200}+1\right)}$	[31.6, 2000]	- 45°	- 45°
$\frac{1000}{j\omega}$	[2000, +∞)	+ 45°	0°

Se dibuja el diagrama de fase:



Se calcula analíticamente el valor del margen de fase (MF):

La frecuencia de cruce de ganancia es un dato que se da en el diagrama de amplitud, cuyo valor es:

$$\omega_a = 31.6 \text{ rad/seg}$$

$$-90^\circ - 45 \log \frac{0.316}{0.01} = -157.4859^\circ$$

$$-157.4859^\circ + 45 \log \frac{20}{1} = -98.9396^\circ$$

$$MF = -180^\circ + 98.9396^\circ = -81.0604^\circ$$

Este es el margen de fase del sistema de referencia.

El error en régimen permanente de este sistema será:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1000 \left(\frac{s}{3.16} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{0.1} + 1 \right) \left(\frac{s}{200} + 1 \right)} = 1000$$

luego:

$$e_{rp} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

Y el error en régimen permanente del sistema inicial, vendrá dado por:

$$K_{v_1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{10}{s \left(\frac{s}{10} + 1 \right) \left(\frac{s}{100} + 1 \right)} = 10$$

luego:

$$e_{rp1} = \frac{1}{K_{v_1}} = \frac{1}{10} = 0.1$$

Por lo que para mantener el error, hay que introducir en el sistema inicial un regulador proporcional de ganancia:

$$K = \frac{K_v}{K_{v_1}} = \frac{1000}{10} = 100$$

y el sistema compensado en ganancia quedará:

$$G(s)H(s) = \frac{1000}{s \left(\frac{s}{10} + 1 \right) \left(\frac{s}{100} + 1 \right)}$$

Representación de la respuesta en frecuencia:

Haciendo el cambio: $s \rightarrow j\omega$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1000}{j\omega \left(\frac{j\omega}{10} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{100} + 1 \right)}$$

Se tiene:

Frecuencias de corte o ruptura: 10
100

$$K_{\text{Bode}} = 1000$$

Se construyen las tablas de pendientes para cada frecuencia para así obtener los diagramas asintóticos de Bode.

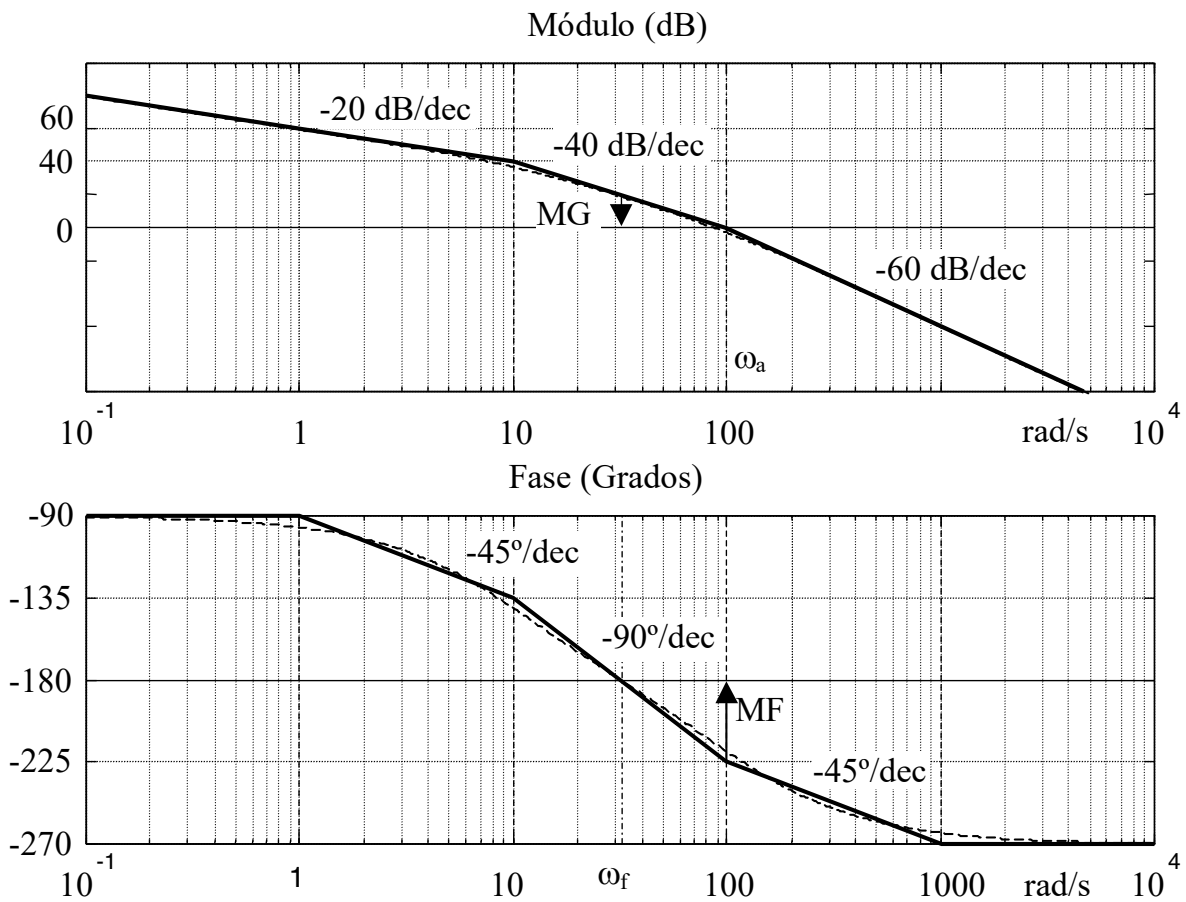
DIAGRAMA DE AMPLITUD

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (dB)	Pendiente (dB/déc.)
$\frac{1000}{j\omega}$	(1, 10]	$20[\log K_{\text{Bode}} - n \log 1]$ = 60 dB	-20 * tipo = = -20 dB/déc.
$\frac{1000}{j\omega \left(\frac{j\omega}{10} + 1 \right)}$	[10, 100]	- 20	- 40 dB/déc
$\frac{1000}{j\omega \left(\frac{j\omega}{10} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{100} + 1 \right)}$	[100, 1000)	-40	- 60 dB/déc.

DIAGRAMA DE FASE

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (°)	Pendiente (° / déc.)
$\frac{1000}{j\omega}$	(0.1, 1]	- 90°	0°
$\frac{1000}{j\omega \left(\frac{j\omega}{10} + 1 \right)}$	[1, 10]	- 45°	- 45°
$\frac{1000}{j\omega \left(\frac{j\omega}{10} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{100} + 1 \right)}$	[10, 100]	- 45°	- 90°
$\frac{1000}{j\omega \left(\frac{j\omega}{100} + 1 \right)}$	[100, 1000]	+ 45°	- 45°
$\frac{1000}{j\omega}$	[1000, 10000)	+ 45°	0°

Se representan a continuación los diagramas asintóticos:



Se calcula el margen de fase (MF) de este sistema:

Del diagrama de amplitud se tiene en $\omega = 10 \text{ rad/s}$:

$$60 - 20 \log \frac{10}{1} = 40 \text{ dB}$$

luego:

$$40 = 40 \log \frac{\omega_a}{10} \Rightarrow \omega_a = 100 \text{ rad/s}$$

con este valor de frecuencia, en el diagrama de fase, se tiene:

$$-90 - 45 \log \frac{10}{1} - 90 \log \frac{\omega_a}{10} = -225^\circ$$

luego:

$$\text{MF} = -45^\circ.$$

El sistema es inestable.

Se debe conseguir que el margen de fase sea 81° , luego se introducirá en la cadena

directa una red de atraso de fase.

Se busca la frecuencia para la que se produce ese margen de fase en el sistema sin compensar:

$$\text{Fase} = -180^\circ + 81.0604^\circ = -98.9396^\circ$$

$$-45 \log \frac{\omega_a'}{1} = -98.9396^\circ + 90^\circ = -8.9396^\circ$$

$$\omega_a' = 1.58 \text{ rad/s}$$

Ésta es la nueva frecuencia de cruce de ganancia del sistema compensado. Para esta frecuencia la amplitud vale:

$$+80 - 20 \log \frac{\omega_a'}{0.1} = +80 - 20 \log \frac{1.58}{0.1} = +80 - 23.9732 = +56.0268 \text{ dB}$$

La red de retardo de fase debe proporcionar esta amplitud en la frecuencia de ganancia crítica, luego:

$$20 \log \beta = 56.0268 \text{ dB} \Rightarrow \beta = 632.9104$$

y el cero de la red será:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_a'}{10} = 0.158$$

$$T = 6.3291$$

y el polo:

$$\frac{1}{\beta T} = \frac{1}{632.9104 \cdot 6.3291} = \frac{1}{4005.762}$$

$$\beta T = 0.0002$$

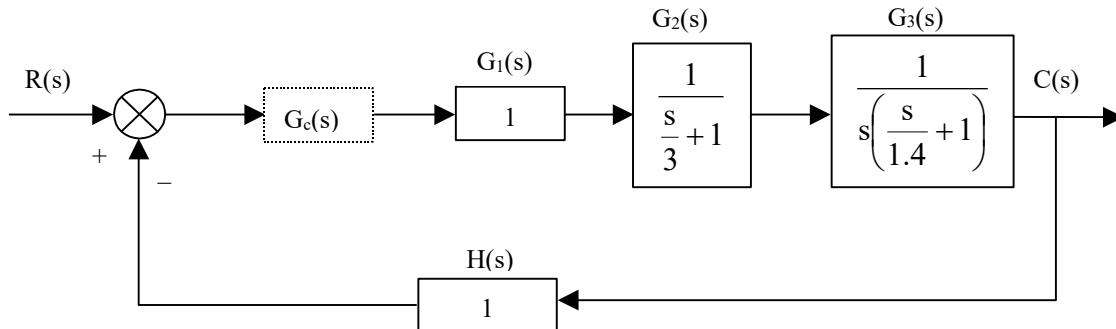
Luego la red de retardo de fase quedará:

$$G_c(s) = \frac{1 + sT}{1 + s\beta T} = \frac{1 + 6.3291s}{1 + 4005.762s}$$

EJERCICIO 3.17.

Para el sistema mostrado en la figura diseñese una red de adelanto $G_c(s)$ de tal forma que el error en régimen permanente no varíe y el margen de fase sea al menos de 40° . (Coeficiente de seguridad: 8°).

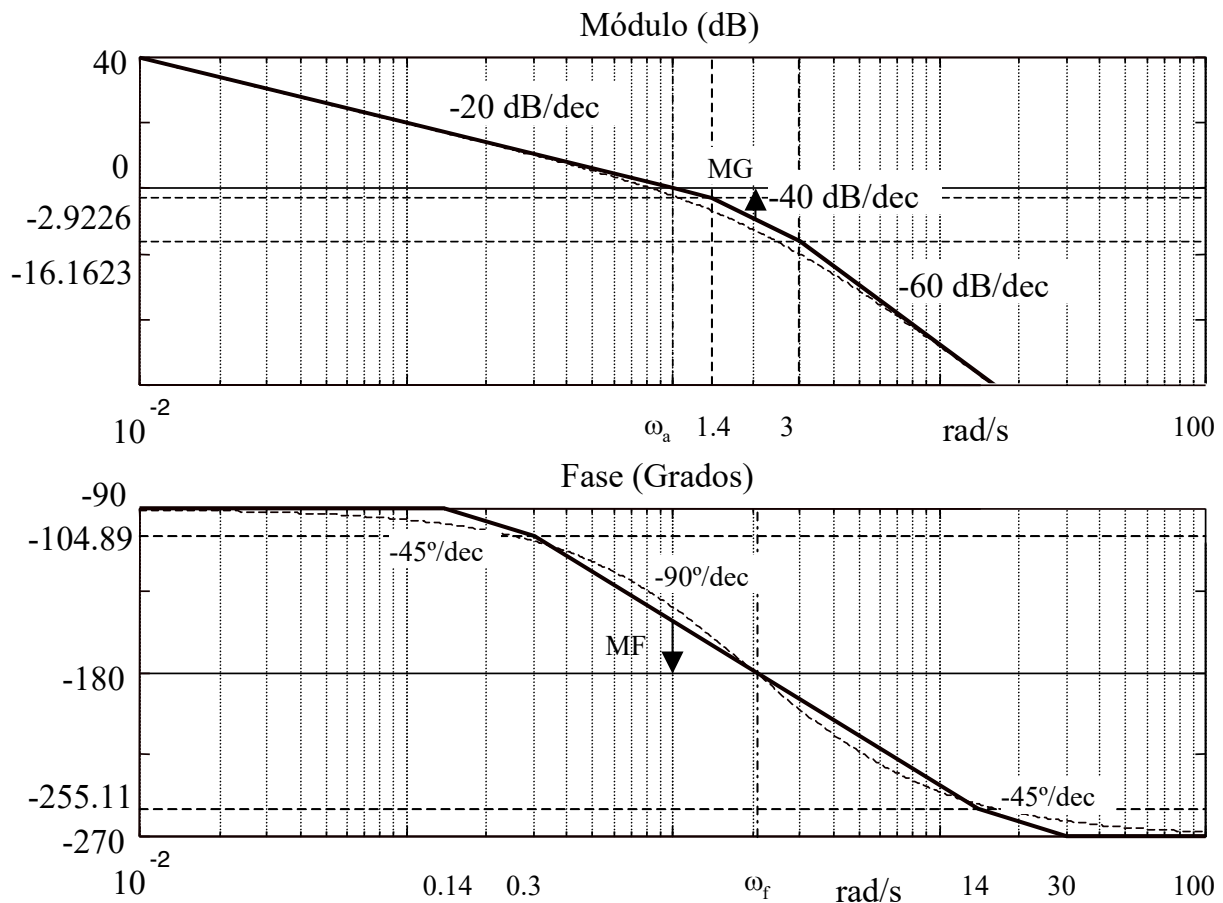
Obtener la respuesta en frecuencia de lazo cerrado del sistema compensado.



La función de transferencia en lazo abierto del sistema en el dominio de la frecuencia quedará:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega) \cdot \left(\frac{j\omega}{1.4} + 1\right) \cdot \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}$$

Los diagramas de Bode de este sistema son (ver ref. 9, ej. 7.15):



Cálculo analítico del margen de fase (MF):

Del diagrama de amplitud, se tiene:

$$20 \text{ dB} = 20 \log \frac{\omega_a}{0.1}$$

despejando se obtiene la frecuencia de cruce de ganancia:

$$\omega_a = 0.1 \cdot 10^{\frac{20}{20}} = 1 \text{ rad/seg}$$

Y para esta frecuencia le corresponde una fase, según el diagrama de fase:

$$\phi = -90^\circ - 45 \log \frac{0.3}{0.14} - 90 \log \frac{1}{0.3} = -151.9538^\circ.$$

Luego el margen de fase del sistema será:

$$\text{MF} = +180^\circ - 151.9538^\circ = +28.0462^\circ$$

Se desea que el sistema presente un margen de fase: $\text{MF} = 40^\circ$

El ángulo que debe aportar la red será:

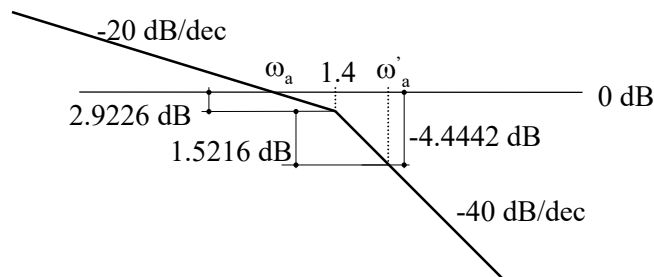
$$\phi_c = 40^\circ - 28.046^\circ + 8^\circ = 19.954^\circ \approx 20^\circ$$

$$\phi_c = 20^\circ = 45 \log \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 0.3594$$

Y la atenuación producida por la red de avance:

$$A = 20 \log \frac{1}{\alpha} = 20 \log \frac{1}{0.3594} = 8.8884 \text{ dB}$$

La frecuencia a la cual la curva de amplitud de $G(j\omega)$ es igual a la mitad de la atenuación introducida por la red de avance es:



$$-\frac{A}{2} = -\frac{8.8884}{2} = -4.4442 \text{ dB}$$

$$20 \log \frac{1.4}{1} = 2.9226 \text{ dB}; \quad -4.4442 + 2.9226 = -1.5216 \text{ dB}$$

$$40 \log \frac{\omega_a'}{1.4} = 1.5216$$

$$\omega_a' = 1.4 \cdot 10^{\frac{1.5216}{40}} = 1.5282 \text{ rad/seg}$$

Si se hace $\omega_a' = \omega_m$, que es la media geométrica de las dos frecuencias de esquina, tendremos:

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = 1.5282 \text{ rad/seg}$$

y las frecuencias esquina quedarán:

$$\frac{1}{T} = 1.5282 \cdot \sqrt{\alpha} = 0.9162 \text{ rad/seg}$$

$$\frac{1}{\alpha T} = 2.5491 \text{ rad/seg}$$

La función de transferencia de la red compensadora será:

$$G_{ra}(j\omega) = \alpha \frac{1 + T j\omega}{1 + \alpha T j\omega} = 0.3594 \frac{1 + 1.0915 j\omega}{1 + 0.3923 j\omega} = 0.3594 \frac{1 + \frac{j\omega}{0.9162}}{1 + \frac{j\omega}{2.5491}}$$

Para que el compensador no aporte ganancia ($\alpha = 0.3594$), se introduce un amplificador de ganancia:

$$\frac{1}{\alpha} = 2.7824$$

luego, la red compensadora quedará:

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{0.9162}}{1 + \frac{j\omega}{2.5491}}$$

Y el sistema total compensado:

$$G_t(j\omega) = G_c(j\omega) \cdot G(j\omega)$$

$$G_t(j\omega) = \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{0.9162}\right)}{(j\omega) \left(1 + \frac{j\omega}{1.4}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{2.5491}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{3}\right)}$$

Una vez compensado el sistema, se halla la respuesta en frecuencia de este nuevo sistema.

Dibujo de las trazas de Bode para este sistema:

$$K'_{\text{Bode}} = 1$$

$$\begin{array}{ll} \text{Frecuencias de corte: } 0.9162 \text{ rad/seg} & 1.4 \text{ rad/seg} \\ & 2.5491 \text{ rad/seg} \quad 3 \text{ rad/seg} \end{array}$$

Se calculan a continuación las tablas con las pendientes para los diagramas de amplitud y fase del sistema compensado.

DIAGRAMA DE AMPLITUD

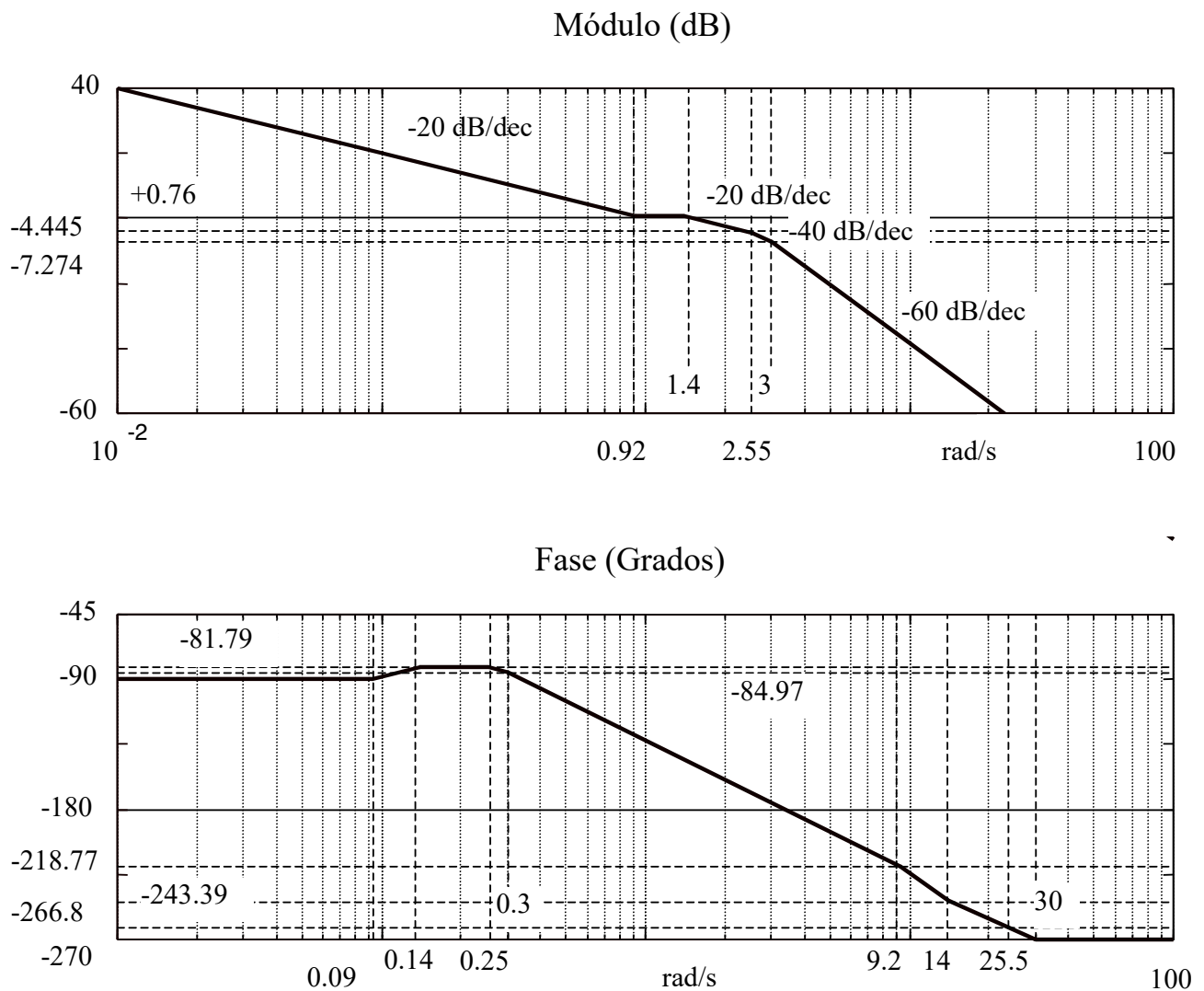
Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (dB)	Pendiente (dB/dec)
$\frac{1}{(j\omega)}$	(0.01, 0.9162]	★	-20 * tipo = -20
$\frac{\left(\frac{j\omega}{0.9162} + 1\right)}{(j\omega)}$	[0.9162, 1.4]	+20	0
$\frac{\left(\frac{j\omega}{0.9162} + 1\right)}{(j\omega)\left(\frac{j\omega}{1.4} + 1\right)}$	[1.4, 2.5492]	-20	-20
$\frac{\left(\frac{j\omega}{0.9162} + 1\right)}{(j\omega)\left(\frac{j\omega}{1.4} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{2.5492} + 1\right)}$	[2.5492, 3]	-20	-40
$\frac{\left(\frac{j\omega}{0.9162} + 1\right)}{(j\omega)\left(\frac{j\omega}{1.4} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{2.5492} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}$	[3, 100)	-20	-60

$$\star \text{ Aportación} = 20 \cdot [\log K'_{\text{Bode}} - \text{tipo} \cdot \log \omega_i] = 20 \cdot [\log 1 - 1 \cdot \log 0.01] = 40 \text{ dB}$$

DIAGRAMA DE FASE

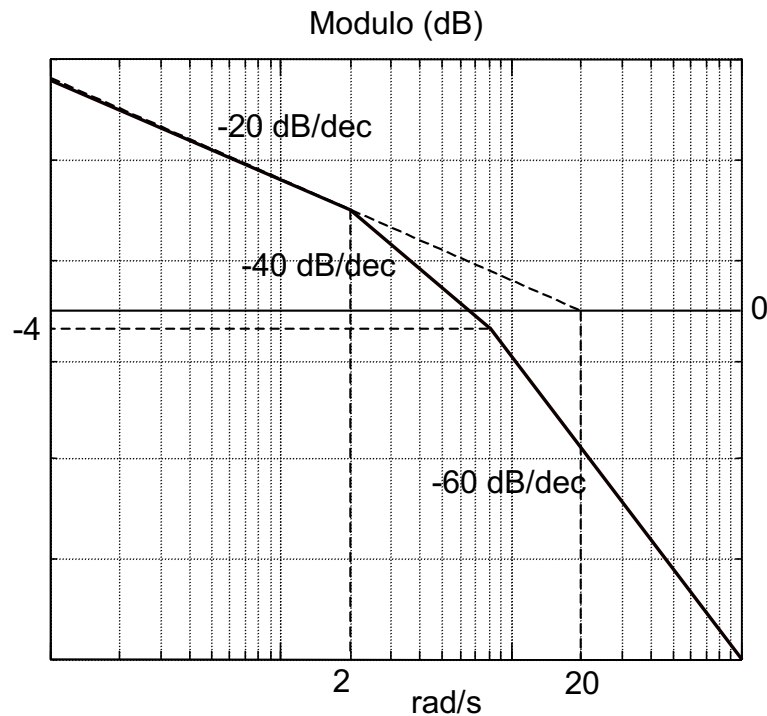
Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (°)	Pendiente (°/dec)
$\frac{1}{(j\omega)}$	(0.01, 0.092]	-90° * tipo = -90° * 1 = -90°	0°
$\frac{\left(\frac{j\omega}{0.9162} + 1\right)}{(j\omega)}$	[0.092, 0.14]	+45°	+45°
$\frac{\left(\frac{j\omega}{0.9162} + 1\right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{1.4} + 1\right)}$	[0.14, 0.255]	-45°	0°
$\frac{\left(\frac{j\omega}{0.9162} + 1\right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2.55} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{1.4} + 1\right)}$	[0.255, 0.3]	-45°	-45°
$\frac{\left(\frac{j\omega}{0.9162} + 1\right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2.55} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{1.4} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}$	[0.3, 9.2]	-45°	-90°
$\frac{1}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2.55} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{1.4} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}$	[9.2, 14]	-45°	-135°
$\frac{1}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2.55} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}$	[14, 25.5]	+45°	-90°
$\frac{1}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}$	[25.5, 30]	+45°	-45°
$\frac{1}{(j\omega)}$	[30, 100)	+45°	0°

Con estos datos los diagramas asintóticos de Bode del sistema compensado quedan según se muestra en la siguiente figura.



EJERCICIO 3.18.

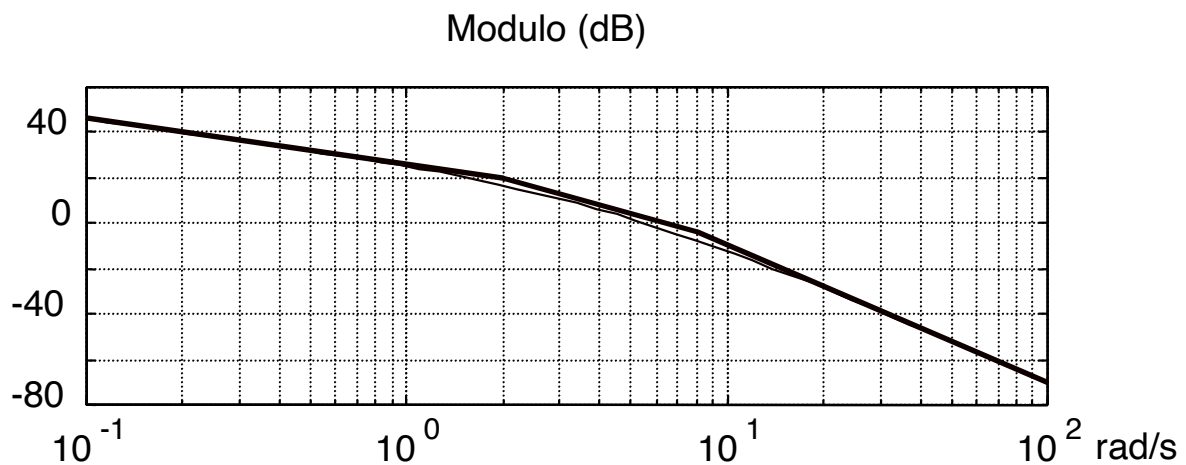
Dada la representación del diagrama de Bode asintótico del módulo de la función de transferencia de lazo abierto de un sistema:

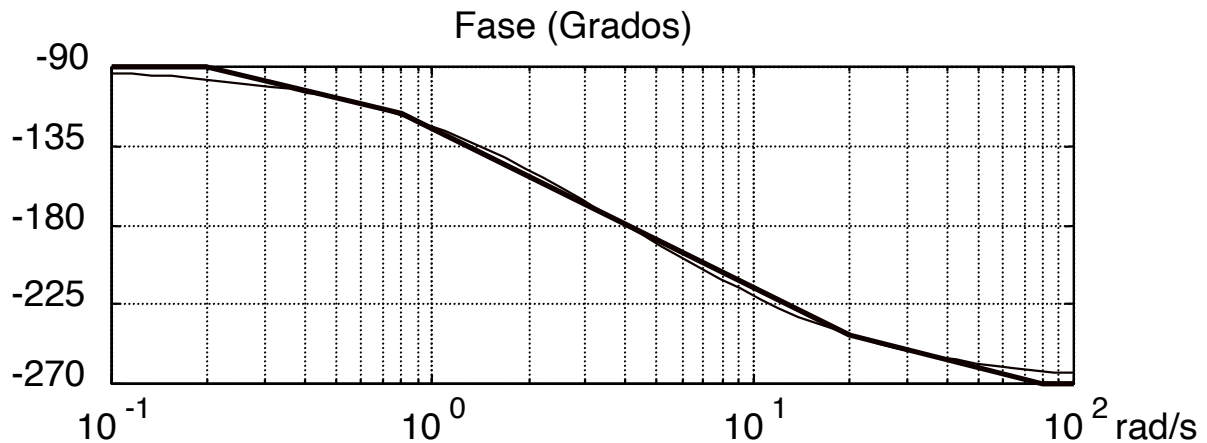


Calcular la red de compensación para obtener un comportamiento equivalente a un sistema de segundo orden con un coeficiente de amortiguamiento de 0.45.

La función de transferencia y los diagramas de Bode son (ver ref. 9, ej. 7.17):

$$G(j\omega) = \frac{20}{j\omega(1 + 0.5j\omega)(1 + 0.125j\omega)}$$





$$MF = -180 + 197.88 = -17.88 \approx -18^\circ$$

El sistema es inicialmente inestable, luego se utilizará un red de retardo de fase para realizar la compensación.

Como el coeficiente de amortiguamiento pedido es 0.45 se puede aproximar el margen de fase con:

$$MF \approx 100 \cdot \delta \approx 100 \cdot 0.45 \approx 45^\circ$$

El punto de amplitud crítica del sistema compensado ω_a' debe situarse en la frecuencia a la que se encuentra el margen de fase requerido: $-187 + 45 = -135^\circ$.

Como $\phi(\omega = 0.8 \text{ rad/s}) = -117.09^\circ$:

$$135 - 117.09 = 17.91^\circ$$

$$\frac{90^\circ}{117.91^\circ} = \frac{1 \text{ dec}}{\log \omega_a' - \log 0.8}$$

$$\log \frac{\omega_a'}{0.8} = \frac{17.91}{90}$$

$$\omega_a' = 0.8 \cdot 10^{\frac{17.91}{90}} = 1.26 \text{ rad/s}$$

La red de retardo de fase debe proporcionar una atenuación igual al módulo del sistema sin compensar para la frecuencia ω_a' :

$$\frac{20 \text{ dB}}{m} = \frac{1 \text{ dec}}{\log 2 - \log 1.26}$$

$$m = 20 \log \frac{2}{1.26} = 4.01 \text{ dB}$$

$$|G(j1.26)| = 20 + 4.01 = 24.01 \approx 24 \text{ dB}$$

El coeficiente β de la red será:

$$24 = 20 \log \beta$$

$$\beta = 10^{\frac{24}{20}} = 15.84$$

La frecuencia de corte del cero de la red se sitúa una década por debajo de ω_a :

$$\frac{1}{T} = 0.126 \quad T = 7.94$$

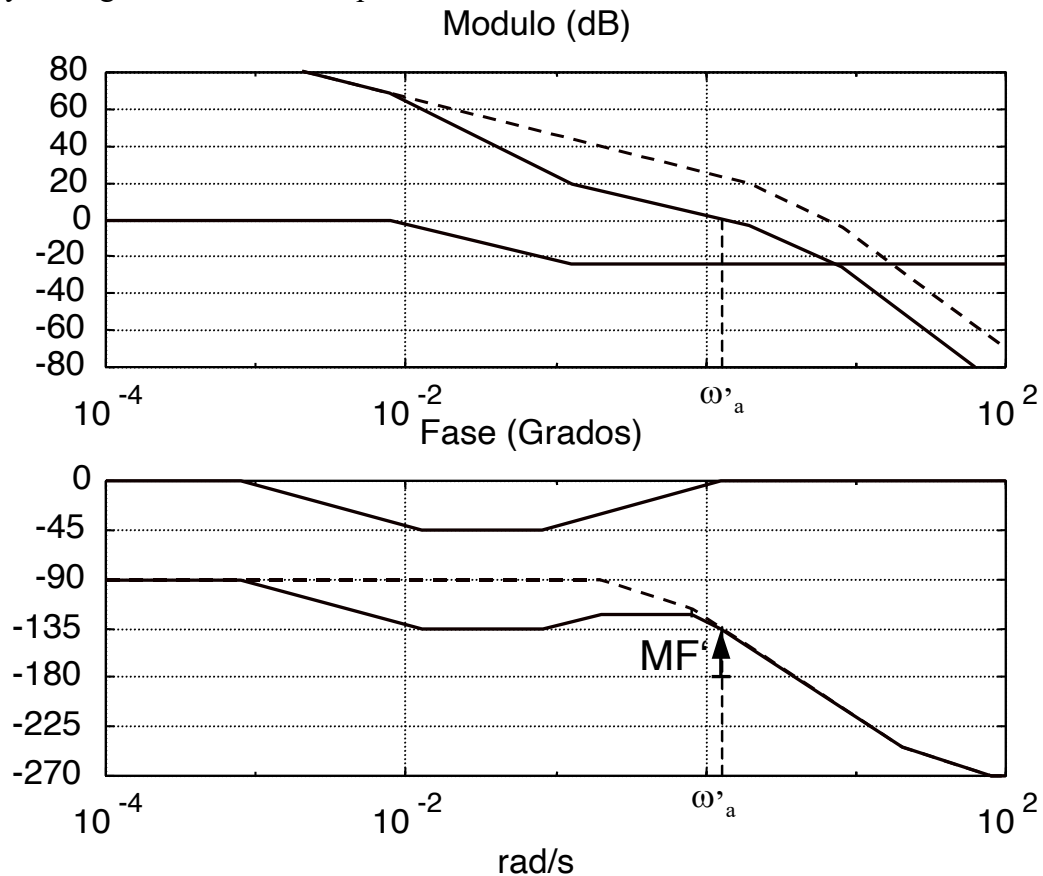
$$\beta \cdot T = 15.84 \cdot 7.94 = 125.73$$

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega \beta T}$$

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + 7.94j\omega}{1 + 125.79j\omega}$$

$$G_c(s) = \frac{1 + 7.94s}{1 + 125.79s} = \frac{1}{15.84} \frac{s + 0.126}{s + 0.008}$$

La siguiente figura representa el diagrama de Bode inicial en línea discontinua, y la red de retardo y el diagrama de Bode compensado en línea continua.



EJERCICIO 3.19.

Un sistema de control con realimentación unitaria tiene como función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Se desea que el coeficiente de error estático de velocidad sea de 10 seg^{-1} , el margen de fase sea de 50° como mínimo y el margen de ganancia sea de 10 dB o más.

Diseñar el compensador de atraso-adelanto que cumpla con las especificaciones de funcionamiento en el dominio de la frecuencia. Representar los diagramas asintóticos de Bode de los sistemas sin compensar y compensado. Comprobar los resultados obtenidos.

Inicialmente se compensa el sistema en ganancia para cumplir la especificación de régimen permanente que se exigen:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^2 + 3s + 2} = \frac{K}{2} = 10$$

Luego:

$$K = 20$$

Por lo que el sistema compensado en ganancia queda:

$$G_1(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+2)}$$

Pasando al dominio de la frecuencia: $s \rightarrow j\omega$, se obtiene:

$$G_1(j\omega) = \frac{20}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{20}{j\omega(j\omega+1) \cdot 2 \cdot \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)}$$

$$G_1(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1) \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)}$$

Polo en el origen. Frecuencias de Corte: 1 y 2.

$$K_{\text{Bode}} = 10$$

A continuación, se construyen las tablas de pendientes para la representación asintótica de los diagramas de Bode.

DIAGRAMA DE AMPLITUD

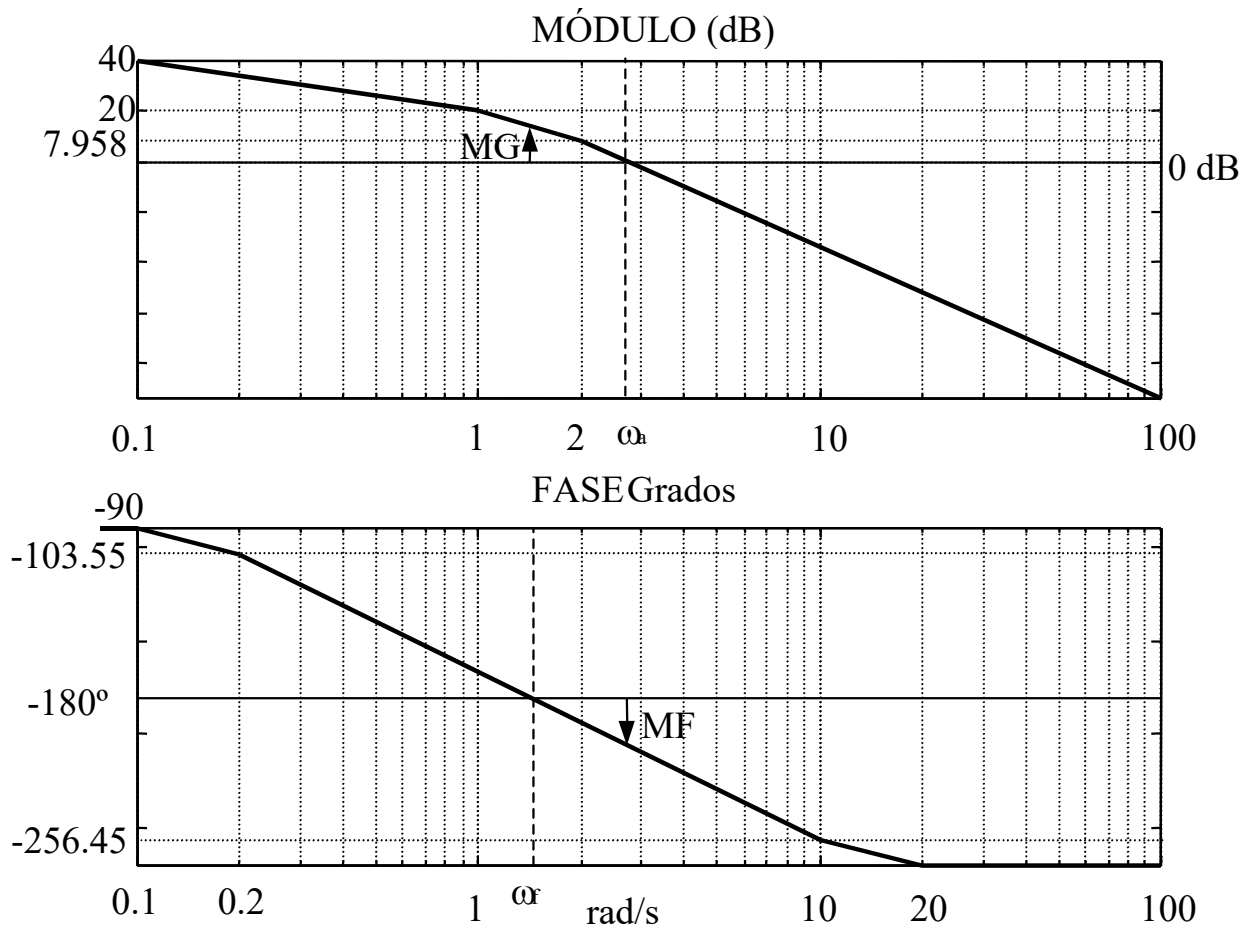
Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (dB)	Pendiente (dB/déc)
$\frac{10}{j\omega}$	(0.1, 1]	H	-20 * tipo = -20
$\frac{10}{j\omega (j\omega + 1)}$	[1, 2]	-20 dB	-40
$\frac{10}{j\omega (j\omega + 1) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right)}$	[2, 100)	-20 dB	-60

$$H \text{ Aportación} = 20 [\log K_{\text{Bode}} - \text{tipo} \cdot \log \omega_i] = 20 [\log 10 - \log 0.1] = 40 \text{ dB}$$

DIAGRAMA DE FASE

Factores que intervienen	Intervalo	Aportación (°)	Pendiente (°/déc)
$\frac{10}{j\omega}$	(0, 0.1]	-90° * tipo = -90°	0°
$\frac{10}{j\omega (j\omega + 1)}$	[0.1, 0.2]	-45°	-45°
$\frac{10}{j\omega (j\omega + 1) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right)}$	[0.2, 10]	-45°	-90°
$\frac{10}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right)}$	[10, 20]	+45°	-45°
$\frac{10}{j\omega}$	[20, 100)	+45°	0°

Con estos datos ya se pueden dibujar los diagramas asintóticos de Bode.



Cálculo analítico del Margen de Fase (MF):

Del diagrama de Amplitud, se tiene:

$$40 - 20 \log \frac{1}{0.1} - 40 \log \frac{2}{1} - 60 \log \frac{\omega_a}{2} = 0$$

despejando se obtiene la frecuencia de cruce de ganancia:

$$\omega_a = 2 \cdot 10^{\frac{7.9588}{60}} = 2.7144 \text{ rad/seg}$$

Y para esta frecuencia, le corresponde una fase:

$$-90 - 45 \log \frac{0.2}{0.1} - 90 \log \frac{2.7144}{0.2} = -103.5463^\circ - 101.9379^\circ = -205.4842^\circ$$

Luego el Margen de Fase del sistema será:

$$MF = +180^\circ - 205.4842^\circ = -25.4842^\circ \quad \text{Sistema INESTABLE}$$

Puede verse que el valor obtenido de MF no está dentro de la especificación requerida. Deseamos un margen de fase de $MF' = 50^\circ$. Luego se desplazará el punto de ganancia crítica hasta un punto tal que la Fase sea de -130° , que pasará a ser la nueva frecuencia de amplitud crítica del sistema compensado. O lo que es lo mismo necesitamos retrasar la fase:

$$-205.4842^\circ + \varphi_c = -130^\circ$$

$$\varphi_c = 75.4842^\circ$$

$$-90^\circ - 45 \log \frac{0.2}{0.1} - 90 \log \frac{\omega'_a}{0.2} = -130^\circ$$

$$-90 \log \frac{\omega'_a}{0.2} = -26.4537^\circ$$

$$\omega'_a = 0.2 \cdot 10^{\frac{26.4537}{90}} = 0.3935 \text{ rad/seg}$$

La red de retardo debe proporcionar una atenuación igual al módulo del sistema sin compensar en el punto ω'_a para que al sumarlas se obtenga 0 dB:

$$40 - 20 \log \frac{0.3935}{0.1} = 40 - 11.8989 = 28.1011 \text{ dB}$$

luego:

$$28.1011 = 20 \log \beta$$

$$\beta = 10^{\frac{28.1011}{20}} = 25.413$$

Se elige el cero de la red de retardo ($1/T_2$), una década por debajo de la nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$\frac{1}{T_2} = \frac{\omega'_a}{10} = \frac{0.3935}{10} = 0.03935$$

$$T_2 = 25.413$$

$$\beta T_2 = 25.413 \cdot 25.413 = 645.82$$

Se calcula ahora la red de avance con la condición:

$$\alpha \beta = 1$$

Por lo que:

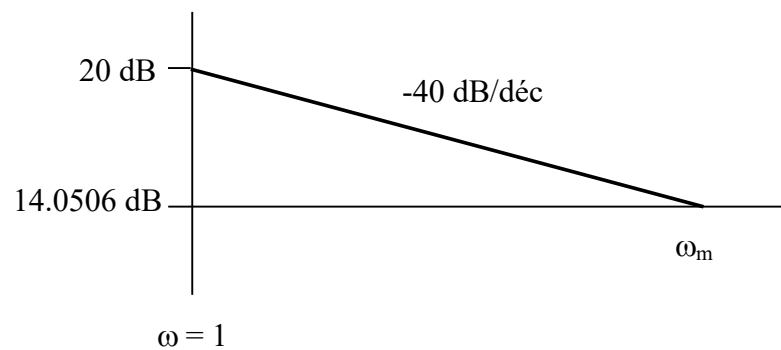
$$\alpha = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{25.413} = 3.935 \cdot 10^{-2}$$

provocando una atenuación:

$$A = 20 \log \frac{1}{\alpha} = 28.1011 \text{ dB}$$

Se calcula ω_m , valor de la frecuencia a la cual la amplitud del sistema sin compensar es igual a la mitad de la atenuación introducida por la red:

$$\frac{A}{2} = \frac{28.1011}{2} = 14.0506 \text{ dB}$$



$$20 - 14.0506 = 40 \log \frac{\omega_m}{1} = 5.9494 \text{ dB}$$

$$\omega_m = 10^{\frac{5.9494}{40}} = 1.4084 \text{ rad/seg}$$

y dado que:

$$\omega_m = \frac{1}{T_1 \sqrt{\alpha}}$$

$$T_1 = 3.5815$$

luego:

$$\frac{1}{T_1} = 0.2792 \text{ rad/seg}$$

$$\frac{1}{\alpha T_1} = 7.1046 \text{ rad/seg}$$

Por lo tanto, la función de transferencia del compensador de retardo avance de fase, es:

$$G_{ra}(j\omega) = \frac{1+j\omega T_2}{1+j\omega\beta T_2} \alpha \frac{1+j\omega T_1}{1+j\omega\alpha T_1} =$$

$$= \frac{1+j\omega \cdot 25.413}{1+j\omega \cdot 645.82} 3.935 \cdot 10^{-2} \frac{1+j\omega \cdot 3.5815}{1+j\omega \cdot 0.1409}$$

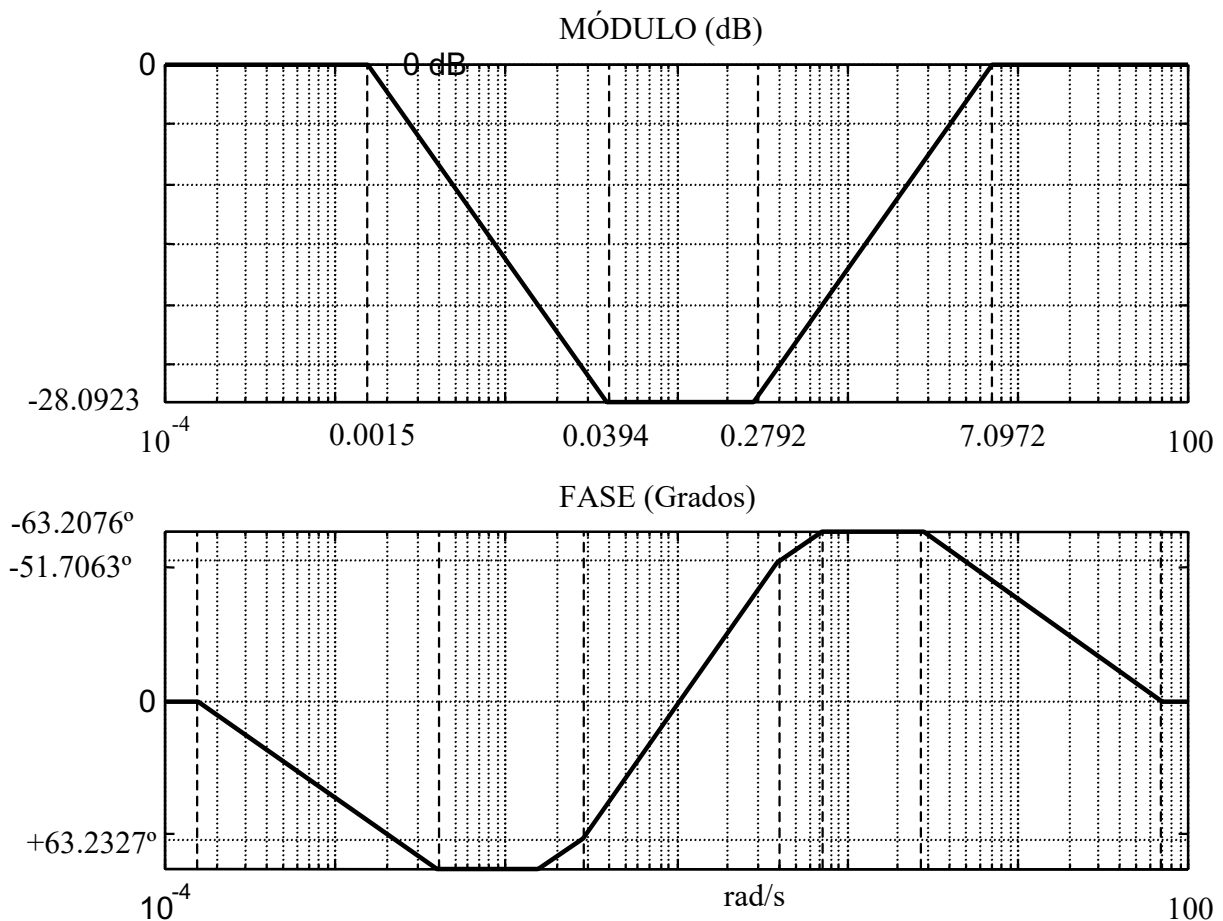
Para que no haya aporte de ganancia, se introduce $1/\alpha$, quedando:

$$G_{ra}(j\omega) = \frac{1+j\omega \cdot 25.413}{1+j\omega \cdot 645.82} \frac{1+j\omega \cdot 3.5815}{1+j\omega \cdot 0.1409}$$

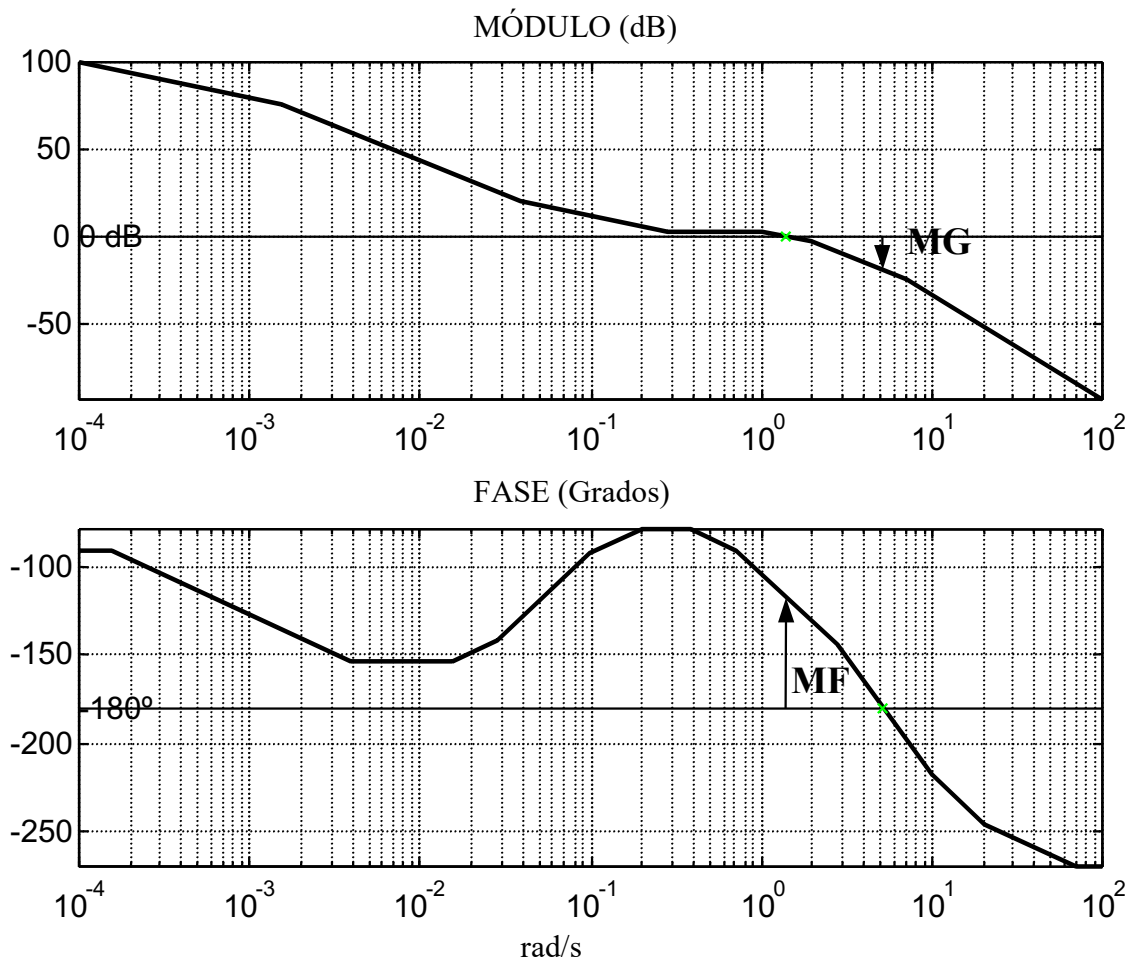
Operando esta expresión:

$$G_{ra}(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{0.03935}}{1 + \frac{j\omega}{0.00155}} \frac{1 + \frac{j\omega}{0.2792}}{1 + \frac{j\omega}{7.0972}}$$

Representando esta red mediante diagramas asintóticos:



Y el sistema compensado:



Obteniéndose los siguientes valores:

$$\text{Margen de Fase (MF)} = 63.3266^\circ \quad \omega_a = 1.4108 \text{ rad/seg.}$$

$$\text{Margen de ganancia (MG)} = 19.6849 \text{ dB} \quad \omega_f = 5.2164 \text{ rad/seg.}$$

Luego todos los requerimientos se cumplen.

